

# 基于分段随机扰动幅值的随机并行梯度下降算法研究

吴 健<sup>1</sup> 杨慧珍<sup>2</sup> 龚成龙<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> 中国矿业大学信息与电气工程学院, 江苏 徐州 221116)

(<sup>2</sup> 淮海工学院电子工程学院, 江苏 连云港 222005)

**摘要** 为了提高随机并行梯度下降(SPGD)算法的收敛速度,提出了分段随机扰动幅值的改进方法。从理论上分析了固定增益系数时,随机扰动幅值对 SPGD 算法收敛速度的影响;提出了分段随机扰动幅值的改进方法;基于 61 单元变形镜,建立无波前探测自适应光学系统模型,对前 65 阶 Zernike 多项式模拟的满足 Kolmogorov 谱的大气湍流畸变波前进行校正。结果表明,采用分段随机扰动幅值的 SPGD 算法比固定最佳随机扰动幅值时传统 SPGD 算法的收敛速度提高了近 1.6 倍,证明了该改进算法的可行性。

**关键词** 自适应光学;波前校正;随机并行梯度下降;分段随机扰动幅值

**中图分类号** TP273.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201441.0712001

## Research of Stochastic Parallel Gradient Descent Algorithm Based on Segmentation Random Disturbance Amplitude

Wu Jian<sup>1</sup> Yang Huizhen<sup>2</sup> Gong Chenglong<sup>2</sup>

<sup>1</sup> School of Information and Electrical Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou, Jiangsu 221116, China

<sup>2</sup> School of Electronic Engineering, Huaihai Institute of Technology, Lianyungang, Jiangsu 222005, China

**Abstract** The improved method of random perturbation amplitude section is proposed to increase the convergence speed of stochastic parallel gradient descent (SPGD) algorithm. The SPGD algorithm convergence rate, which can be effected by the random disturbance amplitude, is analyzed when the gain coefficient is fixed. The segmentation random perturbation amplitude method is put forward. The adaptive optics system without wavefront sensor is built with a 61-element deformation mirror to correct the wavefront aberrations, which is simulated by the 65-order Zernike polynomials and the aberrations meet the Kolmogorov spectrum. Compared with the best fixed initial perturbation amplitude SPGD algorithm, the convergence speed increases 1.6 times by adopting the SPGD algorithm based on the segmentation random perturbation amplitude. The improved algorithm is verified to be feasible.

**Key words** adaptive optics; wavefront correction; stochastic parallel gradient descent; segmentation random perturbation amplitude

**OCIS codes** 220.1000; 220.1080; 300.6170

## 1 引言

目前自适应光学(AO)系统大都采用波前传感器对畸变波前实时探测并重构,再通过波前校正器校正畸变波前<sup>[1]</sup>。与常规自适应光学技术相比,无波前探测自适应光学技术<sup>[2]</sup>具有结构简单、不

需进行波前测量和重构的特点,成为近期研究热点<sup>[3-4]</sup>。其中基于随机并行梯度下降(SPGD)算法<sup>[5]</sup>的无波前探测自适应光学技术具有较大的应用潜力。但由于该算法对变形镜控制器驱动电压自动寻优时采用了迭代的方式,因而传统的 SPGD 算法

收稿日期: 2013-12-02; 收到修改稿日期: 2014-01-28

基金项目: 中国科学院自适应光学重点实验室基金(LAOF201302)

作者简介: 吴 健(1990—),男,硕士研究生,主要从事自适应光学技术方面的研究。E-mail: 644323991@qq.com

导师简介: 龚成龙(1964—),男,硕士,教授,主要从事控制科学与工程等方面的研究。E-mail: GongCL126@126.com

收敛速度较慢,当校正单元数增加时,速度慢显得尤为突出。

先前对 SPGD 算法的研究大致可以分为三个方面:1)从控制器处理机出发,进行电路优化设计,其主要有基于 SPGD 控制算法的单指令多数据流(SMD)结构实时并行处理机的研究<sup>[6]</sup>;2)从变形镜单元数出发,采用单元数少的变形镜进行较大畸变波前的校正,逐级增加变形镜单元数进行畸变校正,最终达到所需要的校正精度<sup>[7]</sup>;3)从算法本身的主要影响因素增益系数和随机扰动幅值出发,增益系数固定时,随机扰动幅值存在最优取值范围,反之,增益系数存在最优取值范围。

