

光通信系统中一种新颖的满秩 QC-LDPC 码的构造方法研究

林志国 柏 鹏 范文同 林晋福 檀蕊莲

空军工程大学装备管理与安全工程学院, 陕西 西安 710051

摘要 为使低密度奇偶校验(LDPC)码高效地应用于光通信系统中,针对光通信系统的传输特点,提出了一种新颖的基于循环置换矩阵和掩蔽矩阵构造满秩准循环低密度奇偶校验(QC-LDPC)码的方法。该方法定义了一类基矩阵,由基矩阵扩展出循环置换矩阵,构造出围长至少为8的校验矩阵;提出了掩蔽矩阵的设计规则,并利用设计的掩蔽矩阵对前面得到的校验矩阵进行变换,构造出围长至少为8的满秩 QC-LDPC 码。与多种不同的 QC-LDPC 码构造方法进行理论分析和性能仿真比较,结果表明,利用该方法构造出的 LDPC 码字是满秩的,具有严格的准循环特性和优异的纠错性能,且构造灵活。该方法构造的码字适用于光通信系统。

关键词 光通信; 准循环低密度奇偶校验码; 满秩; 基矩阵; 围长

中图分类号 TN911.22 **文献标识码** A

doi: 10.3788/CJL201542.1005003

Research on a Novel Construction Method of Full Rank QC-LDPC Codes for Optical Communication Systems

Lin Zhiguo Bai Peng Fan Wentong Lin Jinfu Tan Ruilian

*Equipment Management and Safety Engineering, College of Air Force Engineering University,
Xi'An, Shaanxi 710051, China*

Abstract A novel construction method of full rank quasi-cyclic low-density parity-check (QC-LDPC) codes is proposed based on base matrices and masking matrices for efficient use of low-density parity-check (LDPC) codes in optical communication systems with the systems' characteristics. First, a base matrix based on which circulant permutation matrices and parity-check matrices with girth at least eight are extended out is defined. Then, the parity-check matrices are transformed using the masking matrices which are designed by the proposed theorem. Finally, full rank QC-LDPC codes with girth at least eight are constructed. Compared with different construction schemes in theory analysis and bit error rate performance, results indicate that the proposed LDPC codes are full rank with strict quasi-cyclic feature and excellent error correction capability. The construction method is flexible. As a result, the proposed QC-LDPC codes are suitable for the optical communication systems.

Key words optical communications; quasi-cyclic low-density parity-check codes; full rank; base matrix; girth
OCIS codes 060.4510; 200.2605; 200.3050

1 引 言

随着光通信系统向更高速率、更长距离和更大容量的飞速发展,偏振模色散(PMD)和非线性(NL)等逐渐成为影响系统性能提升的主要因素,严重影响到通信系统的可靠性;且从光通信系统资源消耗和实时性方面考虑,系统的高速率也要求信号的处理时延不能过长。低密度奇偶校验(LDPC)码作为一种性能优异的信道纠错码,具有逼近香农限的特性^[1-2],能够很好地补偿光信道中的各种损伤,提高高速传输系统的可靠性^[3-5]。

收稿日期: 2015-04-02; 收到修改稿日期: 2015-05-20

基金项目: 国家自然科学基金(61201209)、陕西省电子信息系统集成重点实验室基金(2011ZD09)

作者简介: 林志国(1986—),男,博士研究生,主要从事信道编解码和调制解调技术方面的研究。

E-mail: student_zg@126.com

导师简介: 柏 鹏(1964—),男,教授,博士生导师,主要从事电子系统综合化方面的研究。E-mail: baipeng@126.com

准循环 LDPC(QC-LDPC)码作为 LDPC 码的一种特殊码字,具有结构化的特点,相较于随机构造的 LDPC 码,其校验矩阵构造简单,存储空间少,编解码算法复杂度低,处理时延低,且通过设计可以构造出性能优异的码字,因而在诸多通信领域都得到了广泛的研究和应用^[6-14],如深空通信、水声通信以及光通信等。

