

基于激光多边法的坐标测量系统最佳布局

胡进忠 余晓芬 任兴 赵达

(合肥工业大学仪器科学与光电工程学院, 安徽 合肥 230009)

摘要 基于激光多边法的坐标测量系统的测量精度受到其布局方式的影响。前期研究中通过对无目标点自标定模型误差传递规律的理论分析,将系统的布局方式优化为直角三棱锥布局。在此基础上,通过对线性化后的系统测量模型进行误差分析,发现当该测量模型系数矩阵的条件数取得最小值时,得到系统的最佳布局方式为直角正三棱锥布局。仿真结果表明,直角正三棱锥布局可有效保证系统的测量精度。

关键词 测量;直角正三棱锥布局;条件数;最佳布局

中图分类号 TH721 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201441.0708001

Optimal Layout of Three-Dimensional Coordinate Measurement System Based on Laser Multi-Lateration

Hu Jinzhong Yu Xiaofen Ren Xing Zhao Da

(School of Instrument Science and Opto-Electronics Engineering, Hefei University of Technology, Hefei, Anhui 230009, China)

Abstract The measurement accuracy of the three-dimensional (3D) coordinate measuring system based on laser multi-lateration is influenced by its layout. In previous study, the system's layout is optimized for the tri-rectangular pyramid layout by theoretical analysis of the non-target self-calibration model. On this basis, through error analysis of the linearized measurement model of the system, it is found that the optimal layout, that is the tri-rectangular regular pyramid layout, is obtained, when the condition number of the coefficient matrix of the measurement model achieves minimum. Simulation results show that the tri-rectangular regular pyramid layout can efficiently ensure the accuracy of the system.

Key words measurement; tri-rectangular regular pyramid layout; condition number; optimal layout

OCIS codes 120.3930; 120.5700; 280.3400

1 引言

现代大型装备制造业的快速发展,如航空航天、大型船舶和核工业等,不断推动着大尺寸测量技术^[1-6]的更新进步。基于激光多边法的坐标测量系统正是瞄准这一背景需求而提出的,该系统具有超大空间、柔性、现场测量和自标定等优点。系统的测量模型中只利用距离信息,因此在理论上具有很高的精度^[7-8]。参考文献[8]同时指出由于布局方式

不合理导致此类系统的实际测量精度普遍低于理论精度,甚至会导致激光测长的高精度失去意义。因此研究系统的布局方式亦或最佳布局问题具有重要意义^[9-10]。在前期研究^[11]中,通过对无目标点自标定模型误差传递规律的理论分析,已将系统的布局方式优化为直角三棱锥布局,但 3 个直角坐标分量究竟该如何取值,即系统的最佳布局问题,还需作进一步讨论。

收稿日期: 2013-12-02; **收到修改稿日期**: 2014-01-22

基金项目: 国家自然科学基金(51275149)

作者简介: 胡进忠(1986—),男,博士研究生,主要从事大尺寸测量和算法分析等方面的研究。

E-mail: hujinzhong402@126.com

导师简介: 余晓芬(1954—),女,教授,博士生导师,主要从事大尺寸测量和现代检测技术等方面的研究。

E-mail: yuxiaofen99@126.com

本文简要介绍基于激光多边法的坐标测量系统的测量原理,通过线性化后的系统测量模型进行误差分析,得到了系统的最佳布局。

2 系统测量原理

图 1 是系统的测量原理示意图。图中方框点代表测量基站,三角点代表目标。现假设已知测量基站 M_i 坐标为 $(x_{m_i}, y_{m_i}, z_{m_i})$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 再设所求目标 T 的坐标为 (x_T, y_T, z_T) , d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 为第 i 个测量基站到目标 T 之间的距离, 则由空间两点间距离公式可得

$$(x_{m_i} - x_T)^2 + (y_{m_i} - y_T)^2 + (z_{m_i} - z_T)^2 = d_i^2, \quad (1)$$

式中 $i = 1, 2, \dots, n$ 。显然当 $n \geq 3$ 时, (1) 式可解, 且系统可利用无动点模型实现自标定^[11]。这意味着系统在实际应用时, 可首先通过自标定获得各测量基站的坐标后, 再进行实际测量。在实际构建系统时, 一般使系统有一个冗余度, 即使测量基站个数 $n = 4$, 这样既可通过冗余测量有效提高系统的测量精度, 同时也可合理控制系统的成本。