之前,人们主要的研究重心放在固定随机扰动幅值上,通过改变增益系数来提高算法的收敛速度,如自适应增益<sup>[8]</sup>、分段增益<sup>[9]</sup>。目前,尚未对变化的随机扰动幅值进行深入的研究。在前人研究的基础上,本文初步提出了分段随机扰动幅值的 SPGD 算法,即在增益系数固定的前提下,迭代过程中随着迭代次数的变化对随机扰动幅值按一定的规则进行调整。迭代前期,采用较大的随机扰动幅值来提高算法的收敛速度,迭代后期,采用较小的扰动幅值来提高算法的收敛精度。首先从理论上说明该改进方法的可行性,然后基于 61 单元变形镜,建立无波前探测自适应光学系统仿真模型,验证所提出方法的可靠性。

## 2 随机并行梯度下降算法

### 2.1 随机并行梯度下降算法基本原理

SPGD 算法是一种迭代算法,通过优化性能指标[取斯特雷尔比(SR,  $R_s$ )],实现变形镜驱动电压控制。性能指标的变化量表示为

$$\delta R_s = R_{s+}(n) - R_{s-}(n), \quad (1)$$

式中,

$$R_{s+}(n) = R_s[u(n) + \delta u(n)], \quad (2)$$

$$R_{s-}(n) = R_s[u(n) - \delta u(n)], \quad (3)$$

式中  $\delta u(n) = \{\delta u_1(n), \delta u_2(n), \dots, \delta u_k(n)\}$  为每次迭代时,随机生成电压扰动向量, $k$  为驱动器个数, $n$  为迭代次数,其满足伯努利分布,即幅值的绝对值相等、概率相等。

第  $n$  次迭代,变形镜驱动器的控制电压更新为

$$u(n+1) = u(n) + \gamma \delta R_s(n) \delta u(n), \quad (4)$$

式中  $\gamma$  为增益系数。实际应用中,若目标函数向极大化方向优化, $\gamma$  为正值;反之取负值。

利用  $\delta R_s$  与控制参数  $\delta u$  的变化量对控制参数进行梯度估计,以迭代方式在梯度下降方向上进行

最优的电压向量  $u(r)$  寻找,使得残余波前最小,系统性能达到最优。

### 2.2 基于分段随机扰动幅值的随机并行梯度下降算法

根据文献[4],当增益系数固定时, $R_s$  的收敛速度随着随机扰动幅值的变化而变化。校正初期,畸变较大,采用较大的随机扰动幅值实现对畸变波前的快速校正;校正后期,采用较小的随机扰动幅值来获得较高的校正精度。

鉴于此特点,提出了分段随机扰动幅值的方法,即在校正过程中不断地改变随机扰动幅值,以获得性能指标  $R_s$  较快的收敛速度和较高的校正精度。校正过程中,假设总的迭代次数为  $N$ (由大量的实验仿真分析可知, $D/r_0$  分别为 5, 10, 15 时,迭代 1000, 2000, 5000 次,即可实现  $R_s$  的完全收敛),将随机扰动幅值分为  $L$  段( $L$  可取  $1/c$  中的任何整数值, $c$  为系数  $b$  变化间隔,文中分别取 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2,  $b$  为影响系数,即  $b = 1 - L \times c$ )。算法每迭代  $N/L$  次,随机扰动幅值即为初始随机扰动幅值与按间隔值递减的系数  $b$  之积,即

$$A = B \times b, \quad (5)$$

式中  $A$  为随机扰动幅值, $B$  为初始随机扰动幅值。

根据经验和前人的研究,文中选取固定的增益系数  $\gamma$  为 0.85,初始随机扰动幅值为 0.42,初始系数  $b$  为 1。分段随机扰动幅值的 SPGD 算法实现流程如图 1 所示。

