

信标湍流探测中波前非等晕问题的研究 I: 数值建模

罗 曦^{1,2} 李新阳^{1,2*}

(¹ 中国科学院光电技术研究所自适应光学研究室, 四川 成都 610209)
² 中国科学院自适应光学重点实验室, 四川 成都 610209)

摘要 信标概念的提出解决了自适应光学(AO)系统的湍流参考源问题,同时也带来了不可避免的非等晕误差。综合考虑实际中信标与观测目标之间的空间角度与高度差异,利用数值建模对不同信标机制下(包括自然信标、人造信标)湍流探测中波前像差模式的非等晕性误差进行了系统性分析。研究发现:自然信标机制下,有效的纯角度非等晕性方差较传统评估值 $(\theta/\theta_0)^{5/3}$ 偏小;因而,传统评估方式中直接利用大气等晕角 θ_0 评估纯角度非等晕性误差对AO校正的影响,比实际影响严重。人造信标机制下,无角度偏差时的模式非等晕性误差随信标高度增加而减小;但由于角度偏差所致信标探测波前与待校正目标波前之间模式相关性的退化,却随信标高度增加而变得更加敏感,此时应根据应用需求对AO系统工作模式与信标模式进行权衡优化选择。研究所得的理论结果为外大气信标自适应光学实验的展开提供了必要的理论支持。

关键词 大气光学; 自适应光学; 信标; 非等晕误差; 数值建模

中图分类号 TP202.7 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201441.0612002

Investigation of Anisoplanatic Effect in Atmospheric Turbulence Probing with Beacon I: Numerical Modeling

Luo Xi^{1,2} Li Xinyang^{1,2}

(¹ *Laboratory on Adaptive Optics, Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China*
² *Key Laboratory on Adaptive Optics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China*)

Abstract The atmospheric turbulence probing source of adaptive optics (AO) is proposed by the promotion of beacon (namely guide star, GS). However the unavoidable anisoplanatic error it brings can degrade the performance of AO system. Taking account of the differences of height location and spatial angular deviations between GS and object, the ensemble statistical characteristics of anisoplanatic error with different GS modes are investigated by numerical modeling, including natural guide star (NGS) and laser guide star (LGS). In NGS mode, the effective angular anisoplanatic variance is smaller than the traditional evaluation value $(\theta/\theta_0)^{5/3}$. So the conventional characterization of the angular anisoplanatic degradation in AO correction with atmospheric anisoplanatic angle θ_0 is more serious than actual circumstance. In LGS mode, the higher the beacon probing altitude is, the smaller the Zernike aberration modal anisoplanatic error is. But the aberration modal correlation degradation between LGS and object resulted from their angular deviation becomes more sensitive. Under such circumstance the AO system operation mode and the GS mode should be weighed up and optimized according to practical application. The numerical results provide theoretical support for the experiment investigation of atmospheric AO with LGS in future.

Key words atmospheric optics; adaptive optics; guide star; anisoplanatic error; numerical modeling

OCIS codes 010.1080; 010.1300; 010.1330; 010.7350

收稿日期: 2013-10-21; 收到修改稿日期: 2014-01-01

作者简介: 罗 曦(1982—),男,博士,副研究员,主要从事大气光波传输与自适应光学等方面的研究。

E-mail: luoxi@ioe.ac.cn

* 通信联系人。E-mail: xyli@ioe.ac.cn

1 引言

用于实时校正大气湍流所致光波随机动态波前畸变的自适应光学(AO),通常需要一个足够亮的参考源来提供由大气湍流引发的波前畸变信息,即导引星[或信标(GS)]。信标可以是观测目标本身或其附近的自然星(NGS,即自然信标);也可以是通过人为方式将激光束会聚发射至一定高度的大气层中,并利用大气层中的分子散射或钠层共振散射产生一定强度回光信号以提供湍流波前畸变信息的激光导引星(LGS,也即人造信标),其中人造信标主要包括瑞利信标(Rayleigh-LGS)和钠信标(Sodium-LGS)^[1-4]。理想情况下,人们总是希望信标能够提供与观测目标光路尽可能完全相同的大气湍流信息(即对目标湍流光路的精确测量),以实现目标波前畸变的完全校正。然而,通常情况下由于目标信标本身的运动或者(观测目标附近的)自然星参考信标与目标之间存在空间角度差异,进而带来信标探测湍流光路相对于目标校正湍流光路的空间角向采样差异(即自然信标的角度非等晕效应)。同时,由于人造信标模式下大气湍流对信标产生上行聚焦激光束天空指向方位的随机影响,以及有限高度人造信标仅能对其高度以下至望远镜接收口径之间的圆锥体内湍流进行采样,而对圆锥体外或自身高度以上的湍流未被采样(即人造信标的角度非等晕与聚焦非等晕效应)。上述局限性势必造成自适应光学系统信标探测波前与待校正目标波前之间的差异,进而对AO系统的校正效果产生影响。

目前针对非等晕问题的理论分析,主要是以空间谱滤波技术及梅林(Mellin)变换理论的解析分析为基础^[5-8]。20世纪90年代,美国麻省理工学院(MIT)林肯实验室的Sasiela等^[5]提出利用梅林变换技术研究光波在湍流大气中的传输问题。在此基础上,Molodij等^[6]通过对目标及信标湍流波前的Zernike模式展开,并利用梅林变换特性分析了激光导引星自适应光学系统的校正残差模式特性。万敏等^[7]分析了时间延迟及探测器空间分辨率对激光导引星自适应光学系统低阶像差校正效果的影响。沈锋等^[8]则利用梅林变换理论对激光导引星湍流波前非等晕误差的像差模式进行了研究。上述基于梅林变换理论的解析分析方法虽能够通过复杂冗繁的数学推导对大气湍流光波传输相关问题给予理论解释,但其在直观性方面却略显不足。因而,从实际自适应光学系统的设计、以及信标非等晕效应物理过程可再现性与分析评估等多方面考虑,寻找一种更

加贴近光波湍流大气传输实际物理过程的直观分析方法已成必然。

同基于梅林变换理论的复杂数学解析推导相比,数值模拟的优势在于其能从光波湍流传输及实际AO系统工作的基本过程出发,更加清晰、直观地反映目标湍流波前与信标探测波前之间非等晕效应的数学和物理图像。基于上述基本考虑,本文综合考虑实际中信标与观测目标之间的空间高度与空间角度差异,建立了统一描述信标湍流探测波前非等晕问题的数值模型。采用数值模拟的方式,系统性分析了不同机制信标(包括自然信标、人造信标)探测波前像差模式与目标湍流波前像差模式之间的相关系综统计特性:包括自然信标机制下的纯角度非等晕效应、人造信标机制下的纯聚焦非等晕效应以及人造信标机制下的角度与聚焦相互耦合非等晕效应。并对信标与目标之间角度差异对不同机制信标探测波前模式非等晕性误差的影响进行了分析与讨论。