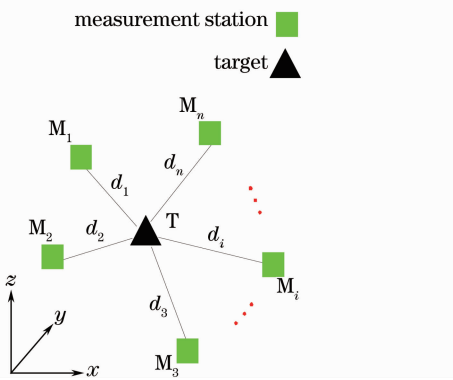


图 1 系统测量原理示意图

Fig.1 Representation of system measurement principle

3 系统最佳布局

由于系统布局方式对系统的自标定精度也有重要影响, 于是在前期研究^[11]中, 通过对无目标点自标定模型误差传递规律的理论分析, 已将系统的布局方式优化为直角三棱锥布局。下面将对系统的最佳布局问题, 即参考文献[11]中 3 个直角坐标分量 x_{m2} 、 y_{m3} 和 z_{m4} 究竟该如何取值这一问题作进一步探讨。

为了便于叙述, 在进行具体探讨之前给出以下

一些定义及其性质。

定义 1: 目标点的坐标向量为 $\mathbf{x}_T = (x_T, y_T, z_T)^T$ 。

定义 2: 系统参数向量为 $\mathbf{P}_n = (x_{m1}, y_{m1}, z_{m1}, \dots, x_{m_i}, y_{m_i}, z_{m_i})^T$, ($i = 1, 2, \dots, n$)。当 $n = 4$, 且按照以下方式合理建立右手坐标系时: 以测量基站 M_1 为坐标系原点, 测量基站 M_2 在 x 轴正方向上, 测量基站 M_3 在 xoy 面内, 系统参数 $\mathbf{P}_4 = (0, 0, 0, x_{m2}, 0, 0, x_{m2}, y_{m2}, 0, x_{m4}, y_{m4}, z_{m4})^T$ 。

定义 3: 矩阵的点乘(点乘方)运算为

$$\text{若 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix}, \text{ 且定义 } \mathbf{A} \cdot 2 =$$

$\mathbf{A} * \mathbf{A}$ 。

性质 3-1: 从定义 3 中易知矩阵点乘运算服从分配率 $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) * \mathbf{C} = \mathbf{A} * \mathbf{C} + \mathbf{B} * \mathbf{C}$ 。

定义 4: 矩阵的按行求和运算为

$$\text{若 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ 则 } \text{sumR}(\mathbf{A}) =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn} \end{pmatrix}。$$

性质 4-1: 从定义 4 中易知矩阵按行求和运算也服从“分配率”, 即 $\text{sumR}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{sumR}(\mathbf{A}) + \text{sumR}(\mathbf{B})$ 。

性质 4-2: 从定义 4 中易知矩阵按行求和运算还具有数乘性质, 即设 $\lambda \in \mathbf{R}$ (\mathbf{R} 表示实数集), 则 $\text{sumR}(\lambda\mathbf{A}) = \lambda\text{sumR}(\mathbf{A})$ 。

3.1 系统测量模型的线性化

前面已经论述, 实际应用中, 系统的测量基站个数 $n=4$, 同时测量基站按定义 2 中所述方式合理建立右手坐标系, 此时系统的测量模型如(2)式所示。(2)式似乎是一个非线性方程组, 但事实上其很容易线性化: 用(2b)、(2c) 和(2d)式分别减去(2a)式, 再整理后则可得线性化后的系统测量模型, 如(3)式所示。将(3)式写成矩阵形式, 如(4)式所示。这里把矩阵 \mathbf{A} 称作线性化后测量模型的系数矩阵。

$$(x_T)^2 + (y_T)^2 + (z_T)^2 = d_1^2, \quad (2a)$$

$$(x_{m2} - x_T)^2 + (y_T)^2 + (z_T)^2 = d_2^2, \quad (2b)$$

$$(x_{m3} - x_T)^2 + (y_{m3} - y_T)^2 + (z_T)^2 = d_3^2, \quad (2c)$$

$$(x_{m4} - x_T)^2 + (y_{m4} - y_T)^2 + (z_{m4} - z_T)^2 = d_4^2, \quad (2d)$$

$$\begin{cases} x_{m2}x_T = \frac{1}{2}(d_1^2 - d_2^2 + x_{m2}^2) \\ x_{m3}x_T + y_{m3}y_T = \frac{1}{2}(d_1^2 - d_3^2 + x_{m3}^2 + y_{m3}^2) \\ x_{m4}x_T + y_{m4}y_T + z_{m4}z_T = \frac{1}{2}(d_1^2 - d_4^2 + x_{m4}^2 + y_{m4}^2 + z_{m4}^2) \end{cases}, \quad (3)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_T = \mathbf{b}, \quad (4)$$