### 2.3 自适应光学系统仿真模型

SPGD 算法中控制参数为变形镜驱动器控制电压,其表达式为

$$u(r) = \sum_{j=1}^N u_j S_j(r), \quad (6)$$

式中  $N$  为变形镜驱动器个数,取 61; $u_j$  为第  $j$  个驱动器的驱动电压; $S_j(r)$  为第  $j$  个驱动器的影响函数,服从高斯分布<sup>[10]</sup>:

$$S_j(x, y) = \exp \left\{ \ln P \left\{ \frac{\sqrt{[x - x_c(j)]^2 + [y - y_c(j)]^2}}{r_d} \right\}^\alpha \right\}, \quad (7)$$

式中  $P$  为驱动器交连值, $r_d$  为驱动器间距, $\alpha$  为高斯指数, $[x_c(j), y_c(j)]$  为第  $j$  个驱动器的位置。驱动器间距归一化后  $r_d = 0.383$ ,驱动器间交连值  $P = 0.08$ ,高斯指数  $\alpha = 2$ <sup>[11]</sup>。

61 单元变形镜的驱动器位置排布如图 2 所示。无波前探测自适应光学系统仿真模型如图 3 所示。

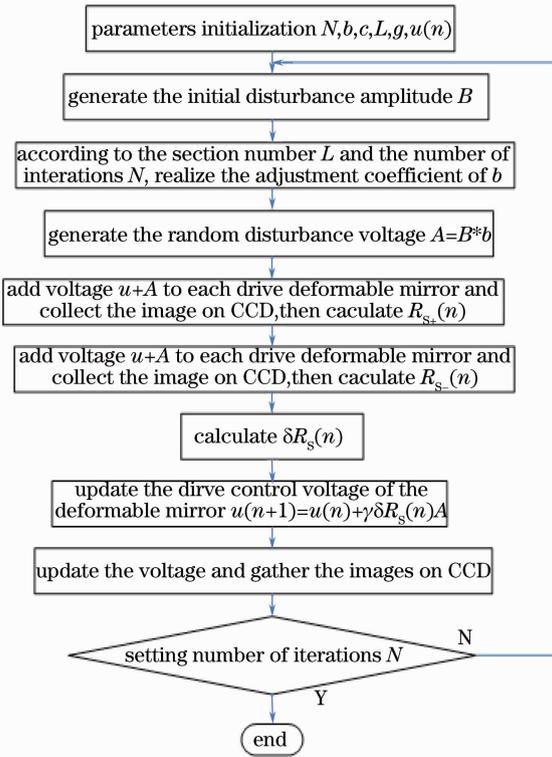


图 1 流程图

Fig. 1 Flow diagram



图 2 变形镜驱动器位置排布图

Fig. 2 Location of deformable mirror actuator

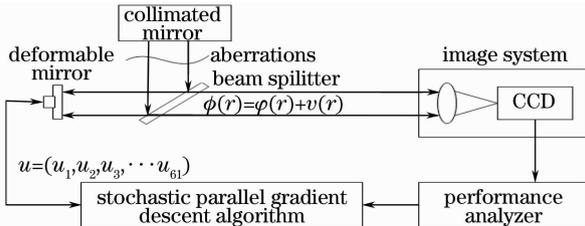


图 3 无波前探测自适应光学系统仿真模型

Fig. 3 Simulation model of adaptive optics system without wavefront sensor

### 3 数值仿真结果分析比较

实验中利用 Roddier 提出的方法,采用满足 Kolmogorov 谱的前 65 阶 Zernike 多项式模拟  $D/r_0$  分别为 5, 10, 15 的大气湍流畸变波前<sup>[12]</sup>, 其中,  $D$

为观测望远镜通光口径,  $r_0$  为大气相干时间常数。  $D/r_0$  越大, 则大气湍流畸变越严重。为了能够使仿真数据具有统计特性, 分别随机取  $D/r_0$  不同值时的 20 帧大气湍流畸变波前, 采用分段随机扰动幅值的 SPGD 算法校正, 并对仿真结果各参数分别取算数统计平均做进一步分析。