2 大气湍流探测中信标非等晕问题物理过程数值建模中的基本考虑

考虑实际中信标与观测目标之间的空间高度与角度差异,建立了湍流波前探测中信标非等晕问题的物理模型,如图1所示。

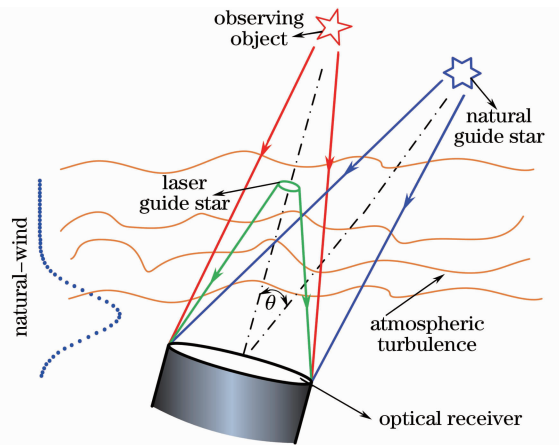


图1 信标湍流探测中波前非等晕问题的物理模型
Fig. 1 Physical model of guide star anisoplanatism in turbulence probing

数值模拟中,大气光波传输方程的求解是采用相位屏法近似实现的,即利用真空与散布其间的若干湍流相位屏构成光波大气传输的基本路径^[9]。相位屏的实现则采用功率谱反演法,通过符合Kolmogorov统计规律的大气湍流功率谱密度函数对复高斯随机数厄米矩阵滤波,并利用傅里叶变换与适当的低频修正^[10]相结合,获得满足该统计规律的大气扰动随

机相位分布。对应 30 km 垂直高度范围内的湍流效应由近地面至高空非等间距分段分布的 20 层大气湍流相位屏来表征。其中, 0~1.05 km 均匀分布 7 张相位屏; 1.05~11.55 km 均匀分布 7 张相位屏; 11.55~30 km 均匀分布 6 张相位屏。每张相位屏的大气折射率结构常数 C_n^2 则由该高度区间段内折射率结构函数 $C_n^2(h)$ 的均值来表征。

考虑有限聚焦高度人造信标回光光波的发散传输以及观测目标回光光波的近准直传输, 这里采用文献[9, 11]提及的坐标变换技术描述光波的大气湍流传输过程, 从而可在保持计算网格总数不变、且有效光斑始终位于计算网格中心附近的情况下, 最终获得经湍流传输到达望远镜入瞳的信标及目标波前分布。在可变坐标系下, 传输距离 z 处目标光波的空间角频率间隔 $\Delta K_{x(y)-\text{object}}$ 、信标光波的空间角频率间隔 $\Delta K_{x(y)-\text{GS}}$ 、大气相位屏的空间角频率间隔 $\Delta K_{x(y)-\text{phase}}$ 分别为

$$\begin{aligned} \Delta K_{x(y)-\text{object}} &= 2\pi / \left[\Delta x(y) \times N_{\text{wave}} \times \left(1 - \frac{z}{l_{\text{T-object}}} \right) \right] \\ \Delta K_{x(y)-\text{GS}} &= 2\pi / \left[\Delta x(y) \times N_{\text{wave}} \times \left(1 - \frac{z}{l_{\text{T-GS}}} \right) \right] \\ \Delta K_{x(y)-\text{phase}} &= 2\pi / \left[\Delta x(y) \times N_{\text{phase}} \times \left(1 - \frac{z}{l_{\text{T-object}}} \right) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

式中 N_{wave} 为传输光场的计算网格, 这里取 256×256 ; $\Delta x(y)$ 视系统接收口径大小作相应的改变, 并满足 $\Delta x(y) \leq r_0/4$ [r_0 为大气相干长度]; N_{phase} 为大气湍流相位屏的横向格点数, 这里取 $N_{\text{phase}} = 8192$; $l_{\text{T-object}}$ 、 $l_{\text{T-GS}}$ 分别为目标光场、信标光场的坐

标变换因子^[9-11]。

为实现包含时间演化进程的数值模拟, 可将生成的单层原始正方形相位屏进行适当截取、以及拼接为单层的矩形相位屏应用于实际计算中。根据 Taylor 湍流冻结假设, 数值计算中不同高度的自然风速或观测目标运动所致展风速效应可通过不同高度分层矩形湍流相位屏随时间的横向移动来表征; 同时, 可通过设置(各相同时刻)对应不同高度 h 的各层湍流相位屏处信标光场与目标光场采样位置之间的横向位移差 ΔS , 以实现望远镜接收口径处不同机制信标(包含相对目标的空间角度与高度差异)与目标光波经湍流传输后畸变波前的时间同步多帧采集, 其基本原理如图 2 所示。其中, 一定光波传输天顶角 ξ 条件下, $\Delta S = h \times \sec \xi \times \theta$ 。由于人造信标相对观测目标的空间高度差异, 相同高度层处其光场采样相位屏的区域要小于目标光场的采样相位屏区域, 即“锥体效应”。在由(1)式确定的可变坐标系内, 目标或自然信标光场相位扰动量的提取, 可通过对其光场格点在随时间运动相位屏中最邻近两格点相位值的一维插值而获取; 人造信标模式下, 则可通过对其光场格点在随时间运动相位屏中最邻近四格点相位值的二维插值而获取^[13]。另外, 针对不同高度人造信标的数值模拟, 应根据其光场的基本特性、以及信标与目标光波对应远场评估方法的合理统一选择, 对信标光场坐标变换因子 $l_{\text{T-GS}}$ 与目标光场坐标变换因子 $l_{\text{T-object}}$ 进行物理匹配, 以确保同一定标基准下不同高度信标与目标波前的提取。这里仅对截断型平面波光场中的应用进行简要说明。

