

玻璃微珠散射光强的 Debye 理论分析及折射率测量

李水艳¹ 李大海¹ 赵霖文¹ 鄂可伟¹ 张 充¹ 郭东华³ 王琼华^{1,2}

¹ 四川大学电子信息学院, 四川 成都 610065
² 视觉合成图形图像技术国家重点学科实验室, 四川 成都 610065
³ 交通运输部公路科学研究院, 北京 100088

摘要 对单色平行光照明玻璃微珠产生的散射光强分布, 采用 Debye 理论对其分析时发现位于球形粒子左侧的探测器上接收到的 k 阶彩虹光强分布主要由衍射光、直接反射光和 k 次内反射光的相互叠加形成, 而位于球形粒子右侧的探测器上接收到的 k 阶彩虹光强分布主要是衍射光、直接透射光和 k 次内反射光的叠加形成; 当入射光波长一定时, 玻璃微珠的折射率大小将影响散射光强分布中的最小偏向角在探测器上的位置, 而玻璃微珠直径不影响最小偏向角位置, 但影响散射光强的周期。实验分析了折射率和半径对最小偏向角附近一次彩虹和二次彩虹散射光强分布的影响, 并与几何方法进行了比较, 结果与运用 Debye 理论数值模拟结果相吻合。这说明提出的假设具有合理性, 因此光经玻璃微珠散射形成的最小偏向角可用于其折射率的测量。

关键词 散射; Debye 理论; 玻璃微珠; 折射率; 一次彩虹; 二次彩虹

中图分类号 O436 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201441.s108010

Debye Theory Analysis of the Scattering Intensity and Refractive Index Measurement for Glass Beads

Li Shuiyan¹ Li Dahai¹ Zhao Jiwen¹ E Kewei¹ Zhang Chong¹

Guo Donghua³ Wang Qionghua^{1,2}

¹ School of Electronics and Information Engineering, Chengdu, Sichuan 610065, China
² State Key Laboratory of Fundamental Science on Synthetic Vision, Chengdu, Sichuan 610065, China
³ Research Institute of Highway Ministry of Transport, Beijing 100088, China

Abstract When investigating the scattering intensity distribution produced by a glass bead which is illuminated by a collimated beam with single length, Debye theory can be used to simulate and discuss the scattering properties. It is found that the intensity distribution of the k -order rainbow recorded by a detector which is on the left of a spherical particle is the superposition of the diffracted rays, the external reflected rays and the k time internal reflected rays primarily. The intensity distribution of the k -order rainbow on the right of the spherical particle is the superposition of the diffracted rays, the transmitting rays and the k time internal reflected rays mostly. When the wavelength of incident light is constant, the refractive index of the glass beads will change the degrees of the minimum deviation angle in the scattered light intensity distribution on the detector, and their diameters have no effect on the position of minimum deviation angle. Experimentally, the scattered intensity distribution of the first and the second rainbows of the glass beads with different refractive indices and radius are analyzed, and are compared with the geometrical method, which agrees with the result of simulation in Debye theory. This result shows that the proposed assumptions are reasonable, which can be used to measure the refractive index of the glass beads through testing the minimum deviation angle formed by the light scattering.

Key words scattering; Debye theory; glass beads; refractive index; the first rainbow; the second rainbow

OCIS codes 290.3030; 040.1880; 080.7343

收稿日期: 2014-01-10; 收到修改稿日期: 2014-02-24

基金项目: 道路逆反射材料国际标准研究(2012-318-223-030)

作者简介: 李水艳(1989—), 女, 硕士研究生, 主要从事波前检测方面的研究。E-mail: 987386804@qq.com

导师简介: 李大海(1968—), 男, 博士, 教授, 主要从事光学信息处理、波前传感、三维立体显示等方面的研究。

E-mail: lidahai@scu.edu.cn (通信联系人, 中国光学会员号: S04Om632)