#### 3.1 $D/r_0 = 5$ 时大气湍流畸变波前校正分析

间隔  $c$  取值越小, 所能分段数  $L$  越多。取间隔  $c$  为 0.2 时, 最多的分段数为 5 段, 此时分段数  $L$  可以取 0~5 以内的任何整数, 对分段数  $L$  为 2, 3, 4, 5 时分别进行了仿真。同理, 间隔  $c$  为 0.1 时, 取分段数  $L$  为 3, 5, 7, 10; 间隔  $c$  为 0.05 时, 取分段数  $L$  为 4, 8, 12, 16, 20; 间隔  $c$  为 0.02 时, 取分段数  $L$  为 10, 20, 30, 40, 50; 间隔  $c$  为 0.01 时, 取分段数  $L$  为 20, 40, 60, 80, 100, 对其分别进行校正。为了能够更为直观地查看校正结果, 对横坐标分段数  $L$  进行坐标变化, 即将横坐标按比例地进行相应的放大和缩小。  $c$  为 0.01, 0.02, 0.05 时横坐标分段数  $L$  分别除以 10, 5, 2; 间隔  $c$  为 0.2 时, 横坐标分段数  $L$  乘以 2。平均初始  $R_s$  值、峰谷值 (PV,  $d_{PV}$ ) 值和均方根 (RMS,  $d_{RMS}$ ) 值分别为 0.34, 6.23 rad 和 1.07 rad。分段数  $L$  与  $R_s$  达 0.8 时迭代次数关系如图 4 所示。图 4 中, 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2 为  $c$ , 即系数  $b$  变化间隔。

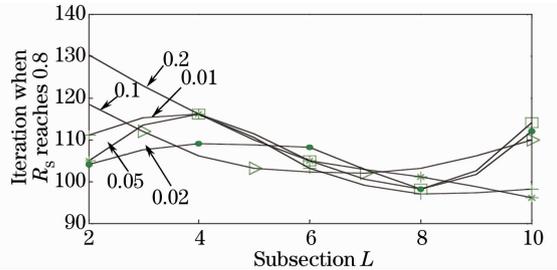

 图 4 分段数  $L$  与  $R_s$  达 0.8 迭代次数关系

 Fig. 4 Relationship between segments  $L$  and iterations when  $R_s$  reaches 0.8

由图 4 可知, 5 条曲线的  $R_s$  达 0.8 时, 最后都在横坐标即分段数为 8 处所需要的迭代次数最少。因此可以初步得到以下结论: 在固定增益系数为 0.85, 初始随机扰动幅值为 0.42, 初始系数  $b$  为 1, 最多分段数为  $1/c$  前提下, 最佳分段数  $L$  取最多分段数的  $4/5$  处的整数取值, 即

$$L = 4 / (5 \times c). \quad (8)$$

同时, 根据图 4 间隔  $c$  不同的取值可以看出, 在最佳分段数  $L$  处,  $R_s$  达 0.8 时所需要的迭代次数基本一致。因此, 不需要对间隔  $c$  进行更小取值, 反而

会增加算法的复杂性。下文将在固定增益系数为 0.85, 初始随机扰动幅值为 0.42, 初始系数  $b$  为 1 的前提下, 对间隔  $c$  为 0.01, 最佳分段数  $L$  为 80 时的分段随机扰动幅值的 SPGD 算法进行详细分析。

采用分段随机扰动幅值的 SPGD 算法与固定最佳随机扰动幅值(文中取 0.2)时的传统 SPGD 算法校正后的  $R_s$  收敛曲线比较结果如图 5 所示。校正后最终  $R_s$  的收敛值,  $d_{PV}$  值,  $d_{RMS}$  值和  $R_s$  达 0.8 时迭代次数见表 1。

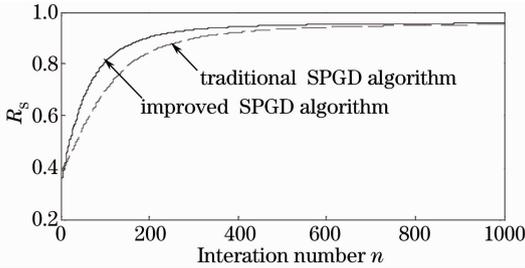


图 5  $R_s$  收敛曲线比较

Fig. 5 Comparison of  $R_s$  convergence curves

表 1 改进 SPGD 算法校正后相关参数比较

Table 1 Parameters of the improved SPGD algorithm

	$R_s$	$d_{PV}/$ rad	$d_{RMS}/$ rad	Iteration when $R_s$ reaches 0.8
Improved SPGD	0.96	3.06	0.33	97
Traditional SPGD	0.95	2.98	0.30	157