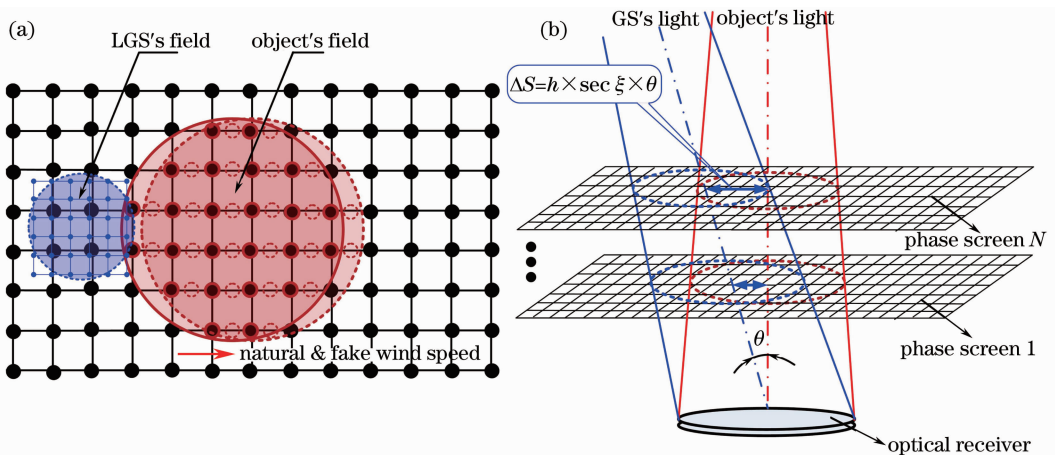


图 2 信标非等晕问题数值建模的实现。(a) 自然风速或目标运动所致展风速效应的实现; (b) 存在空间角度差异信标与目标之间湍流波前非等晕误差多帧采集的实现

Fig. 2 Realization of numerical modeling for guide star anisoplanatism in turbulence. (a) Realization of natural and fake wind speed; (b) realization of multiple-frames collecting of anisoplanatic error with angular deviation between GS and object

真空可变直角坐标系下,信标与目标光波的对
应归一化远场强度可表述为

$$I_{\text{far-field}}(\gamma) = \frac{\pi}{4} \times \left[\frac{2J_1(\tau\gamma)}{\pi\gamma} \right]^2, \quad (2)$$

式中角半径 $\gamma = \lambda/D$, D 为望远镜接收口径, λ 为光
波波长, $J(\cdot)$ 为第一类贝塞尔函数。因此,对于一定
基准角半径 $\gamma_{\text{characterized}}$ 范围内的信标与目标远场强度
分布,必定存在如下的关系

$$\begin{aligned} N_{\text{interest}} \times \Delta x(y) \times \left(1 - \frac{z_{\text{object}}}{L_{\text{T-object}}}\right) &= z_{\text{object}} \times \gamma_{\text{criterion}} \\ N_{\text{interest}} \times \Delta x(y) \times \left(1 - \frac{z_{\text{GS}}}{L_{\text{T-GS}}}\right) &= z_{\text{GS}} \times \gamma_{\text{criterion}} \end{aligned}, \quad (3)$$

式中 $\Delta x(y)$ 为传输网格的横向间隔; z_{object} 为目标到
系统接收口径的斜距; z_{GS} 为信标到系统接收口径的

斜距; $\gamma_{\text{characterized}}$ 为一定评价基准条件下的角半径;
 N_{interest} 为表征上述角向扩展范围所选取的(以质心
为中心)格点数。通过联解(3)式,便可以对 $L_{\text{T-object}}$
与 $L_{\text{T-GS}}$ 进行物理匹配,从而保证同一基准条件下不
同高度信标与目标波前的提取。

3 大气湍流探测中不同机制信标非等 晕问题的数值模拟结果与分析

数值仿真中的大气折射率结构函数分布 $C_n^2(h)$
采用中国科学院安徽光学精密机械研究所同行提供
的中等湍流模型,如(4)式所示,其中海拔高度 h 的
单位为千米;自然风速则采用 Buffton 模型来表
征^[14],即有

$$C_n^2(h) = 9.0 \times 10^{-23} \times \exp(-h/0.65) \times h^{12.5} + 3.5 \times 10^{-16} \times \exp(-h/5.2) + 4.8 \times 10^{-15} \times \exp(-h/0.06). \quad (4)$$

数值仿真中取参考光波为 J 波段(中心波长
 $\lambda = 1.25 \mu\text{m}$)^[15]。在该参考波段,上述大气湍流模
型对应 $\xi = 30^\circ$ 天顶角方向的相干长度 $r_0 = 12.6 \text{ cm}$ 、
等晕角 $\theta_0 = 5.25 \mu\text{rad}$ 。为了估计接收口径内的非
等晕误差,这里采用 Zernike 像差模式分解^[14]的方
法研究信标湍流波前探测中的非等晕问题。

3.1 自然信标机制下纯角度非等晕性误差的模拟 结果及相关统计分析

自然信标机制下,可以认为(观测目标附近的)
自然信标与目标之间仅仅存在空间角度差异(即认
为信标与目标到接收口径的距离相同),进而引入信
标探测光路相对于目标校正光路的空间角向采样差
异(即角度非等晕性误差)。将利用数值模拟方式对
(具有一定空间角度偏离)自然信标的纯角度非等晕
波前误差的方差系综统计特征、各阶 Zernike 像差
模式相关统计特性进行考察。

根据 Noll^[16]对 Zernike 正交多项式的基本定
义,可将来自目标、信标的湍流波前 φ_{obj} 、 φ_{GS} 分别
进行 Zernike 模式展开为

$$\begin{cases} \varphi_{\text{obj}}(\mathbf{R}\mathbf{r}) = \sum_j a_{\text{obj-}j} \times Z_j(\mathbf{r}) \\ \varphi_{\text{GS}}(\mathbf{R}\mathbf{r}, \theta) = \sum_j a_{\text{GS-}j} \times Z_j(\mathbf{r}) \end{cases}, \quad (5)$$

因而自然信标相对观测目标的角度非等晕性误差
 $\Delta\varphi_{\text{ang-anisop}}$ 可表述为

$$\Delta\varphi_{\text{ang-anisop}}(\mathbf{R}\mathbf{r}) = \varphi_{\text{obj}}(\mathbf{R}\mathbf{r}) - \varphi_{\text{GS}}(\mathbf{R}\mathbf{r}, \theta) =$$

$$\sum_j (a_{\text{obj-}j} - a_{\text{GS-}j}) \times Z_j(\mathbf{r}), \quad (6)$$

式中 θ 为自然信标与目标之间的空间角度偏离;单
位圆矢量 $\mathbf{r} = (r\cos\psi, r\sin\psi)$ 、 $|r| \leq 1$; R 为接收口
径的半径大小。