本文电子版彩色效果请详见中国光学期刊网 www.opticsjournal.net

1 引 言

玻璃微珠是球形小玻璃珠的统称,高折射率玻璃微珠是制造回归反光新型光学材料的核心,在交通标志、反光材料等方面得到了广泛的应用,折射率是影响材料反光性能的主要参量。彩虹法是基于严格的散射理论测量玻璃微珠折射率,许多学者对其进行了深入研究^[1-3]。几何光学理论根据光的反射和折射定律解释了彩虹现象产生的原因,并给出了各阶彩虹角的计算方法^[4]。Mie 散射理论能够对散射现象给出精确的数学解^[5],包含了各种光波对散射场的贡献,但是无法具体表示散射的物理过程,如衍射、直接反射、直接透射和多次内反射。而 Debye 理论是在 Mie 散射理论基础上将散射系数表示成与非涅耳系数有关的无穷级数,因此展开式中的每一项具有明确的物理意义,可以单独分析每部分光线对散射光强分布的影响。Debye 级数中内反射次数趋于无穷时,与 Mie 理论结果是相同的,所以 Debye 理论也是散射光强分布的精确数学解。

Han 等^[6]模拟分析了几何光线和表面光波的相互作用,发现水珠一次彩虹的形成主要是表面光波、直接反射光波和一次内反射光波的叠加结果。Shen 等^[7]对 Debye 级数中粒子光波反射和透射系数的计算提出了新的算法,计算结果与 Mie 理论计算结果吻合。折射率和半径是影响彩虹光强分布的主要因素,薄健康等^[8]以艾里理论为基础对玻璃微珠折射率进行测量,发现半径的变化对最小偏向角的位置偏移量影响很小。

本文将散射系数用 Debye 级数表示,分析了衍射光、直接反射光、直接透射光和多次内反射出射光对 k 阶彩虹的影响,模拟分析了折射率为 1.6 的玻璃微珠一次彩虹和折射率为 2.0 的玻璃微珠二次彩虹形成原因,同时理论分析折射率和最小偏向角以及半径和最小偏向角的关系,并用实验进行了验证。因此,光经玻璃微珠散射形成的最小偏向角性质可用于其折射率的准确测量。

2 理论方法及对玻璃微珠彩虹现象的解释

2.1 理论方法

如图 1 所示,平行光入射到均匀球形粒子上,坐标面 $yo z$ 为过球形粒子中心的入射面, $z < 0$ 为球形粒子左侧区域, $z > 0$ 为球形粒子右侧区域。从几何光学角度分析,球形粒子散射光主要是由边缘光线

产生的表面光、直接反射光、直接透射光和 k 次内反射出射光组成^[9]。A 为光束 1 沿着球形粒子表面传播,然后出射到远场的衍射光。B 为光束 2 与球形粒子表面相互作用后直接反射的光线,C 为光束 2 经过球形粒子直接透射的光线,D 为光束 2 经过一次内反射后透射的光线,E 为光束 2 经过两次内反射后出射的光线。若利用边界条件的连续性,求解波动方程,可以获得粒子的散射场。由经典的 Mie 散射理论可知,散射强度函数是由散射角函数 π_m 、 τ_m 及散射系数 a_m 、 b_m 的无穷级数确定, m 为各类贝塞尔函数的阶数,散射系数在数学上为贝塞尔函数、Hankel 函数和连带 Legendre 函数的复杂组合,不能明确给出散射的物理解释。

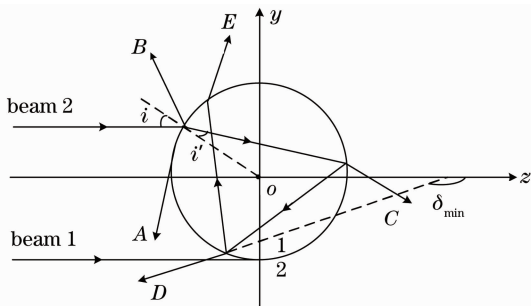


图 1 均匀球形粒子散射的 Debye 模型
Fig. 1 Debye model of uniform spherical particle scattering