通过循环置换矩阵构造 QC-LDPC 码是一种常用的构造方法。袁建国等^[11]提出了一种围长至少为 6 的 QC-LDPC 码的构造方法;M P C Fossorier^[12]给出了构造 QC-LDPC 码字的一类框架,分析了围长与循环置换矩阵的大小关系。两者的不足之处在于构造出的码字的准循环校验矩阵不满秩,而文中通过删减行达到满秩,因而不是严格的准循环结构,这给编译码处理增加了复杂度,不利于工程上的快速简单实现。Zhang Guohua 等^[13]基于最大公约数思想,利用计算机循环搜索满足构造原理的参数,最后通过固定的掩蔽矩阵使校验矩阵满秩,构造出围长至少为 8 的 QC-LDPC 码;Zhang Jianhua 等^[14]在 Zhang Guohua 等^[13]的基础上研究了构造列重较大的 QC-LDPC 码的方法。这两者构造的码字性能优异,但是均未给出掩蔽矩阵的设计原理。本文基于循环置换矩阵和掩蔽矩阵构造围长至少为 8 的满秩 QC-LDPC 码,码字具有严格的准循环结构。

2 基矩阵模型

通过循环置换矩阵方法构造出的 QC-LDPC 码的校验矩阵可以表示为

$$\mathbf{H}_{J \times L} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}(p_{0,0}) & \mathbf{I}(p_{0,1}) & \cdots & \mathbf{I}(p_{0,L-1}) \\ \mathbf{I}(p_{1,0}) & \mathbf{I}(p_{1,1}) & \cdots & \mathbf{I}(p_{1,L-1}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{I}(p_{J-1,0}) & \mathbf{I}(p_{J-1,1}) & \cdots & \mathbf{I}(p_{J-1,L-1}) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中校验矩阵 \mathbf{H} 由大小为 $P \times P$ 的循环置换矩阵 $\mathbf{I}(p_{j,i})$ 构成, $p_{j,i} (0 \leq j \leq J-1, 0 \leq i \leq L-1)$ 表示单位阵 \mathbf{I} 向右循环平移的次数。由此,校验矩阵的基矩阵可以表示为

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \cdots & p_{0,L-1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,L-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{J-1,0} & p_{J-1,1} & \cdots & p_{J-1,L-1} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

可以看出,基于循环置换矩阵构造 QC-LDPC 码的流程是:首先,设计基矩阵;然后,将基矩阵扩展为循环置换矩阵,得到校验矩阵 \mathbf{H} 。设计的基矩阵如下

$$\mathbf{E}(a_0, \dots, a_{L-1}) = \begin{bmatrix} a_0 0 & a_1 0 & \cdots & a_{L-1} 0 \\ a_0 1 & a_1 1 & \cdots & a_{L-1} 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_0(J-1) & a_1(J-1) & \cdots & a_{L-1}(J-1) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

式中 J, L 均为正整数,且 $J \geq 3, L \geq 3$; a_0, a_1, \dots, a_{L-1} 为满足 $0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_{L-1}$ 的 L 个正整数。由基矩阵转换为校验矩阵时, $a_i \cdot j (i=0, \dots, L-1; j=0, \dots, J-1)$ 对应的循环置换矩阵为将大小为 $P \times P$ 的单位阵循环右移 $a_i \cdot j \pmod{P}$ 次后的矩阵。

3 校验矩阵构造

定理 1^[12]:QC-LDPC 码的校验矩阵 \mathbf{H} 包含围长为 $2m$ 的环的充分必要条件是

$$\sum_{k=0}^{m-1} (p_{j_k, i_k} - p_{j_{k+1}, i_k}) = 0 \pmod{P}, \quad (4)$$

式中 $0 \leq j_k \leq J-1, j_k \neq j_{k+1}, j_m = j_0, 0 \leq i_k \leq L-1$ 。

任一校验矩阵 \mathbf{H} 中围长为 6 的环有 6 种类型,如图 1 所示。依据定理 1 和图 1,围长至少为 8 的 QC-LDPC 码的校验矩阵应满足:

$$p_{j_0, i_0} - p_{j_1, i_0} + p_{j_1, i_1} - p_{j_0, i_1} \neq 0 \pmod{P}, \quad (5)$$

$$p_{j_0, i_0} - p_{j_1, i_0} + p_{j_1, i_1} - p_{j_2, i_1} + p_{j_2, i_2} - p_{j_0, i_2} \neq 0 \pmod{P}, \quad (6)$$