表 1 纯角度非等晕性问题的数值模拟参数

Table 1 Examples of pure angular anisoplanatism
in numerical simulation

Parameter	Value
Turbulence model $C_n^2(h)$	Medium turbulence model as shown in Eq. (2)
Isoplanatic angle $\theta_0/\mu\text{rad}$	5.25 ($\lambda = 1.25 \mu\text{m}$)
Guide star mode	Natural guide star
Angular deviation between NGS & object $\theta/\mu\text{rad}$	0~100
Telescope receiving diameter D/m	1.0~10

3.1.1 有限接收口径下的有效纯角度非等晕性方差

通过将数值模拟获得的各 500 帧目标波前与非
同轴自然信标波前分别进行 Zernike 像差模式展
开,并将对应时序同步的两者波前像差进行逐帧、逐
阶模式相减,便可以对湍流大气的纯角度非等晕性
误差与目标湍流波前像差进行逐帧、逐阶模式的分
析和对比。

当 $D = 1.0 \text{ m}$ 时, ($\theta = 50 \mu\text{rad}$ 角度偏离所致)
纯角度非等晕性误差与目标湍流波前的各阶
Zernike 模式方差统计分布规律比较的数值模拟结
果,如图 3 所示。

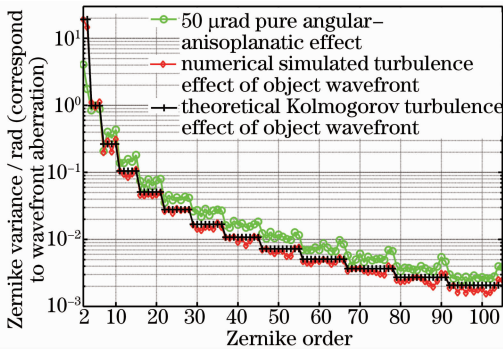


图 3 (50 μrad 角度偏离所致) 纯角度非等晕误差与目标湍流波前的各阶 Zernike 模式统计方差比较

Fig. 3 Comparison of the statistical Zernike variances of the 50 μrad pure angular-anisoplanatic wavefront error and the object turbulence wavefront in numerical simulation

从图 3 中可以看到：在数值模拟目标湍流波

前的 Zernike 方差统计分布满足 Kolmogorov 湍流理论统计规律的前提下, (50 μrad 角度偏离所致) 纯角度非等晕误差的 7 阶以上 Zernike 模式方差均大于目标湍流波前的对应阶 Zernike 模式方差。

Hardy^[17] 认为: Kolmogorov 湍流条件下, 由空间角度偏离 θ 所致纯角度非等晕性方差与大气等晕角 θ_0 之间满足

$$\sigma_{\text{ang_anisop}}^2 = \left[\frac{\theta}{\theta_0} \right]^{5/3}. \quad (7)$$

2006 年, 美国林肯实验室的 Van Dam 等^[18] 认为: Hardy 给出的角度非等晕方差中包含了 piston 项, 但实际上该项对目标校正无影响。因此, 在有效的角度非等晕性方差中应该去除 piston 项的影响。利用 Sasiela 与 Shelton 发展的梅林变换理论, 他们对自然信标模式下的有效角度非等晕方差 $\sigma_{\text{eff-ang_anisop-NGS}}^2$ 进行了推导:

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\text{-NGS}}^2 = 2.606k_0^2 \sec \xi \times \int_0^{H_c} dh C_n^2(h) \int_0^\infty d\kappa \kappa^{-8/3} [1 - J_0(\kappa h \sec \xi \theta)] \\ \sigma_{\text{piston-NGS}}^2 = 2.606k_0^2 \sec \xi \times \int_0^{H_c} dh C_n^2(h) \int_0^\infty d\kappa \kappa^{-8/3} \left[\frac{2J_1(\kappa D/2)}{\kappa D/2} \right]^2 [1 - J_0(\kappa h \sec \xi \theta)] \\ \sigma_{\text{eff-ang_anisop-NGS}}^2 = \sigma_{\theta\text{-NGS}}^2 - \sigma_{\text{piston-NGS}}^2 \end{cases}, \quad (8)$$

式中 κ 为空间频率域坐标, k_0 为参考光波波数, H_c 为信标高度。

通过统计数值模拟获得的上述 500 帧 (50 μrad 角度偏离所致) 纯角度非等晕误差的波面方差 (如图 4 所示), 可以看到在 $D=1.0\text{ m}$ 口径下, 数值模拟 $\theta=50\ \mu\text{rad}$ 角度偏离所致纯角度非等晕性方差的系综均值与 (8) 式计算的有效角度非等晕方差已十分

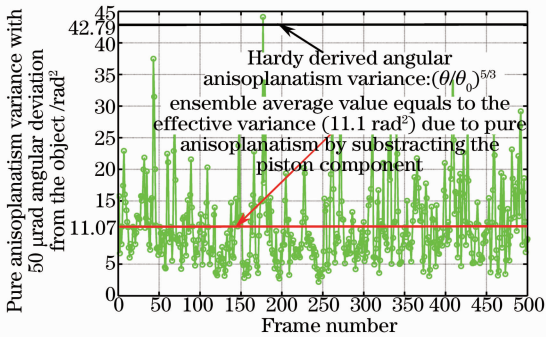


图 4 (50 μrad 角度偏离所致) 纯角度非等晕方差数值模拟系综均值与 (去除 piston 项影响) 理论值的比较

Fig. 4 Comparison of the simulated ensemble average value of 50 μrad pure angular-anisoplanatic variance and the theoretical value (without piston)

接近, 但该系统均值却较 Hardy 理论值 $(\theta/\theta_0)^{5/3}$ 明显偏小, 后者约为前者的 3.85 倍。该接收口径下, 有效角度非等晕方差 $\sigma_{\text{eff-ang_anisop-NGS}}^2$ 与 $(\theta/\theta_0)^{5/3}$ 随 θ 的变化与比较, 如图 5 所示, 随角度偏离 θ 的增大, 有效角度非等晕方差 $\sigma_{\text{eff-ang_anisop-NGS}}^2$ 与 $(\theta/\theta_0)^{5/3}$ 之间的差异将迅速增大。换句话说, piston 项对角度非