Debye 理论将 Mie 散射系数中的每一项表示成由反射系数和透射系数组成的无穷级数,从而给出了散射现象的物理解释,其散射光强的表示也具有精确数学公式。从物理光学的角度,图 1 中的几种光波在粒子周围会发生干涉,实际可观察到彩虹现象。均匀球形粒子,可用 Debye 级数表示 Mie 散射系数得出几何理论和 Mie 散射理论的关系。将 Mie 散射系数 a_m 和 b_m 分别表示第 m 个磁波部分和电波部分,每一项以 Debye 级数的形式展开可表示为^[7]

$$\left. \begin{matrix} a_m \\ b_m \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(1 - R_m^{212} - \frac{T_m^{21} T_m^{12}}{1 - R_m^{121}} \right) = \frac{1}{2} \left[1 - R_m^{212} - \sum_{k=0}^{\infty} T_m^{21} (R_m^{121})^k T_m^{12} \right], \quad (1)$$

式中 R_m^{212} , R_m^{121} , T_m^{21} , T_m^{12} 为光线 2 与球形粒子表面相互作用的反射和透射系数。如图 1 所示,粒子内部区域 1 的折射率为 n ,粒子外部区域 2 设为空气,故折射率近似为 1。(1) 式中 k 为光经过球形粒子内表面的反射次数, $k=1$ 时为经过一次内反射后透射的光线如图 1 中出射光线 D, $k=2$ 时为经过两次内反射后出射的光线,对应图 1 中出射光线 E。光线

与球形粒子表面相互作用的反射和透射系数定义为

$$\begin{aligned}
 T_m^{21} &= -n \frac{2i}{D_m}, \\
 T_m^{12} &= -\frac{2i}{D_m}, \\
 R_m^{212} &= \frac{\alpha \xi'_m(z) \xi_m(nz) - \beta \xi_m(z) \xi'_m(nz)}{D_m}, \\
 R_m^{121} &= \frac{\alpha \phi'_m(z) \phi_m(nz) - \beta \phi_m(z) \phi'_m(nz)}{D_m}, \\
 D_m &= -\alpha \phi'_m(z) \xi_m(nz) + \beta \phi_m(z) \xi'_m(nz), \\
 \alpha &= \begin{cases} 1, & \text{TE wave} \\ n, & \text{TM wave} \end{cases}, \\
 \beta &= \begin{cases} n, & \text{TE wave} \\ 1, & \text{TM wave} \end{cases}, \quad (2)
 \end{aligned}$$

式中 D_m 是贝塞尔函数及其导数的关系式, ξ_m 和 ϕ_m 为不同类型的球贝塞尔函数, α, β 是其系数, TE 波是电场矢量垂直于散射面的横电波, TM 波是磁场矢量垂直于散射面的横磁波, 在计算散射光强分布时 α, β 取不同数值。(1)式中第一项 $1/2$ 是表面光波绕射形成的衍射项, 第二项 $-R_m^{212}/2$ 是光束经过球形粒子外表面直接反射回来的光波, 第三项是一个级数的无穷和, 级数中的每一项对应于直接透射光和经过 k 次内表面反射然后透射粒子光波总和, Debye 级数展开式可以计算单纯的每阶彩虹的强度分布。由(2)式可知, 散射光波的反射系数和透射系数由一系列贝塞尔函数及其导数表示, (1)式中内反射次数 k 趋于无穷时, 与 Mie 散射系数公式相同^[10], 如此 Debye 级数将 Mie 散射表示成了多个散射过程之和。

透明球形粒子的散射光沿着空间任意方向传播, 几何理论中, 散射光经历一次、两次或多次内表面反射时, 其散射角在一定范围内, 而且均存在极限角, 称之为最小偏向角, 如图 1 中 δ_{\min} 所示, 最小偏向角的大小只与内反射次数和球形粒子的折射率有关^[11]。在最小偏向角附近散射光线较为集中, 各光线的光程有所不同而引起相位差, 它们在最小偏向角附近相互干涉形成彩虹条纹^[4]。Debye 将散射系数表示成反射和透射系数, 从而解释了各阶彩虹形成的物理机制。

分析各阶彩虹形成的物理过程, 并与实际彩虹图的光强分布相比较时发现, 球形粒子左侧方向 ($z < 0$) 散射光中衍射光、直接反射光和 k 次内反射出射光的相互叠加是形成 k 阶彩虹的主要原因, 球形粒子右侧方向 ($z > 0$) 的各阶彩虹主要是衍射光、透射光和 k 次内反射出射光的叠加结果。因此, 对