式中 $0 \leq j_0, j_1, j_2 \leq J-1, 0 \leq i_0, i_1, i_2 \leq L-1$ 。

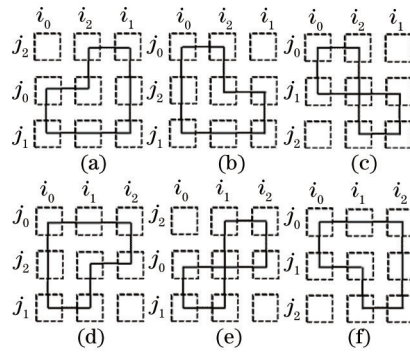


图 1 围长为 6 的环

Fig.1 Cycles with girth 6

(5)式保证了校验矩阵中无围长为 4 的环,(6)式保证了无围长为 6 的环。因此,满足(5)式和(6)式的 QC-LDPC 码的校验矩阵的围长至少为 8。

给出搜索 $S = \{a_0, a_1, \dots, a_{L-1}\}$ 的具体步骤如下:

步骤 1 初始化 $S = \{a_0\}$, a_0 为非负整数, $i = 0$;

步骤 2 令 $Y = a_i$;

步骤 3 令 $Y = Y + 1$, $k = 0, \dots, i$, $a_{i+1} = Y$,代入(3)式,计算 $E(a_0, \dots, a_i, a_{i+1})$ 是否满足(5)式,若满足,则表明其中不含 4 环,执行下一步骤;若不满足,则表明其中含 4 环,重复步骤 3;

步骤 4 计算 $E(a_0, \dots, a_i, a_{i+1})$ 是否满足(6)式,若满足,则表明其中不含 6 环,执行下一步骤;若不满足,则表明其中含 6 环,跳转至步骤 3;

步骤 5 $S = S \cup Y$, $i = i + 1$ 。若 $i < L - 1$,跳转至步骤 2,否则停止搜索,输出 S 。

给定参数 J, L, a_0 ,通过上述搜索算法可以得到基矩阵参数 a_0, a_1, \dots, a_{L-1} ,进而构造出围长至少为 8 的 QC-LDPC 码,由搜索过程可知矩阵参数 a_0, a_1, \dots, a_{L-1} 不是唯一的,但对于给定的 J, L, a_0 ,可以搜索到该算法下最小的循环置换矩阵维数 P_{\min} 。

文献[13]中给出的算法也可以搜索 P_{\min} 值,为直观比较,以 $a_0 = 0, J = 3, L = 3 \sim 12$ 和 $a_0 = 0, J = 4, L = 4 \sim 13$ 为例,两种算法下的 P_{\min} 值如表 1 和表 2 所示。可以看出,搜索算法搜索到的 P_{\min} 值不大于文献[13]算法下的搜索值,因此,搜索算法相较于文献[13]的算法能够构造出更多和更灵活的 QC-LDPC 码字。

表 1 $a_0 = 0, J = 3, L = 3 \sim 12$ 下的 P_{\min}

Table 1 P_{\min} of $a_0 = 0, J = 3, L = 3 \sim 12$

L	Paper [13]	Proposed method
3	13	7
4	15	9
5	19	19
6	21	21
7	31	25
8	33	27
9	55	55
10	57	57
11	67	61
12	69	63

表 2 $a_0 = 0, J = 4, L = 4 \sim 13$ 下的 P_{\min}

Table 2 P_{\min} of $a_0 = 0, J = 4, L = 4 \sim 13$

L	4	5	6	7	8
Paper [13]	16	34	58	61	73
Proposed method	16	34	35	59	70
L	9	10	11	12	13
Paper [13]	124	127	136	139	223
Proposed method	95	100	136	139	166