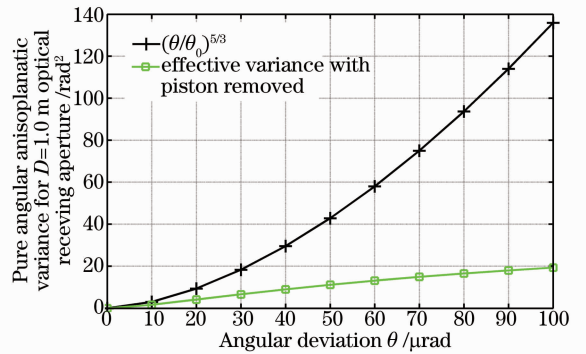


图 5 $D=1.0\text{ m}$ 时不同角度偏离 θ 所致 (去除 piston) 有效角度非等晕方差与 $(\theta/\theta_0)^{5/3}$ 的比较

Fig. 5 Comparison of the effective angular anisoplanatic variance and $(\theta/\theta_0)^{5/3}$ for variable angular deviation θ (without piston) on $D=1.0\text{ m}$

等晕方差 $\sigma_{\theta}^2 - \text{NGS}$ 的贡献将随 θ 增大而更加明显。

3.1.2 有限接收口径对有效纯角度非等晕性方差的影响

根据(8)式可知,一定角度偏离 θ 条件下的湍流大气有效角度非等晕方差应该与光学系统的接收口径 D 密切相关。不同口径条件下,湍流大气的有效角度非等晕方差与 $(\theta/\theta_0)^{5/3}$ 随 θ 的变化曲线,如

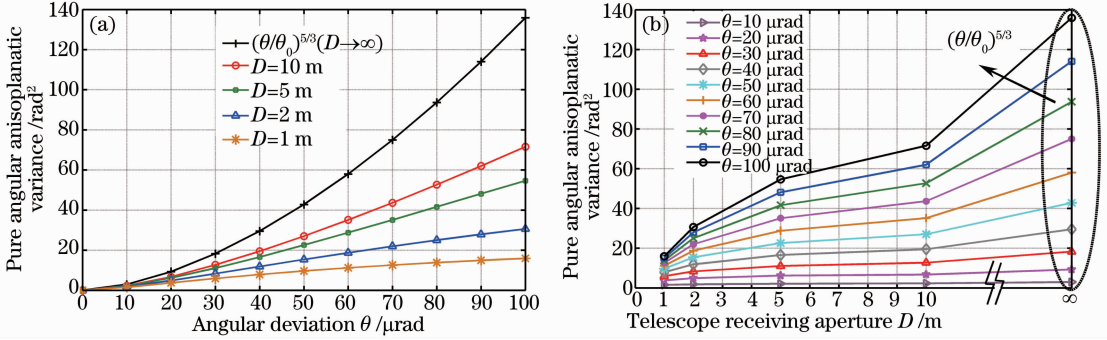


图 6 不同口径 D 条件下湍流大气的(a)有效角度非等晕方差与(b) $(\theta/\theta_0)^{5/3}$ 随 θ 的变化曲线

Fig. 6 (a) Effective angular anisoplanatic variance and (b) $(\theta/\theta_0)^{5/3}$ as functions of angular deviation θ for various aperture diameters D

通过以上分析可以看到,基于梅林变换的理论分析与数值模拟结果均表明:直接利用等晕角 θ_0 评估角度非等晕性误差对自适应光学的影响较严重,实际中应结合具体的系统参数、大气分布,并去除 piston 项方差的影响。

3.1.3 角度偏离对波前模式相对角度非等晕误差的影响

自然信标相对观测目标的非等晕性误差应该是两者空间角度差异的函数。一定接收口径下,角度偏离的增大会使信标探测波前与待校正目标波前之间模式的相关性恶化,进而影响自适应光学性能。这里主要针对角度偏离所致自然信标与目标之间波前模式非等晕误差的影响进行分析。

根据文献[6,8]及(5)式和(6)式,将自然信标波前像差模式的相对角度非等晕误差定义为

$$\epsilon_j^2(\theta) = \frac{\langle (a_{\text{obj}-j} - a_{\text{GS}-j})^2 \rangle}{\langle a_{\text{obj}-j}^2 \rangle}, (j \geq 2). \quad (9)$$

将上述由数值模拟获得的纯角度非等晕性误差与目标湍流波前的 Zernike 模式统计方差分布 $\langle (a_{\text{obj}-j} - a_{\text{GS}-j})^2 \rangle$ 与 $\langle a_{\text{obj}-j}^2 \rangle$ 进行比较可得, $D = 1.0 \text{ m}$ 时, $\theta = 50 \mu\text{rad}$ 角度偏离对自然信标波前的各阶模式相对角度非等晕误差的影响,如图 7 所示。当 Zernike 模式阶数 $j \geq 7$ 时,利用自然信标校正目标时的残余模式统计方差 $\langle [a_{\text{obj}-j} - a_{\text{GS}-j}]^2 \rangle$ 已经大于目标波前的对应阶模式统计方差 $\langle a_{\text{obj}-j}^2 \rangle$,此时的模式相对角

度非等晕误差 $\epsilon_j^2(\theta) > 1$,也就是说 $50 \mu\text{rad}$ 角度偏离已经使信标波前与目标波前之间 7 阶以上 Zernike 模式相关性退化。

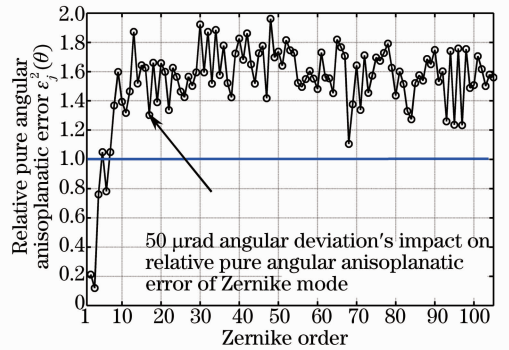


图 7 $50 \mu\text{rad}$ 角度偏离对各阶 Zernike 模式相对纯角度非等晕误差的影响

Fig. 7 $50 \mu\text{rad}$ angular deviation impact on the relative pure angular anisoplanatic error of Zernike mode

3.2 人造信标-纯聚焦非等晕性误差的模拟结果及相关统计分析

人造信标工作机制下,由于信标无法提供大气湍流的波前倾斜信息^[8]。因此人造信标波前非等晕问题讨论需去除平移及倾斜项的影响。

3.2.1 同轴信标高度对纯聚焦非等晕性方差的影响

当角度偏离 $\theta = 0$ 时,即信标探测光轴与目标校正光轴同轴,此时有限高度的信标(相对目标)仅存在其高度至接收口径所构圆锥体内湍流欠采样的聚

焦非等晕效应。在 $D=1.0\text{ m}$ 接收口径下, 利用数值模拟方式得到不同高度信标的聚焦非等晕性误差的方差(500 帧)系综均值与其理论值比较, 如下表 2 所示。