在玻璃微珠左侧接收到的一次彩虹, 用 Debye 级数表示的 Mie 散射系数为

$$\begin{cases} a_m = \frac{1}{2} [1 - R_{mM}^{212} - T_{mM}^{21} (R_{mM}^{121}) T_{mM}^{12}] \\ b_m = \frac{1}{2} [1 - R_{mE}^{212} - T_{mE}^{21} (R_{mE}^{121}) T_{mE}^{12}] \end{cases}, \quad (3)$$

即一次彩虹的主要由衍射光、直接反射光、一次内反射出射光 ($k=1$) 形成, (3) 式中 M 代表横磁波, E 代表横电波。在玻璃微珠右侧接收到的二次彩虹, 将 Mie 散射系数用 Debye 级数展开表示为

$$\begin{cases} a_m = \frac{1}{2} [1 - T_{mM}^{21} T_{mM}^{12} - T_{mM}^{21} (R_{mM}^{121})^2 T_{mM}^{12}] \\ b_m = \frac{1}{2} [1 - T_{mE}^{21} T_{mE}^{12} - T_{mE}^{21} (R_{mE}^{121})^2 T_{mE}^{12}] \end{cases}, \quad (4)$$

即衍射光、直接透射光和二次内反射出射光 ($k=2$) 的叠加结果是形成玻璃微珠二次彩虹的主要原因。

由 Mie 散射理论可知, 散射光强 I 是由贝塞尔函数和 Legendre 函数组成, 只与球形粒子折射率 n 和半径 a 有关, 散射系数和散射角函数由一系列递推公式组成, 虽然难以从数学上直接发现折射率或半径变化对最小偏向角位置的影响, 但可以通过用大量数值计算分析的方法来得出散射光强的分布性质, 从而确定它们是如何影响散射光强最小偏向角位置的。模拟计算中, 分析在折射率为 1.5~1.7 的玻璃微珠左侧接收到的一次彩虹 ($k=1$), 和在折射率为 1.7~2.4 的玻璃微珠右侧接收到的二次彩虹 ($k=2$), 相邻折射率变化量都为 0.001, 该增量满足得到稳定的散射光强分布要求。

2.2 相同半径下, 各种折射率散射光强分布的模拟

2.2.1 玻璃微珠一次彩虹散射光强的数值模拟

图 2(a) 是 Debye 理论模拟的折射率为 1.6 的玻璃微珠一次彩虹散射光强分布, 散射系数由(3)式表示, 为与实验结果相比较, 模拟条件是: 玻璃微珠半径 $a = 22.085 \mu\text{m}$, 入射光波长 $\lambda = 0.532 \mu\text{m}$, 玻璃微珠到接收屏的距离 $l = 97.15 \text{ mm}$ 。

散射角在 165° 左右散射光强有十分明显的突变, 如图 2(a) 中红色竖线所示之处, 为最小偏向角的位置。图 2(b) 是折射率为 1.5~1.7 的玻璃微珠一次彩虹散射光强模拟结果, 横轴是散射角分布, 纵轴是折射率分布, 假彩色是取了对数的光强值。几何方法得到的折射率和最小偏向角关系由图 2(b) 中黑色曲线表示, 标记“○”是实验结果。图 2(a) 中折射率为 1.6 的玻璃微珠一次彩虹光强分布对应 (b) 中折射率为 1.6 的横截面, 最小偏向角的位置在 (b) 中用方框“□”表示。此外, 从图 2(b) 中还可以