通过上述算法构造出了列重为 J , 行重为 L , 且围长至少为 8 的 QC-LDPC 码, 但是此时码字的校验矩阵 H 不满秩。

定理 2: $\text{rank}(H) \leq JP - J + 1$ 。

证明: 由基矩阵结构和构造过程可知, 基矩阵中每一行对应的循环置换矩阵的 P 行之和是长度为 LP 的全 1 向量, 而 H 中可以类似累加出的全 1 向量至少有 J 个, 因此 $\text{rank}(H) \leq JP - J + 1$, 得证。

4 满秩设计

上述构造出的校验矩阵 H 不满秩, 实际上, 通过循环置换矩阵构造的码字都存在这样的问题^[11-14]。为使 H 满秩, 常用的方法是设计掩蔽矩阵 M , M 和 $E(a_0, \dots, a_i, a_{i+1})$ 具有相同的维数, M 中的 0 元素对应的 H 中相应位置用 $P \times P$ 的全 0 阵替代, 其余不变。经此变换后得到的校验矩阵 H' 满秩, 且满足围长至少为 8。

定理 3: 掩蔽矩阵 M 满秩是 H' 满秩的必要条件。

证明: 假设 M 为非满秩矩阵, 不失一般性, 令 M 中第 i 行和第 j 行之和等于第 k 行。由 M 和 H' 的对应关系可知 H' 中第 $(i-1)P+1$ 行至第 iP 行、第 $(j-1)P+1$ 至 jP 行之和, 等于第 $(k-1)P+1$ 行至第 kP 行之和, H' 不满秩。因此, M 满秩是 H' 满秩的必要条件。得证。

依据定理 3 的设计规则, 掩蔽矩阵 M 的构造过程为:

步骤 1 构造二元满秩矩阵 $M'_{J \times L}$, J, L 值通常较小, 根据矩阵相关知识, $M'_{J \times L}$ 易于构造;

步骤 2 用 $M'_{J \times L}$ 对前文构造的校验矩阵进行掩蔽, 得到掩蔽后的校验矩阵;

步骤 3 利用高斯消元法判别掩蔽后的校验矩阵是否满秩, 若满秩, 则 $M'_{J \times L}$ 即为掩蔽矩阵 M 的一个可选矩阵, 否则, 跳至步骤 1 继续搜索。

至此, 基于所提出的基矩阵结构, 采用上述的基矩阵搜索算法和掩蔽矩阵设计方法, 可以构造出围长至少为 8 的满秩 QC-LDPC 码。

5 仿真结果

文献[12]提出了构造 QC-LDPC 码的一类经典框架, 文献[13]是在此框架下所提出的一类简单构造方法, 性能优异。文献[12-13]都是基于循环置换矩阵构造码字, 所提出的方法也是基于循环置换矩阵和掩蔽矩阵构造码字。本节对所提出的方法与文献[12-13]方法构造的围长均至少为 8 的码字的性能进行仿真比较。

例 1: 比较所提出的方法构造的 QC-LDPC 码字与文献[12]方法构造的 LDPC 码字的性能。前面的基矩阵设置为 $J=3, L=13$, 根据搜索算法得 $E(0, 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, 27, 28, 30, 31, 36)$, P 值为 81, 依据定理 3, 设计掩蔽矩阵 M :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

构造出围长至少为 8, 码长为 1053, 信息位长度为 810 的 QC-LDPC 码。采用文献[12]中构造的围长至少为 8, 码长 1053, 信息位长度为 812 的 LDPC 码。仿真条件设置为: 二相相移键控(BPSK)调制; 加性高斯白噪声(AWGN)信道; 蒙特卡罗仿真, 每个信噪比下错误码组数不低于 50 组; 置信传播译码算法^[15], 最大迭代次数 100 次。两种码字的性能比较如图 2 所示。