表 2 $\lambda=1.25\ \mu\text{m}$ 的条件下不同高度人造信标纯聚焦非等晕性方差的数值模拟系综均值与理论值的比较

Table 2 Comparison of the numerical simulated ensemble average and the theoretical values for different ranges

LGS focal-anisoplanatic variances at $\lambda=1.25\ \mu\text{m}$

LGS mode	Turbulence model $C_n^2(h)$	Medium turbulence model as shown in Eq. (2)
	Numerical simulated ensemble average value of the focal-anisoplanatic variance / rad^2	Theoretical value of the focal-anisoplanatic variance in Kolmogorov turbulence / rad^2
10 km Rayleigh-LGS	3.40	3.43
15 km Rayleigh-LGS	2.83	2.85
20 km Rayleigh-LGS	2.30	2.36
90 km Sodium-LGS	0.30	0.36

这里对纯聚焦非等晕性方差的理论值计算, 利用了 Sasiela 在文献[19]中推导的公式:

$$\sigma_{\text{cone-effect}}^2 = k_0^2 D^{5/3} \sec \xi \times \left[0.057 \times \mu_0^+(H) + 0.5 \times \frac{\mu_{5/3}^-(H)}{H^{5/3}} - 0.452 \times \frac{\mu_2^-(H)}{H^2} \right], \quad (10)$$

式中 $\mu_m^+(H)$ 、 $\mu_m^-(H)$ 分别定义为对应信标高度 H 的 m 阶湍流上限矩与下限矩, 其可表示为

$$\begin{aligned} \mu_m^+(H) &= \int_H^\infty C_n^2(h) \times h^m dh, \\ \mu_m^-(H) &= \int_0^H C_n^2(h) \times h^m dh. \end{aligned} \quad (11)$$

由表 2 可以看出: 随着信标高度的增加, 其聚焦非等晕性方差统计均值越来越小。通过数值模拟得到不同高度聚焦非等晕性误差的方差系综均值均同其理论值接近。

3.2.2 同轴信标高度对纯聚焦非等晕性误差的模式方差影响分析

不同高度人造信标工作机制下, 通过将数值模

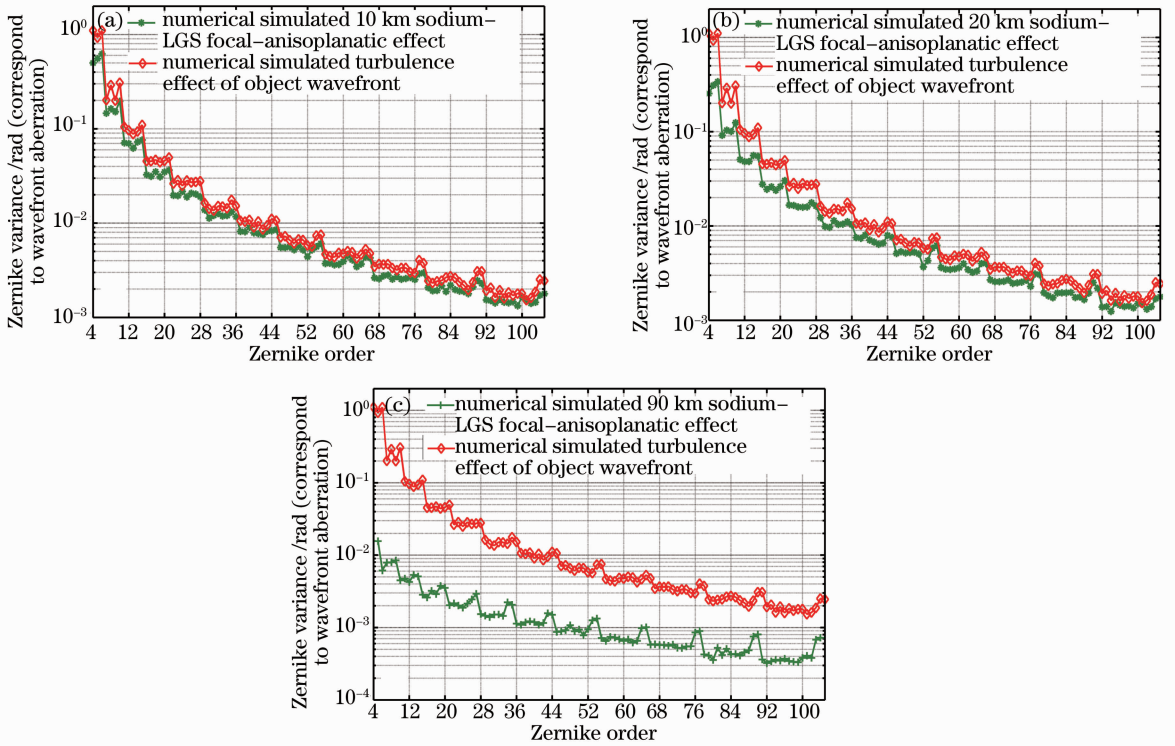


图 8 数值模拟不同高度人造信标聚焦非等晕波前误差的 Zernike 统计方差分布。(a) 10 km 瑞利信标; (b) 20 km 瑞利信标; (c) 90 km 钠信标

Fig. 8 Numerical simulated focal-anisoplanatic wavefront aberration's Zernike variances for different ranges LGS. (a) 10 km Rayleigh-LGS; (b) 20 km Rayleigh-LGS; (c) 90 km Sodium-LGS

拟获得的各 500 帧目标波前与同轴人造信标波前分别进行 Zernike 像差模式展开,并将对应时序同步的两者波前像差进行逐帧、逐阶模式相减,便可以对湍流大气纯聚焦非等晕性波前像差与目标湍流波前畸变像差进行逐帧、逐阶模式的分析和对比。

不同高度人造信标聚焦非等晕误差与目标湍流波前各阶模式统计方差的比较结果,如图 8 所示。由图 8 可以看出:1) 利用同轴人造信标校正目标时的各阶残余模式统计方差 $\langle (a_{\text{obj}-j} - a_{\text{GS}-j})^2 \rangle$ 均小于目标波前的对应阶模式统计方差 $\langle a_{\text{obj}-j}^2 \rangle$,即表明无论其高度如何,同轴信标波前与目标波前之间的各阶 Zernike 模式均存在相关性;2) 同轴瑞利信标工作机制下,随信标采样高度的增加,利用其校正目标时的低阶 ($j \leq 36$) 残余模式统计方差 $\langle (a_{\text{obj}-j} - a_{\text{GS}-j})^2 \rangle$ 越小;即同轴瑞利信标的高度越高,其探测波前与目标波前之间的低阶 Zernike 模式相关性越好;3) 同轴钠信标工作机制下,利用其校正目标时的各阶残余模式统计方差均比同轴瑞利信标小。相比于瑞利信标,由于同轴钠信标高度所致大气湍流欠采样的锥体效应小,因而其探测波前与目标波前的各阶 Zernike 模式之间均具保持着非常好的相关性。