明显看出,折射率大小影响最小偏向角的位置,折射率增加,玻璃微珠一次彩虹最小偏向角增大,同时彩

虹环的亮度增加。

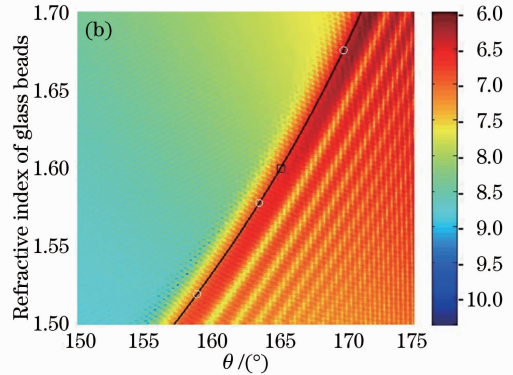
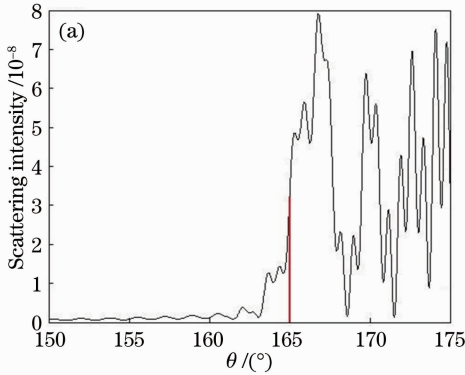


图2 Debye级数模拟玻璃微珠一次彩虹强度分布。(a)折射率为1.6;(b)多种折射率
Fig. 2 The first rainbow intensity distributions of glass beads simulated by using Debye theory.

(a) Refractive index $n=1.6$; (b) different refractive indices

2.2.2 玻璃微珠二次彩虹散射光强的数值模拟

图3(a)是Debye理论模拟的折射率为2.0的玻璃微珠二次彩虹散射光强分布,散射系数由(4)式表示,模拟条件是: $a=27.167\ \mu\text{m}$, $\lambda=0.6328\ \mu\text{m}$, $l=43.18\ \text{mm}$ 。由于高折射率玻璃微珠二次彩虹附近有多条细纹,称之为精细结构^[1],取二次彩虹条纹的最外环作为最小偏向角的位置,如图3(a)中红色竖线所示之处,散射角约为 324.5° 。图3(b)是折

率为1.7~2.4的玻璃微珠二次彩虹散射光强模拟结果,同样的,横轴是散射角分布,纵轴是折射率分布,假彩色是取了对数的光强值。图3(a)中折射率为2.0的玻璃微珠二次彩虹光强分布对应(b)中折射率为2.0的横截面,最小偏向角的位置在(b)中用方框“□”表示,并且在(b)中几何法得到的最小偏向角变化曲线上。

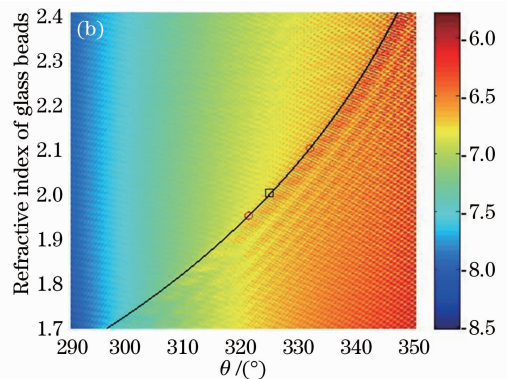
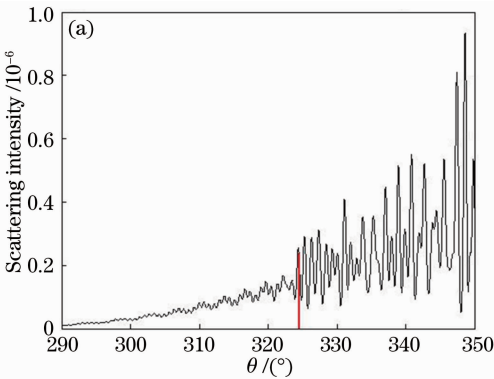


图3 Debye级数模拟玻璃微珠二次彩虹强度分布。(a)折射率为2.0;(b)多种折射率
Fig. 3 The second rainbow intensity distributions of glass beads simulated by using Debye theory.

(a) Refractive index $n=2.0$; (b) different refractive indices

2.3 折射率相同,各种半径散射光强分布的模拟

分别统计分析了折射率一定半径为 $250\sim 400\ \mu\text{m}$ 的玻璃微珠一次彩虹散射光强分布和半径为 $20\sim 100\ \mu\text{m}$ 的玻璃微珠二次彩虹光强分布。模拟和实验条件分别是: $n=1.53$, $\lambda=0.532\ \mu\text{m}$, $l=97.15\ \text{mm}$; $n=2.14$, $\lambda=0.6328\ \mu\text{m}$, $l=72.18\ \text{mm}$ 。