$$\text{式中 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_{m2} & 0 & 0 \\ x_{m3} & y_{m3} & 0 \\ x_{m4} & y_{m4} & z_{m4} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_1^2 - d_2^2 + x_{m2}^2 \\ d_1^2 - d_3^2 + x_{m3}^2 + y_{m3}^2 \\ d_1^2 - d_4^2 + x_{m4}^2 + y_{m4}^2 + z_{m4}^2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{令 } \mathbf{d} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_1^2 - d_2^2 \\ d_1^2 - d_3^2 \\ d_1^2 - d_4^2 \end{pmatrix}, \text{并结合定义 3 和定义 4, 将}$$

矩阵 \mathbf{b} 重新表达, 即

$$\mathbf{b} = \mathbf{d} + \frac{1}{2} \text{sumR}(\mathbf{A}, \cdot^2). \quad (5)$$

针对(4)式和(5)式, 稍加分析后可得到如下几项结论:

1) 系统不同的布局方式对应不同的系数矩阵 \mathbf{A} ;
2) 系数矩阵 \mathbf{A} 由自标定获得, 因此自标定误差对系统测量精度的影响在理论上表现为系数矩阵 \mathbf{A} 的扰动对测量精度的影响;

3) 矩阵 \mathbf{b} 由两部分构成: 一是与距离信息相关的矩阵 \mathbf{d} ; 二是与系数矩阵 \mathbf{A} 即系统布局方式相关的 $\text{sumR}(\mathbf{A}, \cdot^2)$ 。这表明系统测量精度受到由测距误差导致矩阵 \mathbf{d} 的扰动的影响, 同时系数矩阵 \mathbf{A} 的影响将再次产生。

3.2 系统最佳布局的理论分析

参考文献[11]指出, 系统的自标定精度主要受传感器测距精度和系统布局方式影响, 结合上述 3 项结论可以看出, 布局方式主要是通过影响自标定精度间接对系统测量精度产生影响。事实上, 布局方式对系统测量精度也会产生直接影响, 下面将通过线性化后的测量模型进行方程组性态分析^[12]对此进行说明, 并由此确定系统的最佳布局。

由参考文献[8]和[10]中所提出的系统布局方式的限制条件可知, 系统矩阵 \mathbf{A} 非奇异, 即 \mathbf{A} 的逆矩阵存在。而考虑到上述 3 项结论中所提到的扰动

时, 系统测量模型如(6)式所示。对于扰动的具体分析, 分以下两种情况进行讨论:

1) 当 $\delta\mathbf{d} \neq 0$ 而 $\delta\mathbf{A} = 0$, 其结果如(11)式所示;

2) 当 $\delta\mathbf{d} = 0$ 而 $\delta\mathbf{A} \neq 0$, 此时(6)式两边均含 $\delta\mathbf{A}$, 分析过程较情况 1) 复杂一些, 其结果如(20)式所示。

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})(\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T) =$$

$$(\mathbf{d} + \delta\mathbf{d}) + \frac{1}{2} \text{sumR}[(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}), \cdot^2], \quad (6)$$

式中 $\delta\mathbf{A}$ 由自标定误差引起, $\delta\mathbf{d}$ 由测距误差引起, 而 $\delta\mathbf{x}_T$ 则是由 $\delta\mathbf{A}$ 和 $\delta\mathbf{d}$ 所导致, 其大小表征测量精度。

1) 当 $\delta\mathbf{d} \neq 0$ 而 $\delta\mathbf{A} = 0$ 时, (6)式变为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T) = (\mathbf{d} + \delta\mathbf{d}) + \frac{1}{2} \text{sumR}(\mathbf{A}, \cdot^2), \quad (7)$$

因为 $\mathbf{A}\mathbf{x}_T = \mathbf{d} + \frac{1}{2} \text{sumR}(\mathbf{A}, \cdot^2)$, 所以