4 空间角度差异对信标探测波前模式非等晕性误差的影响

人造信标工作机制下,当信标与目标非同轴时

(即 $\theta \neq 0$),有限高度的信标(相对目标)在其高度至有限望远镜接收口径所构圆锥体内不仅存在湍流欠采样的聚焦非等晕效应,而且包含两者湍流传输光路空间角向差异所致的角度非等晕效应。信标高度越高时,其聚焦非等晕性减小;与此同时,信标与目标光线路径之间由角度差异对应横向偏移的增大,使其角度非等晕性更加明显。因而,此时的非等晕误差应该受到人造信标和目标之间空间高度与空间角度差异相互耦合的综合影响。

根据第 3.1.3 节的分析及(9)式,这里对小角度偏离所致人造信标波前像差模式相对非等晕误差的影响进行讨论。角度偏离对不同高度瑞利信标波前各阶模式相对非等晕误差的影响,如图 9 所示。由图 9 可以看出:1) 非同轴瑞利信标高度的增加,导致信标与目标湍流光路之间由角度差异对应横向偏移的增大,使其对角度非等晕性更加敏感,进而带来模式相对非等晕性误差的明显变化;2) 相对目标 $30 \mu\text{rad}$ 的角度偏移对 10 km 瑞利信标探测波前模式相对非等晕误差的影响并不明显,因为此时信标的聚焦点仍然位于接收口径以内;3) 对于 20 km 的瑞利信标, $30 \mu\text{rad}$ 的角度偏移已使信标大气层内聚焦点移至接收孔径外缘,此时的角度非等晕性已带来信标探测波前 30 阶以上模式相对非等晕误差的增大即 $\epsilon_j^2(\theta) > 1$,这也就意味着信标波前与目标波前之间部分模式相关性在一定程度上退化。

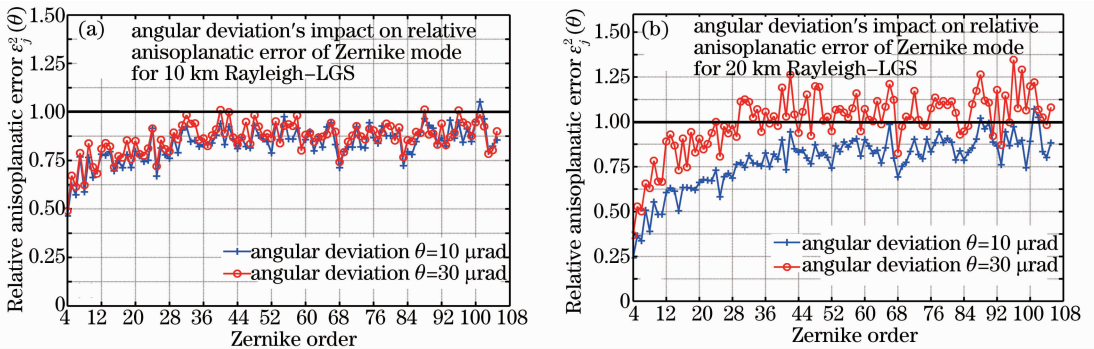


图 9 角度偏移对不同高度瑞利信标波前模式相对非等晕误差的影响。(a) 10 km 瑞利信标; (b) 20 km 瑞利信标
Fig. 9 Angular deviation impact on the aberration mode relative anisoplanatic error of Rayleigh-LGS with different altitudes.

(a) 10 km Rayleigh-LGS; (b) 20 km Rayleigh-LGS

不同角度偏移条件下($0 < \theta < 50 \mu\text{rad}$),通过统计数值模拟不同高度(10~20 km)瑞利信标非等晕性误差的方差系综均值,可以发现:在 $D = 1.0 \text{ m}$ 时,当瑞利信标和目标之间的角度偏移 $\theta < 30 \mu\text{rad}$ 时,整层大气对瑞利信标造成的综合非等晕误差仍随信标高度的增加而减小。这便意味着对于有限高

度大气层内聚焦点尚未偏出接收孔径的非同轴瑞利信标,其高度越高时,则利用其校正目标湍流波前后的残余非等晕性方差越小。此时,由信标高度增加对其聚焦非等晕性误差的影响相对(信标与目标之间)非同轴偏差对其角度非等晕性误差的影响将占主导作用。

根据前面的数值模拟分析可推测:对应整层大气高度内湍流采样主光路均未偏离出接收孔径的(相对目标)非同轴钠信标,整层大气对其造成的综合非等晕误差将小于对(相同角度偏移)瑞利信标造成的综合非等晕误差,此时采用非同轴钠信标校正目标波前时仍能获得较瑞利信标更小的残余非等晕性方差。

角度偏移继续增大时($\theta \approx 50 \mu\text{rad}$),整层大气对不同机制信标模式相对非等晕误差的影响,如图 10 所示。如图 10 可以看出:对于较大的角度偏移,由信标高度增加带来的偏离接收孔径内目标光波传输光路的信标湍流误采样,导致其模式相对非等晕性误差的明显增大。此时,信标高度增加所致(信标与目标光路之间)偏离望远镜口径横向位移的增大对其角度非等晕误差的影响相对信标高度对其聚焦非等晕误差的影响将占主导作用。因此,角度偏移较大时,采用钠信标时整层大气导致的非等晕误差将大于采用瑞利信标时的误差。当非同轴信标的高度无限增加时,上述角度与聚焦综合非等晕性问题将演化成自然信标的纯角度非等晕性问题。在如图 10 所示角度偏移 $\theta \approx 50 \mu\text{rad}$ 情况下,整层大气对钠信标造成的非等晕误差与大气纯角度非等晕误差(去平移、倾斜)之间的相对差异,源于非同轴信标至望远镜的圆锥体光路在一定程度上减少了相对偏离(接收孔径内)目标光路的角向湍流采样差异,此时自然信标和钠信标会劣于瑞利信标。