图4(a)是相同折射率不同半径的玻璃微珠一次彩虹散射光强分布,横坐标是散射角,纵坐标是玻璃微珠半径分布,间隔取为 $1\ \mu\text{m}$,假彩色是散射光强值

取对数的结果。对折射率为1.53的玻璃微珠,模拟时取半径为 $250, 270, 290, 310, 330, 350, 370, 390\ \mu\text{m}$ 进行分析,彩虹环光强下降较明显处为最小偏向角的位置。由图4(a)的模拟结果发现,半径虽然不同,但最小偏向角都为 159.5° ,由图4(a)中带“□”的直线表示。图4(b)是折射率为2.14的玻璃微珠二次彩虹散射光强分布,经过模拟分析可知,散射光强值取对数时,最小偏向角附近光强对比度减小,为使结果更加明显,假彩色直接是散射光强值。半径取为

20、30、40、50、60、70、80、90、100 μm ，以二次彩虹最外环作为最小偏向角位置，得到最小偏向角都为 334° 。从图 4(a)、(b) 也可以看出散射光强随半径增大而增大，各阶彩虹散射光强周期减小。由此可

知，半径不影响最小偏向角的位置，但通过模拟计算可知，半径 a 是各阶贝塞尔函数的主要参量，其计算速度随着粒子尺度的增大而明显减低。

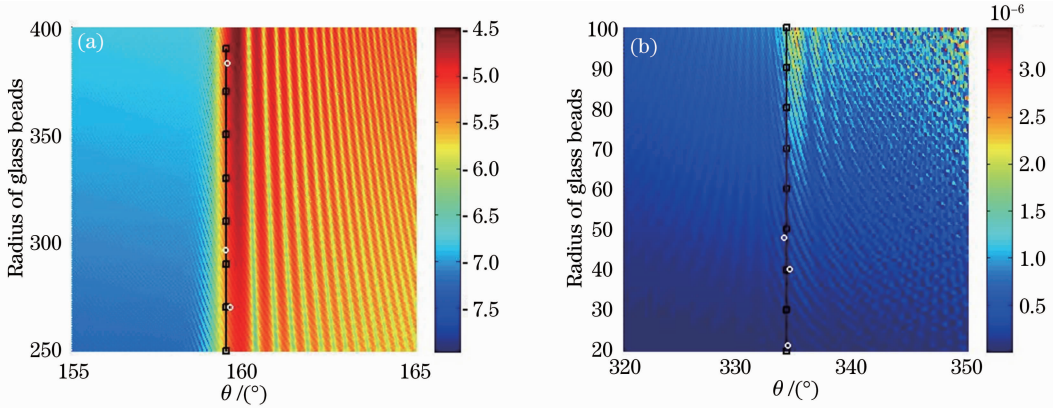


图 4 玻璃微珠不同半径散射光强分布。(a) 一次彩虹；(b) 二次彩虹

Fig. 4 Intensity distributions for different radius of glass beads. (a) The first rainbow; (b) the second rainbow

3 实验研究

实验中，采用聚焦的激光光束照射到玻璃微珠，由于玻璃微珠粒径较小，可看成是平行光入射，用像素为 $576 \text{ pixel} \times 768 \text{ pixel}$ 的 CCD 采集图像，然后用“玻璃微珠性能分析软件”分析^[12]。由于激光在玻璃微珠上直接透射部分在接收屏上会产生很强的散射，会影响二次彩虹条纹图的观察，故在接收屏中心放一个吸光物体。测量彩虹图最外环边缘直径，通过公式 $\theta = \arctan(r/l)$ 求出射角度，经过换算求得最小偏向角的大小，其中 r 是测得的彩虹最外环边缘半径， l 是玻璃微珠到接收屏的距离。

图 5(a) 中二次彩虹是相对于入射光的方向对称的明亮相间的圆环，中心光强最大，光强从里到外逐渐变弱，在最小偏向角之前有条暗环，在最小偏向角处光强突然变强，出现 4 条明暗相间的亮纹，这几条