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{x}_T = \delta\mathbf{d}, \quad (8)$$

于是有

$$\delta\mathbf{x}_T = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{d}, \quad (9)$$

两边同时取范数, 得

$$\|\delta\mathbf{x}_T\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{d}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta\mathbf{d}\|, \quad (10)$$

又由 $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}_T\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}_T\|$, 显然 $\|\mathbf{x}_T\| \neq 0$ 且 $\|\mathbf{b}\| \neq 0$, 于是可得

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}_T\|}{\|\mathbf{x}_T\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|\delta\mathbf{d}\|}{\|\mathbf{b}\|}. \quad (11)$$

2) 当 $\delta\mathbf{d} = 0$ 而 $\delta\mathbf{A} \neq 0$ 时, (6)式变为

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})(\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T) = \mathbf{d} + \frac{1}{2} \text{sumR}[(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}), \cdot^2], \quad (12)$$

由性质 3-1, 可得

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_T + \mathbf{A}\delta\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{A}(\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T) = \mathbf{d} + \frac{1}{2}\text{sumR}[(\mathbf{A}\cdot^2 + 2\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}\cdot^2)], \quad (13)$$

由性质 4-1, 可得

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_T + \mathbf{A}\delta\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{A}(\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T) = \mathbf{d} + \frac{1}{2}[\text{sumR}(\mathbf{A}\cdot^2) + \text{sumR}(2\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) + \text{sumR}(\delta\mathbf{A}\cdot^2)], \quad (14)$$

因为 $\mathbf{A}\mathbf{x}_T = \mathbf{d} + \frac{1}{2}\text{sumR}(\mathbf{A}\cdot^2)$, 所以

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{A}(\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T) = \frac{1}{2}[\text{sumR}(2\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) + \text{sumR}(\delta\mathbf{A}\cdot^2)], \quad (15)$$

将 $\delta\mathbf{A}$ 的高阶项 $\text{sumR}(\delta\mathbf{A}\cdot^2)$ 略去, 并利用性质 4-2, 可得

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{A}(\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T) \approx \text{sumR}(\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}), \quad (16)$$

$$\delta\mathbf{x}_T \approx \mathbf{A}^{-1}\text{sumR}(\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) - \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}(\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T), \quad (17)$$

两边同时取范数, 得

$$\|\delta\mathbf{x}_T\| = \|\mathbf{A}^{-1}\text{sumR}(\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) - \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}(\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T)\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\text{sumR}(\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\| + \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}(\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T)\|, \quad (18)$$

两边同除以 $\|\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T\|$, 得

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}_T\|}{\|\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\text{sumR}(\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\|}{\|\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T\|} + \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T\|}{\|\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T\|}, \quad (19)$$

整理得

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}_T\|}{\|\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \left[\frac{\|\text{sumR}(\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\|}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}_T + \delta\mathbf{x}_T\|} + \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right]. \quad (20)$$

由(11)式和(20)式可以看出, 当 $\delta\mathbf{d}$ 或 $\delta\mathbf{A}$ 存在时, 其所引起的相对测量误差不超过一些相对误差乘上一个放大因子 $\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\|$ 。 $\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\|$ 在数学上被定义为系数矩阵 \mathbf{A} 的条件数, 它反映方程组(即线性化后的测量模型)的性态^[12], 而对于该测量系统来说, 它反映了系统测量的稳定性, 在此意义下, 不同的布局方式直接影响了系统测量精度。显然, 系数矩阵 \mathbf{A} 的条件数越小越好。于是有理由认为: 使系数矩阵 \mathbf{A} 的条件数取得最小值的布局方式为系统最佳布局。

按前期研究所得到的布局优化结果, 此时系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_{m2} & 0 & 0 \\ 0 & y_{m3} & 0 \\ 0 & 0 & z_{m4} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

需要说明的是, 在前期研究中, 从自标定角度情况来分析, z_{m4} 是越小越好, 但现在从测量角度来看, z_{m4} 并不是越小越好, 因为若 z_{m4} 很小, 则导致系数矩阵 \mathbf{A} 很可能存在小主元, 从而极有可能致使线性化