由图 5 和表 1 可知, 采用分段随机扰动幅值的 SPGD 算法比固定最佳随机扰动幅值的传统 SPGD 算法, 其  $R_s$  达 0.8 时所需要的迭代次数提高了近 1.6 倍。

### 3.2 $D/r_0 = 5$ 时最佳初始随机扰动幅值选取分析

仿真中分别取初始随机扰动幅值为 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 采用分段随机扰动幅值的 SPGD 算法校正后的性能指标  $R_s$  收敛曲线如图 6 所示。

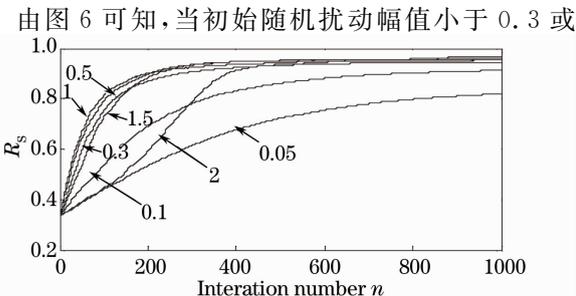


图 6  $R_s$  收敛曲线

Fig. 6  $R_s$  convergence curves

大于 1.5 时性能指标  $R_s$  的收敛性均会变差。因此可以初步得出, 在固定增益系数为 0.85, 初始系数  $b$  为 1 的前提下, 对间隔  $c$  为 0.01, 最佳分段数  $L$  为 80 时的分段随机扰动幅值的 SPGD 算法, 其初始扰动幅值的最佳取值区间为 0.3~1.5, 也进一步验证了上文中所选取初始随机扰动幅值 0.42 的正确性。

### 3.3 $D/r_0 = 10, 15$ 时大气湍流畸变波前校正分析

为了进一步验证分段随机扰动幅值的 SPGD 算法的可行性, 分别随机取 20 帧  $D/r_0 = 10$  和 15 时大气湍流畸变波前, 采用分段随机扰动幅值的 SPGD 算法进行校正。

$D/r_0 = 10$  时, 平均初始  $R_s$  值,  $d_{PV}$  值和  $d_{RMS}$  值分别为 0.13, 1.96 rad 和 10.85 rad。采用分段随机扰动幅值的 SPGD 算法校正后的性能指标  $R_s$  收敛曲线如图 7 所示。由于此时的湍流畸变波前较严重, 采用系统的性能评价函数值从初态改善到初态与稳态之间的 80% 处所经历的迭代步数<sup>[13]</sup> 进行比较。鉴于此, 文中选取  $R_s$  达 0.47 时迭代次数, 校正后最终  $R_s$  的收敛值,  $d_{PV}$  值,  $d_{RMS}$  值和  $R_s$  达到 0.47 时迭代次数见表 2。

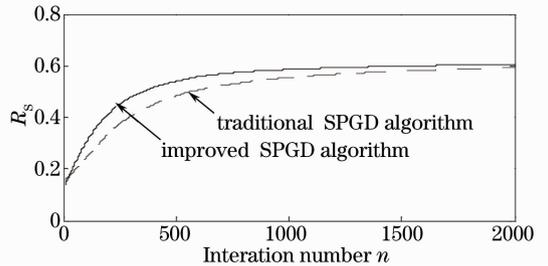


图 7  $D/r_0 = 10$  时  $R_s$  收敛曲线

Fig. 7  $R_s$  convergence curves when  $D/r_0 = 10$

表 2  $D/r_0 = 10$  时改进 SPGD 算法校正后相关参数

Table 2 Parameters of the improved SPGD algorithm

when  $D/r_0 = 10$

	$R_s$	$d_{PV}/$ rad	$d_{RMS}/$ rad	Iteration when $R_s$ reaches 0.47
Improved SPGD	0.60	10.11	1.88	286
Traditional SPGD	0.59	10.21	1.89	458