亮纹即是二次彩虹的精细结构。图 5(b) 是图 5(a) 中划线处光强分布，横坐标是光强分布，以灰度值的形式表示，横坐标是像素值，长方形内是二次彩虹精细结构分布，经验上以最小偏向角精细结构的最外环作为最小偏向角的位置，最外环的直径为 69.388 mm ，计算所得的散射角为 321.22° 。图 5(c) 是 Debye 理论模拟结果，散射系数用(1)式中的衍射部分、直接透射部分和二次内反射出射部分表示，模拟条件与实验条件相同为 $n = 1.95$ ， $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ ， $l = 43.18 \text{ mm}$ 。图 5(b)、(c) 中长方形内二次彩虹散射光强分布相同，由此可见，实验和模拟的散射光强分布是吻合的。

实验分析折射率变化对彩虹光强分布的影响时，记录低折射率玻璃微珠的一次彩虹和高折射率玻璃微珠的二次彩虹最外环直径，表 1 是计算得到的折射率和最小偏向角的值。低折射率玻璃微珠分

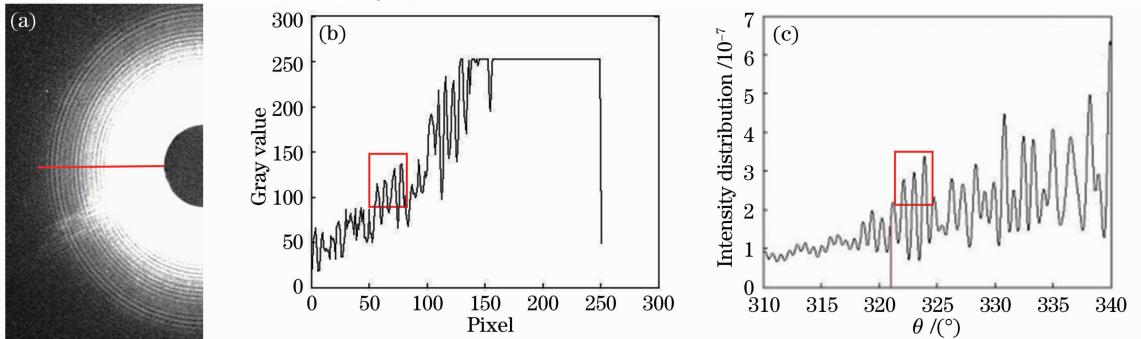


图 5 (a) 实验拍摄到的玻璃微珠二次彩虹条纹；(b) 图(a)中划线处光强分布；(c) Debye 理论模拟结果图

Fig. 5 (a) Secondary rainbow fringe pattern received by CCD; (b) intensity distribution along the outline in Fig. (a); (c) scattering intensity distribution calculated by Debye theory

别取 10 个,对每种玻璃微珠一次彩虹最外环的直径测量 10 组;高折射率玻璃微珠分别取 20 个,对每种玻璃微珠二次彩虹最外环直径分别测量 50 组。表 1 中半径是平均值,折射率和最小偏向角也是由最外环直径的平均值计算所得。图 2(b)上白色标记“○”和图 3(b)上红色标记“○”为实验结果,它们都在模拟的最小偏向角变化曲线上,所以实验结果与模拟结果是相符合的,同时与几何法相比较相差不大,也验证了折射率增加,最小偏向角增大的结论。

表 1 不同折射率对最小偏向角的影响

Table 1 Effects of the different refractive indices on the minimum deviation angle

	Radius / μm	Refractive index	Minimum deviation angle /($^{\circ}$)
The first rainbow	22.085	1.520	158.87
		1.570	163.49
		1.675	169.75
The second rainbow	27.167	1.950	320.95
		1.949	320.89
		2.099	331.56

表 2 半径变化对最小偏向角的影响

Table 2 Effects of the different radius on the minimum deviation angle

	Refractive index	Radius / μm	Minimum deviation angle /($^{\circ}$)
The first rainbow	1.527	270.0	159.62
		296.9	159.49
		383.3	159.52
The second rainbow	2.144	21.2	334.33
		40.1	334.50
		48.025	334.02