后的测量模型病态^[12]。为了求得此时系数矩阵 \mathbf{A} 的条件数的最小值, 不妨取 Frobenius 范数^[13], 具体分析过程如下。

从分析结果可以看出, 取 Frobenius 范数时, 系数矩阵 \mathbf{A} 的条件数大于等于 3。考虑到实际布局情况, 取等条件简化为当且仅当 $x_{m2} = y_{m3} = z_{m4}$ 。此时所得到的布局就是系统最佳布局。而相应的直角三棱锥布局中有 $|M_1M_2| = |M_1M_3| = |M_1M_4|$, 则直角三棱锥的底面为正三角形, 因此将最佳布局定义直角正三棱锥布局, 如图 2 所示。而图中的 l (即 x_{m2} 、 y_{m3} 或 z_{m4}) 可根据实际被测对象的尺寸确定。

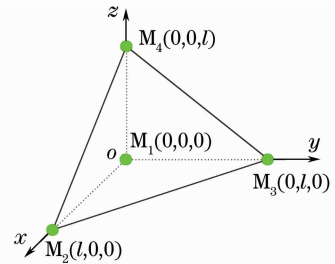


图 2 系统最佳布局示意图

Fig. 2 Representation of the optimal layout

$$\text{Cond}(\mathbf{A})_F = \|\mathbf{A}^{-1}\|_F \|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\left(\frac{1}{x_{m2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{y_{m3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{z_{m4}}\right)^2} \sqrt{(x_{m2})^2 + (y_{m3})^2 + (z_{m4})^2} =$$

$$\sqrt{3 + \left(\frac{y_{m3}}{x_{m2}}\right)^2 + \left(\frac{x_{m2}}{y_{m3}}\right)^2 + \left(\frac{z_{m4}}{x_{m2}}\right)^2 + \left(\frac{x_{m2}}{z_{m4}}\right)^2 + \left(\frac{z_{m4}}{y_{m3}}\right)^2 + \left(\frac{y_{m3}}{z_{m4}}\right)^2}, \quad (22)$$

由均值不等式可得

$$\text{Cond}(\mathbf{A})_F \geq \sqrt{3 + 2 + 2 + 2} = 3, \quad (23)$$

当且仅当 $\frac{y_{m3}}{x_{m2}} = \frac{x_{m2}}{y_{m3}}, \frac{z_{m4}}{x_{m2}} = \frac{x_{m2}}{z_{m4}}, \frac{z_{m4}}{y_{m3}} = \frac{y_{m3}}{z_{m4}}$ 取“=”。

4 仿 真

为了验证以上理论分析的正确性,利用 Matlab 软件进行了仿真。仿真中采用 4 种布局方式,其中第一种为直角三棱锥布局,第二种为正四面体布局,

第 3 种布局为符合参考文献[10]所提限制条件的一般布局方式,最后一种为直角正三棱锥布局。各布局方式的系统未知参数及其系数矩阵的条件数 $\text{Cond}(\mathbf{A})_F$ 如表 1 所示。

表 1 不同布局方式下系统未知参数真值

Table 1 Designed values of unknown parameters of measurement stations with different layouts

	x_{m2}	x_{m3}	y_{m3}	x_{m4}	y_{m4}	z_{m4}	$\text{Cond}(\mathbf{A})_F$
Layout 1	5000	0	3700	0	0	3000	3.2697
Layout 2	5000	2500	4330.127	2500	1443.376	4082.483	3.6742
Layout 3	5000	2500	3700	3200	5500	3000	6.7961
Layout 4	5000	0	5000	0	0	5000	3

仿真时不再像理论分析那样分“当 $\delta d \neq 0$ 而 $\delta A = 0$ ”和“当 $\delta d = 0$ 而 $\delta A \neq 0$ ”两种情况进行讨论,而是同时考虑“ $\delta d \neq 0$ ”且“ $\delta A \neq 0$ ”。仿真过程为系统先进行自标定^[11],然后进行测量。这样的仿真过程不仅符合系统实际应用情况,而且可以使“ $\delta A \neq 0$ ”通过自标定结果来表征,而“ $\delta d \neq 0$ ”则由传感器的测距误差来表征。

仿真中采用 10 个被测点,这些被测点的理论坐标在 $[0, 3000] \times [0, 3000] \times [0, 3000]$ (单位: mm) 的空间区域中按均匀分布随机产生,且为了使仿真更符合实际情况,各点的坐标均未取整;自标定和测量中传感器的测距误差均按正态分布 $N(0,$