$D/r_0 = 15$  时, 平均初始  $R_s$  值,  $d_{PV}$  值和  $d_{RMS}$  值分别为 0.059, 19.04 rad 和 3.30 rad。采用分段随机扰动幅值的 SPGD 算法校正后的性能指标  $R_s$  收敛曲线比较如图 8 所示。文中选取  $R_s$  达 0.27 时迭代次数, 校正后最终  $R_s$  的收敛值,  $d_{PV}$  值,  $d_{RMS}$  值和  $R_s$  达到 0.27 时迭代次数见表 3。

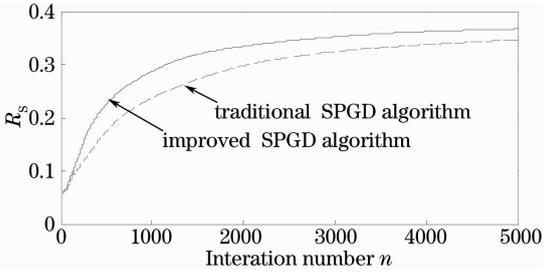

 图 8  $D/r_0 = 15$  时  $R_s$  收敛曲线

 Fig. 8  $R_s$  convergence curves when  $D/r_0 = 15$ 

 表 3  $D/r_0 = 15$  时改进 SPGD 算法校正后相关参数

 Table 3 Parameters of the improved SPGD algorithm when  $D/r_0 = 15$ 

	$R_s$	$d_{PV}/$ rad	$d_{RMS}/$ rad	Iteration when $R_s$ reaches 0.27
Improved SPGD	0.36	16.75	3.16	833
Traditional SPGD	0.35	16.88	3.17	1464

由图 7、图 8 和表 2、表 3 可知,当  $D/r_0 = 10$  和 15 时,随着大气湍流影响的增大,采用分段随机扰动幅值的 SPGD 算法校正,其最终的校正效果会变差,即性能指标  $R_s$  收敛值及收敛速度都会在一定程度上减小,其主要影响因素在于变形镜的有限单元数,本文采用的 61 单元变形镜单元数还不能达到校正较大湍流畸变波前所要求的数量,对高频分量的校正能力不足。但总体上,采用分段随机扰动幅值 SPGD 算法均能实现对大气湍畸变波前的校正,且校正后的性能指标  $R_s$  能够实现有效的收敛。与固定最佳随机扰动幅值时传统 SPGD 算法相比,采用分段随机扰动幅值的 SPGD 算法,其  $R_s$  达变化量的 80% 处时的收敛速度提高了近 1.6 倍,验证了分段随机扰动幅值 SPGD 算法的可行性。

## 4 结 论

介绍了 SPGD 算法的基本原理,提出了分段随机扰动幅值的改进方法。在固定增益系数为 0.85,初始随机扰动幅值为 0.42,系数  $b$  为 1 的前提下,采用分段随机扰动幅值的 SPGD 算法,对 20 帧  $D/r_0$  为 5 的大气湍流畸变波前进行了间隔  $c$  分别为 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2 时所对应的不同分段数  $L$  校正后性能指标  $R_s$  收敛情况分析。针对校正后的无波前探测自适应光学模型,初步得出了最佳分段数  $L = 4/(5 \times c)$  以及初始随机扰动幅值的最佳取值区间为 0.3~1.5。与固定最佳随机扰动幅值(取 0.2)时的传统 SPGD 算法相比,采用分段随机扰动

幅值的 SPGD 算法,其  $R_s$  达变化量的 80% 处时的收敛速度提高了近 1.6 倍。同时,对 20 帧  $D/r_0$  分别为 10, 15 时的大气湍流畸变波前进行校正,进一步验证了分段随机扰动幅值 SPGD 方法的可行性。最后,由于对分段随机扰动幅值 SPGD 方法处于前期原理性的验证,通过对静态波前相差进行校正,验证了该改进方法的可行性。在此基础之上,后续将对大气动态波前相差做相应的深入研究,拟搭建实际光学实验平台做进一步的实验验证。