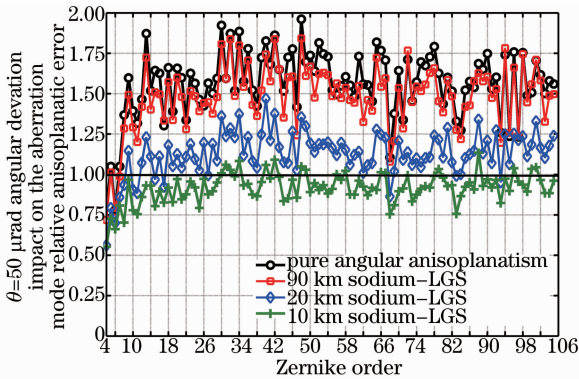


图 10 ($50 \mu\text{rad}$ 角度偏离)对不同机制信标波前模式相对非等晕误差的影响

Fig. 10 $50 \mu\text{rad}$ angular deviation impact on the aberration mode relative anisoplanatic error of different guide stars

5 结 论

信标的提出解决了自适应光学系统的湍流参考源问题。但实际上由于信标与目标之间存在空间角

度与空间高度差异,进而引入信标探测波前与待校正目标波前之间的非等晕误差,对自适应光学系统的校正效果产生影响。利用数值建模方式对信标湍流波前探测中的非等晕问题进行了系统性研究。通过对不同机制信标(包括自然信标、人造信标)波前与目标波前的各阶像差模式特性的分析比较发现:湍流大气的有效纯角度非等晕方差与传统评估值 $(\theta/\theta_0)^{5/3}$ 之间的差异随角度偏离 θ 的增加而迅速加大;因此,直接利用大气等晕角 θ_0 评估纯角度非等晕误差对自适应光学校正的影响表现得比较严重,实际中应结合大气分布、系统参数,并去除 piston 项方差的影响。人造信标机制下的湍流大气纯聚焦非等晕误差随信标高度的增加而减小,但由角度偏离所致信标与目标光线路径之间横向偏移(随信标高度增加)的增大,使其对角度非等晕性更加敏感,进而带来模式相对非等晕性误差的明显变化。角度偏离较小时,由信标高度增加对聚焦非等晕误差的影响较(信标与目标)非同轴偏差对其角度非等晕误差的影响大,此时采用钠信标的非等晕误差小于瑞利信标的误差;角度偏离较大时,偏离接收口径内目标光路的湍流误采样,导致信标模式非等晕误差明显增大,此时钠信标可能会劣于瑞利信标。另外信标非等晕误差的特性与大气湍流廓线分布密切相关。上述理论研究结果的获得,为进一步开展外大气信标自适应光学的实验研究提供了理论参考。

参 考 文 献

- 1 R Foy, A Labeyrie. Feasibility of adaptive telescopes with laser probe[J]. Astron Astrophy, 1985, 152: 129-131.
- 2 L A Thompson, C S Gardner. Experiments on laser guide stars at Mauna Kea Observatory for adaptive imaging in astronomy[J]. Nature, 1987, 328(6127): 229-231.
- 3 R Q Fugate, D L Fried, G A Ameer, et al.. Measurement of atmospheric wavefront distortion using scattered light from a laser guide star[J]. Nature, 1991, 353(6340): 144-146.
- 4 R Foy. Laser guide stars: principle, cone effect and tilt measurement[J]. Optics in Astrophysics, 2005. 249-274.
- 5 R J Sasiela. Electromagnetic Wave Propagation in Turbulence: Evaluation and Application of Mellin Transform [M]. Washington: SPIE Press, 2007.
- 6 G Molodij, G Rousset. Angular correction of Zernike polynomials for a laser guide star in adaptive optics[J]. J Opt Soc Am A, 1997, 14(8): 1949-1966.
- 7 Wan Min, Su Yi, Xiang Rujian. Turbulence-induced low order aberrations of optical wavefronts in partial adaptive compensation with Rayleigh beacon or sodium beacon[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2001, 13(3): 282-286.
万 敏, 苏 毅, 向汝健. 激光导引星自适应光学系统对大气湍流低阶像差校正效果分析[J]. 强激光与粒子束, 2001, 13(3): 282-286.
- 8 Shen Feng, Jiang Wenhan. Modal decomposition of atmospheric error of atmospheric turbulence for a laser guide star[J]. Acta

- Optica Sinica, 2003, 23(3): 348–355.
- 沈 锋, 姜文汉. 激光导引星大气湍流波前非等晕性误差的像差模式分解[J]. 光学学报, 2003, 23(3): 348–355.
- 9 J A Fleck, J R Morris, M D Feit. Time-dependent propagation of high energy laser beams through atmosphere[J]. Appl Phys, 1976, 10(2): 129–160.
- 10 B J Herman, L A Strugala. Method for inclusion of low-frequency contributions in numerical representation of atmospheric turbulence[C]. SPIE, 1990, 1221: 183–192.
- 11 H X Yan, S S Li, D L Zhang, *et al.*. Numerical simulation of an adaptive optics system with laser propagation in the atmosphere [J]. Appl Opt, 2000, 39(18): 3023–3031.
- 12 R Holzlöhner, D B Calia, W Hackenberg. Physical optics modeling and optimization of laser guide star propagation[C]. SPIE, 2008, 7015: 701521.
- 13 Wu Hanling. Numerical Simulation and Theoretical Analysis of Some Problems in Light Propagation through the Atmosphere and Its Adaptive Optics Phase Compensation[D]. Beijing: Institute of Mechanics Chinese Academy of Science, 2009. 63–68.
- 吴哈玲. 光波大气传输及其自适应光学相位校正中若干问题的数值模拟研究与理论分析[D]. 北京: 中国科学院力学研究所, 2009. 63–68.
- 14 J L Buffton. Comparison of vertical profile turbulence structure with stellar observations[J]. Appl Opt, 1973, 12(8): 1785–1793.
- 15 Y Minowa, Y Hayano, H Terada, *et al.*. Subaru laser guide adaptive optics systems: performance and science operation[C]. SPIE, 2012, 8447: 84471F.
- 16 R J Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence[J]. J Opt Soc Am A, 1976, 66(3): 207–211.
- 17 J W Hardy. Adaptive Optics for Astronomical Telescopes[M]. New York: Oxford University Press, 1998, 101–103.
- 18 M A Van Dam, R J Sasiela, A H Bouchez, *et al.*. Angular anisoplanatism in laser guide star adaptive optics[C]. SPIE, 2006, 6272: 627231–627238.
- 19 R J Sasiela. Wave-front correction by one or more synthetic beacons[J]. J Opt Soc Am A, 1994, 11(1): 379–393.

栏目编辑: 王晓琰