$10^2 \mu\text{m}^2)$ 给出。仿真结果计算出各被测点的测量坐标及定位误差 σ_p^x, σ_p^y 按被测点的测量坐标分量与相应理论坐标分量的差的平方和计算。仿真结果见表 2。

图 3 反映了各布局方式的系数矩阵的条件数 $\text{Cond}(\mathbf{A})_F$ 与其定位误差 σ_p^x 之间的关系。从图 3 可以直观地看出随着布局方式的系数矩阵的条件数 $\text{Cond}(\mathbf{A})_F$ 逐渐减小,系统的定位精度不断提高。因此由理论分析所得到的直角正三棱锥布局是切实有效的。

5 结 论

基于激光多边法的坐标测量系统的布局方式不仅影响系统的自标定精度,同时也是影响系统测量精度的主要因素之一。在前期研究^[11]中,通过对无动点自标定模型误差传递规律的理论分析,将系统的布局方式优化为直角三棱锥布局。本文主要探讨了系统的最佳布局问题——参考文献[11]中所提出的三直角坐标分量究竟该如何取值——通过对线性化后的系统测量模型进行误差分析,发现当该测量模型系数矩阵的条件数取得最小值时,得到系统的最佳布局方式,即直角正三棱锥布局。仿真结果验证了最佳布局可有效保证系统的测量精度。

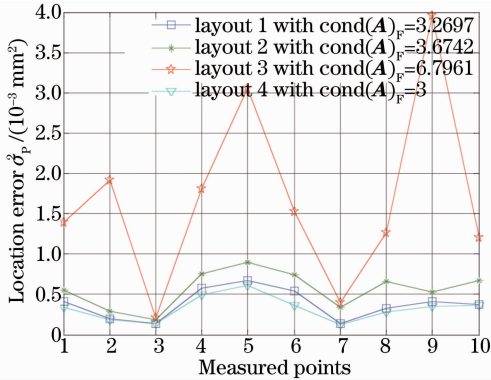


图 3 不同布局方式的系数矩阵的条件数

$\text{Cond}(\mathbf{A})_F$ 与其定位误差 σ_p^x 关系图

Fig. 3 Representation of relationship between

$\text{Cond}(\mathbf{A})_F$ and σ_p^x under different layouts

表 2 仿真结果
Table 2 Simulation result

Measured points	Theoretical coordinates /mm	Measured coordinates /mm	σ_p^2/mm^2
1	Layout 1	(1031.4391,128.7111,507.0681)	4.11×10^{-4}
	Layout 2	(1031.4498,128.6944,507.0638)	5.57×10^{-4}
	Layout 3		1.39×10^{-3}
	Layout 4		3.41×10^{-4}
2	Layout 1		(1783.4783,17.646,836.6972)
	Layout 2	(1783.4788,17.6544,836.6863)	2.88×10^{-4}
	Layout 3		1.92×10^{-3}
	Layout 4		1.89×10^{-4}
3	Layout 1		(10.1114,2231.706,1456.7718)
	Layout 2	(10.1222,2231.7059,1456.7675)	1.82×10^{-4}
	Layout 3		2.04×10^{-4}
	Layout 4		1.33×10^{-4}
4	Layout 1		(2824.0294,2875.5608,650.4407)
	Layout 2	(2824.0453,2875.5783,650.4363)	7.53×10^{-4}
	Layout 3		1.81×10^{-3}
	Layout 4		4.94×10^{-4}
5	Layout 1		(588.7073,2633.8287,375.6967)
	Layout 2	(588.6865,2633.8244,375.6818)	8.97×10^{-4}
	Layout 3		3.06×10^{-4}
	Layout 4		6.08×10^{-4}
6	Layout 1		(182.8376,2345.8786,404.3809)
	Layout 2	(182.8244,2345.8855,404.3631)	7.41×10^{-4}
	Layout 3		1.53×10^{-3}
	Layout 4		3.66×10^{-4}
7	Layout 1		(558.7938,587.1906,1189.6447)
	Layout 2	(558.7831,587.1923,1189.6404)	3.33×10^{-4}
	Layout 3		3.94×10^{-4}
	Layout 4		1.25×10^{-4}
8	Layout 1		(1109.088,1911.3723,1173.3079)
	Layout 2	(1109.0722,1911.3658,1173.3026)	6.64×10^{-4}
	Layout 3		1.26×10^{-3}
	Layout 4		2.81×10^{-4}
9	Layout 1		(44.2743,144.9956,1232.9872)
	Layout 2	(44.2666,144.9998,1232.969)	5.30×10^{-4}
	Layout 3		3.96×10^{-3}
	Layout 4		3.48×10^{-4}
10	Layout 1		(80.2909,868.2993,2644.2519)
	Layout 2	(80.2719,868.2994,2644.2558)	6.75×10^{-4}
	Layout 3		1.20×10^{-3}
	Layout 4		3.61×10^{-4}