可以看出, 两种方法构造的码字均具有优异的译码性能, 所提出的方法构造的码字在性能上更优。在比特误码率(BER)为 10^{-6} 时, 相较于文献[12]构造的码字, 所提出的方法构造的码字的性能改善了约 0.2 dB。从前述分析可知, 文献[12]方法构造的码字不具有严格的准循环结构, 这会增加工程实现上的存储和编解码复杂度, 而所提出的方法构造的码字具有严格的准循环结构, 易于存储和编解码。

例 2: 比较所提出的方法构造的码字与文献[13]方法构造的码字的性能。设置 $J=5, L=10$ 。经计算, 文献[13]的基矩阵为 $E_{[13]}(0, 1, 10, 11, 23)$, 基矩阵为 $E(0, 1, 5, 6, 14, 19, 31, 36, 39, 60)$, P 值均为 241, 掩蔽矩阵 M 同文献[13]中的 $M(5, 10, 3)$ 。由此, 构造出两种围长至少为 8, 码长为 2410, 码率 1/2 的规则 QC-LDPC 码。仿真条件同上, 两种码字的性能比较如图 3 所示。

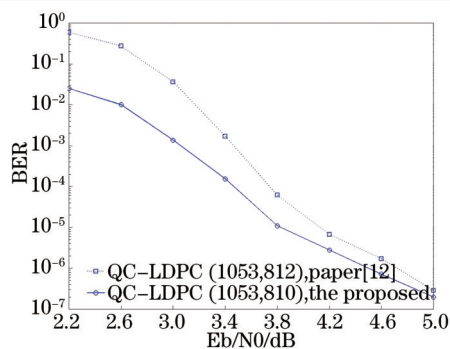


图2 所提出的方法与文献[12]方法性能比较

Fig.2 Performance comparison between the proposed method and the one of paper[12]

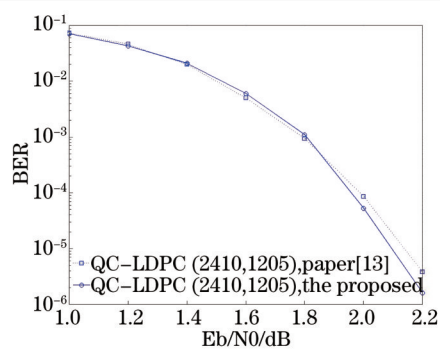


图3 所提出的方法与文献[13]方法性能比较

Fig.3 Performance comparison between the proposed method and the one of paper[13]

由图3可以看出,所提出方法构造的QC-LDPC码在性能上略优于文献[13]方法构造的码字。在信噪比为2.4 dB时,由于VC6.0环境下的仿真时间较长,两种码字均只仿真了 10^6 组,仿真结果如表3所示。

表3 $E_b/N_0=2.4$ dB时的性能

Table 3 Performance with $E_b/N_0=2.4$ dB

Method	Error codes number	Error bits number	BER
Paper [13]	1	1	8.3×10^{-10}
Proposed method	2	2	1.66×10^{-9}

图3和表3的数据显示:两种方法构造的码字的性能“瀑布区”仍有较大斜率,并未出现错误平层。为进一步验证所提出的方法构造的码字的性能,基于VC6.0环境,仿真了在信噪比为3.0 dB,码组数为 10^7 组时的译码性能,仿真结果为未出现译码错误,而此时的总接收数据为 2.41×10^{10} bits。可见,构造的LDPC码字符符合光通信系统中低错误平层的要求。由前述分析和比较可知,与文献[13]的方法相比,所提出的方法能搜索到更小的 P_{\min} 值,增加了码字的可选择性,且给出了具体的掩蔽矩阵设计规则,利于码字的构造和选取。

6 结论

提出了一种构造围长至少为8的满秩QC-LDPC码的方法,理论分析和蒙特卡罗仿真表明该类码字构造灵活、性能优异,且由于码字遵循严格的准循环特性,因此,易于存储和编解码,便于在光通信系统中实现。