## 参 考 文 献

- 1 Robert K Tyson. Principle of Adaptive Optics[M]. San Diego: Academic Press, 2010.
- 2 R A Muller, A Buffington. Real-time correction of atmospherically degraded telescope images through image sharpening[J]. J Opt Soc Am A, 1974, 64(9): 1200-1210.
- 3 M A Vorontsov, G W Carhart, M Cohen, *et al.*. Adaptive optics based on analog parallel stochastic optimization: analysis and experimental demonstration[J]. J Opt Soc Am A, 2000, 17(8): 1440-1453.
- 4 Yang Huizhen, Chen Bo, Li Xinyang, *et al.*. Experimental demonstration of stochastic parallel gradient descent control algorithm for adaptive optics system[J]. Acta Optica Sinica, 2008, 28(2): 205-210.  
杨慧珍, 陈 波, 李新阳, 等. 自适应光学系统随机并行梯度下降控制算法实验研究[J]. 光学学报, 2008, 28(2): 205-210.
- 5 Yang Huizhen, Li Xinyang, Jiang Wenhan. Comparison of several stochastic parallel optimization control algorithms for adaptive optics system [J]. High Power Laser and Particle Beams, 2008, 28(1): 11-16.  
杨慧珍, 李新阳, 姜文汉. 自适应光学系统几种随机并行优化控制算法比较[J]. 强激光与粒子束, 2008, 28(1): 11-16.
- 6 Wang Caixia, Li Mei, Li Xinyang, *et al.*. Real-time parallel wavefront processor for adaptive optics based on stochastic parallel-gradient-descent algorithm[J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(11): 3076-3081.  
王彩霞, 李 梅, 李新阳, 等. 基于随机并行梯度下降算法的自适应光学实时并行处理机[J]. 光学学报, 2010, 30(11): 3076-3081.
- 7 Wang Sanhong, Liang Yonghui, Long Xuejun, *et al.*. Multilevel wavefront correction technique based on stochastic parallel gradient descent algorithm[J]. Chinese J Lasers, 2009, 36(5): 1091-1096.  
王三宏, 梁永辉, 龙学军, 等. 基于随机并行梯度下降算法的多级波前校正技术[J]. 中国激光, 2009, 36(5): 1091-1096.
- 8 Yang Huizhen, Li Xinyang, Jiang Wenhan. Simulation and analysis of stochastic parallel gradient descent control algorithm for adaptive optics system[J]. Acta Optica Sinica, 2007, 27(8): 1355-1360.  
杨慧珍, 李新阳, 姜文汉. 自适应光学系统随机并行梯度下降控制算法仿真与分析[J]. 光学学报, 2007, 27(8): 1355-1360.
- 9 Xu Youhui, Tong Shoufeng. Research of adaptive optics based on SPGD[J]. Journal of Changchun University, 2013, 23(2): 391-393.  
徐友会, 佟首峰. 自适应光学随机并行梯度下降控制算法的研究[J]. 长春大学学报, 2013, 23(2): 391-393.
- 10 Rao Xuejun, Ling Ning, Jiang Wenhan. Measurement on deformable mirror influence function using digital interferometer [J]. Acta Optica Sinica, 1995, 15(10): 1446-1451.  
饶学军, 凌 宁, 姜文汉. 用数字干涉仪测量变形镜影响函数的

实验研究[J]. 光学学报, 1995, 15(10): 1446-1451.

11 W H Jiang, N Ling, X J Rao, *et al.*. Fitting capability of deformable mirror [J]. Active and Adaptive Optical System, 1991, 1542: 130-137.

12 N Roddier. Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials[J]. Opt Eng, 1990, 29(10): 1174-1180.

13 Sun Sui, Liang Yonghui, Wang Sanhong. Simulation study of

convergence rate of stochastic parallel gradient descent technique for adaptive optics [J]. Opto-Electronic Engineering, 2011, 38 (12): 6-12.

孙 穗, 梁永辉, 王三宏. 随机并行梯度下降自适应光学系统中算法收敛速度的仿真研究[J]. 光电工程, 2011, 38(12): 6-12.

栏目编辑: 王晓琰