参 考 文 献

1 G N Peggs, P G Maropoulos, E B Hughes, *et al.*. Recent developments in large-scale dimensional metrology [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture, 2009, 223(6): 571-595.
2 Zhang Guoxiong. Development of coordinate measuring technology[J]. Aviation Precision Manufacturing Technology, 2008, 44(3): 16-19.

张国雄. 坐标测量技术新进展[J]. 航空精密制造技术, 2008, 44(3): 16-19.
3 Ye Shenghua, Zhu Jigui, Zhang Zili, *et al.*. Status and development of large-scale coordinate measurement research[J]. Acta Metrologica Sinica, 2008, 29(4A): 1-6.
叶声华, 郑继贵, 张滋黎, 等. 大空间坐标尺寸测量研究的现状与发展[J]. 计量学报, 2008, 29(4A): 1-6.
4 W T Estler, K L Edmundson, G N Peggs, *et al.*. Large-scale

- metrology—an update [J]. CIRP Annals-Manufacturing Technology, 2002, 51(2): 587—609.
- 5 He Bingwei, Lin Dongyi, Chen Zhipeng, *et al.*. Research of eliminating occlusion in visual construction of three-dimensional objects[J]. Chinese J Lasers, 2011, 38(7): 0708001.
何炳蔚, 林东艺, 陈志鹏, 等. 三维物体视觉测量重构中解决遮挡问题的方法研究[J]. 中国激光, 2011, 38(7): 0708001.
- 6 Zhang Xuping, Wang Jiaqi, Zhang Yixin, *et al.*. Large-scale three-dimensional stereo vision geometric measurement system [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(3): 0315002.
张旭苹, 汪家其, 张益昕, 等. 大尺度三维几何尺寸立体视觉测量系统实现[J]. 光学学报, 2012, 32(3): 0315002.
- 7 Li Xinghua. Design of the Laser Tracking System[D]. Tianjin: Tianjin University, 2003. 5—6.
李杏华. 激光跟踪系统的设计[D]. 天津: 天津大学, 2003. 5—6.
- 8 Lin Yongbing, Zhan Guoxiong, Li Zhen, *et al.*. Optimal arrangement of four beam laser tracking system for 3D coordinate measurement[J]. Chinese J Lasers, 2002, 29(11): 1000—1005.
林永兵, 张国雄, 李真, 等. 四路激光跟踪三维坐标测量系统最佳布局[J]. 中国激光, 2002, 29(11): 1000—1005.
- 9 Hu Zhaohui, Wang Jia, Liu Yongdong, *et al.*. The arrangement and simulation of laser tracking system for measuring coordinate with distance-measured-only[J]. Optical Technique, 2000, 26(5): 395—399.
胡朝晖, 王佳, 刘永东, 等. 纯距离法激光跟踪坐标测量系统的布局与仿真[J]. 光学技术, 2000, 26(5): 395—399.
- 10 T Takatsuji, Y Koseki, M Goto, *et al.*. Restriction on the arrangement of laser traekers in laser trilateration[J]. Meas Sci & Technol, 1998, 9(8): 1357—1359.
- 11 Hu Jinzhong, Yu Xiaofen, Peng Peng, *et al.*. Layout optimization of 3D coordinate measurement system based on laser multi-lateration[J]. Chinese J Lasers, 2014, 41(1): 0108006.
胡进忠, 余晓芬, 彭鹏, 等. 基于激光多边法的坐标测量系统布局优[J]. 中国激光, 2014, 41(1): 0108006.
- 12 Zhu Xiaolin. Numerical Analysis [M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2010. 40—43.
朱晓临. 数值分析[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2010. 40—43.
- 13 Huang Youdu. Matrix Theory and Application [M]. Hefei: Hefei University of Technology Press, 2005. 109—110.
黄有度. 矩阵理论及其应用[M]. 合肥: 合肥工业大学出版社, 2005. 109—110.

栏目编辑:何卓铭