参考文献

- 1 R G Gallager. Low-density parity-check codes[J]. IRE Transactions on Information Theory, 1962, 8(1): 21-28.
- 2 D J C MacKay, R M Neal. Near Shannon limit performance of low-density parity-check codes[J]. Electronics Letters, 1996, 33(6): 457-458.
- 3 Bi Wei, Xi Lixia, Zhang Xiaoguang, *et al.*. Performance enhancement of 100 Gb/s polarization division multiplexing differential quadrature phase shift keying optical communication system with π -rotation low-density parity-check codes[J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(1): 0105002.
毕伟, 席丽霞, 张晓光, 等. 用 π 旋转型低密度奇偶校验码提升100 Gb/s偏振复用差分正交相移键控光通信系统性能[J]. 中国激光, 2014, 41(1): 0105002.
- 4 Zhang Yequn, M Arabaci, I B Djordjevic. Evaluation of four-dimensional nonbinary LDPC-coded modulation for next-generation long-haul optical transport networks[J]. Opt Express, 2012, 20(8): 9296-9301.
- 5 Fu Jiaojiao, M Arabaci, I B Djordjevic, *et al.*. First experimental demonstration of nonbinary LDPC-coded modulation suitable for high-speed optical communications[C]. IEEE Optical Fiber Communication Conference and Exposition (OFC/NFOEC) and the National Fiber Optic Engineer Conference, 2011: 1-3.
- 6 Guo Dabo, Zhang Yanhuang, Wang Yunyan. Performance optimization for the reconciliation of Gaussian quantum key distribution [J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(1): 0127001.
郭大波, 张彦煌, 王云艳. 高斯量子密钥分发数据协调的性能优化[J]. 光学学报, 2014, 34(1): 0127001.
- 7 Leng Jiaofeng, Hao Shiqi, Lü Xuguang, *et al.*. Study on bit-symbol mapping method of MPPM and system performance based on low

- density parity check codes[J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(4): 0406001.
- 冷蛟锋, 郝士琦, 吕旭光, 等. 基于低密度奇偶校验码的 MPPM 比特符号映射及系统性能研究[J]. *光学学报*, 2012, 32(4): 0406001.
- 8 Consultative Committee for Space Data Systems. *Low Density Parity-Check Codes For Use in Near-Earth And Deep Space Applications*, 131.1-0-2 [R]. Reston: U.S.CCSDS, 2007: 23-30.
- 9 Li Chao, Zhang Wenbo, Zhang Xiaoguang, *et al.*. Performance enhancement of LDPC in 100 Gb/s PDM-DQPSK optical communication using a water-bit based on channel estimation[J]. *Chinese J Lasers*, 2014, 41(6): 0605007.
- 李 超, 张文博, 张晓光, 等. 基于水印位的信道估计对 100 Gb/s PDM-DQPSK 光通信系统中低密度奇偶校验码纠错性能的提升[J]. *中国激光*, 2014, 41(6): 0605007.
- 10 Han Guojun, Guan Yongliang, Kong Lingjun. Construction of irregular QC-LDPC codes via masking with ACE optimization[J]. *IEEE Commun. Letters*, 2014, 18(2): 348-351.
- 11 Yuan Jianguo, Wang Wang, Liang Tianyu. A novel construction method of QC-LDPC codes for high-speed long-haul optical communication systems[J]. *Journal of Optoelectronic·Laser*, 2012, 23(5): 906-909.
- 袁建国, 王 望, 梁天宇. 一种高速长距离光通信系统中 QC-LDPC 码的构造方法[J]. *光电子·激光*, 2012, 23(5): 906-909.
- 12 M P C Fossorier. Quasi-cyclic low-density parity-check codes from circulant permutation matrices[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(8): 1788-1793.
- 13 Zhang Guohua, Sun Rong, Wang Xinmei. Construction of girth-eight QC-LDPC codes from greatest common divisor[J]. *IEEE Communications Letters*, 2013, 17(2): 369-372.
- 14 Zhang Jianhua, Zhang Guohua. Deterministic girth-eight QC-LDPC codes with large column weight[J]. *IEEE Communications Letters*, 2014, 18(4): 656-659.
- 15 M P C Fossorier, M Mihaljevic, H Imai. Reduced complexity iterative decoding low density parity-check codes based on belief propagation [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1999, 47(5): 673-680.

栏目编辑: 韩 峰