4 结 论

Debye 理论是分析球形粒子散射现象的重要理论,它有可以单独分析各阶彩虹产生的原因及散射光强分布的独特优点,用 Debye 级数展开的方法分别分析了球形粒子左侧($z < 0$)探测器上接收到的 k 阶彩虹,发现它主要是由衍射光、直接反射光和 k 次内反射出射光的叠加形成,球形粒子右侧($z > 0$)探测器上接收到的 k 阶彩虹强度分布主要是衍射光、直接透射光和 k 次内反射出射光的叠加结果,并通过模拟和实验分析低折射率玻璃微珠一次彩虹和高折射率玻璃微珠二次彩虹验证了此结论。通过分析发现折射率增加,散射光强分布中的最小偏向角增大。玻璃微珠半径不影响最小偏向角的位置,但半径增加,散射光强周期减小。利用 Debye 强度分布信息可以更有效、更全面地反映均匀球形粒子的散

射特性,从而为彩虹技术在折射率测量中的应用提供良好的理论模拟工具。

参 考 文 献

- Huang Fuquan, Lu Shanying, Wang Shaomin. The refractive index measurement of high refractive index glass beads[J]. Acta Photonica Sinica, 2001, 36(6): 753-756.
- 黄富全, 卢山鹰, 王少明. 高折射率玻璃微珠折射率的测量[J]. 光子学报, 2001, 36(6): 753-756.
- Yang Hongkun, Li Dahai, Zhou Xin, et al.. The refractive index measurement of high refractive index glass beads[J]. Laser Journal, 2006, 27(2): 52-53.
- 杨宏坤, 李大海, 周 昕, 等. 二次彩虹法高折射率玻璃微珠的折射率测量研究[J]. 激光杂志, 2006, 27(2): 52-53.
- Liu Jing, Li Dahai. Study on refractive index measurement of high refractive index glass beads by secondary rainbow method[J]. Acta Photonica Sinica, 2007, 36(12): 2307-2310.
- 刘 静, 李大海. 二次彩虹法测量高折射率玻璃微珠折射率研究[J]. 光子学报, 2007, 36(12): 2307-2310.
- Jearl D Walker. Multiple rainbows from single drops of water and

- other liquids[J]. *Am J Phys*, 1976, 44(5): 421–433.
- 5 Ru T Wang, H C van de Hulst. Rainbows: Mie computations and the Airy approximation[J]. *Appl Opt*, 1991, 30(1): 106–108.
- 6 X Han, K F Ren, L Mees, *et al.*. Surface waves/geometrical rays interferences: numerical and experimental behaviour at rainbow angles[J]. *Opt Commun*, 2001, 195(1): 49–54.
- 7 Jianqi Shen, Huarui Wang. Calculation of Debye series expansion of light scattering[J]. *Appl Opt*, 2010, 49(13): 2422–2427.
- 8 Bo Jiankang, Li Dahai, Guo Donghua. Relationship between size and refractive index of the high refractive glass beads[J]. *Optics & Optoelectronic Technology*, 2011, 9(6): 45–48.
薄健康, 李大海, 郭东华, 等. 高折射玻璃微珠粒径与折射率关系的研究[J]. *光学与光电技术*, 2011, 9(6): 45–48.
- 9 Edward A Hovenac, James A Lock. Assessing the contributions of surface waves and complex rays to far-field Mie scattering by use of the Debye series[J]. *Opt Soc Am*, 1992, 9(5): 781–795.
- 10 Shi Lijuan, Han Xiang'e, Li Renxian. Debye series of Gaussian beam scattering by a multi-layered sphere [J]. *Acta Optical Sinica*, 2007, 27(8): 1513–1518.
施丽娟, 韩香娥, 李仁先. 多层球对高斯波束散射的德拜级数研究[J]. *光学学报*, 2007, 27(8): 1513–1518.
- 11 Hiroyuki Hattori, Hirotugu Yamanaka, Hendrik Kurniawan, *et al.*. Using minimum deviation of a secondary rainbow and its application to water analysis in a high-precision, refractive-index comparator for liquids[J]. *Appl Opt*, 1997, 36(22): 5552–5556.
- 12 Lü Hu. Characteristics Study and Index Measurement System Design of High Refractive Index Glass Beads [D]. Chengdu: Sichuan University, 2012. 22–35.
吕 虎. 高折射率玻璃微珠特性研究及折射率测量系统的研制 [D]. 成都: 四川大学, 2012. 22–35.

栏目编辑: 史 敏