

# 强度传输方程和角谱迭代融合的相位检索算法

程 鸿 沈 川 张 成 张 芬 韦 穗

(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室, 安徽 合肥 230039)

**摘要** 相位检索技术将光学与计算相结合,从强度测量中恢复相位,包括强度传输方程法和角谱迭代法。但前者仅对近场相位的恢复有效,其基于相干照明的假设前提使得该方法不能直接应用于自然场景的相位检索中;而后者具有迭代不确定性、收敛速度慢等缺点。探讨了在相干照明情况下传统强度传输方程法和角谱迭代法相融合的相位检索算法,将该融合法进一步扩展,提出了适用于自然场景透镜模型的相位检索方法,即使用强度传输方程法计算像平面的相位,并将该相位值作为角谱迭代的初始值,根据光路的可逆性,迭代出物面的相位信息,分别给出了两种情况下的实验结果。

**关键词** 图像处理;相位检索;强度传输方程;角谱迭代;自然场景;透镜

中图分类号 O436 文献标识码 A doi: 10.3788/CJL201441.0609001

## Phase Retrieval Algorithm Combining Transport of Intensity Equation and Angular Spectrum Iterative

Cheng Hong Shen Chuan Zhang Cheng Zhang Fen Wei Sui

(Key Laboratory of Intelligent Computing & Signal Processing, Ministry of Education, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China)

**Abstract** Phase retrieval technology combines optics and calculations to recover phase from the intensity measurement, including transport of intensity equation and angular spectrum iterative. Unfortunately, the former is only effective for near-field phase retrieval, and it can not be directly applied to the phase retrieval of natural scenes, because this method is based on the assumption of coherent illumination. The latter has many shortcomings including iterative uncertainty, slow convergence and so on. Traditional transport of intensity equation combining with angular spectrum iterative is explored in the case of coherent illumination. The fusion method is further expanded and the phase retrieval method is proposed for natural scene lens model. The phase of the image plane is calculated using transport of intensity equation, and the value is used as the initial value of the angular spectrum iterative. The phase information in the object plane is acquired according to the reversibility of the optical path. The results of experiments are given in these two cases.

**Key words** image processing; phase retrieval; transport of intensity equation; angular spectrum iterative; natural scenes; lens

**OCIS codes** 070.7345; 070.2580; 200.4740; 110.1758

## 1 引 言

完整的光场包含了振幅(亮度)、波长(颜色)和相位(一个波长内相位等同于深度)等信息。统计表明大约 75% 的信息在相位项中,但是光场的振荡频率接近  $10^{15}$  Hz 时,现有的光学探测仪器不能直接记录光场的相位<sup>[1]</sup>。相位检索技术是指利用测量到

的强度信息通过计算的方法得到相位,为全息显示<sup>[2]</sup>、光场重构进而实现三维(3D)显示提供所需要的数据信息,是现代光学发展的一个重要研究领域。

目前,迭代法和强度传输方程(TIE)法是两类典型的非干涉相位检索技术。迭代法中的经典算法是 Gerchberg-Saxton (GS)法<sup>[3]</sup>,随后,出现了包括

收稿日期: 2013-11-25; 收到修改稿日期: 2013-12-25

基金项目: 国家自然科学基金(61301296,61377006,61201396)、NSFC-广东联合基金(U1201255)、高等学校博士学科点专项科研基金优先发展领域课题(20113401130001)、安徽大学博士科研启动经费(33190219)

作者简介: 程 鸿(1981—),女,博士,讲师,主要从事计算信号处理方面的研究。E-mail: chenghong@ahu.edu.cn

错误减少算法<sup>[4]</sup>、混合输入输出法、梯度搜索算法<sup>[5]</sup>、角谱迭代算法<sup>[6]</sup>等改进算法。角谱迭代算法基本思想是用随机相位作为迭代初始相位,利用平面角谱传播原理,在物面和像面之间反复迭代,从而获得物面相位信息。TIE 法最早由 Teague<sup>[7]</sup> 在 1983 年提出,可以通过格林函数法<sup>[8]</sup>、泽尼克多项式法<sup>[9-10]</sup>、多重网格法<sup>[11]</sup>以及傅里叶变换法<sup>[12]</sup>等求解方程从而得到相位信息。上述两类相位检索技术都有自己的应用局限:角谱迭代法具有迭代不确定性、收敛速度慢等缺点;而 TIE 法计算速度快,对低频部分重构有效,TIE 仅是由菲涅耳(或基尔霍夫)积分的平方模描述的更一般的非线性方程的一个线性逼近<sup>[13]</sup>。适用于成像距离较小的情况,即对于近场相位的恢复是有效的。

自然场景相位检索具有广泛的应用前景,如在军事上,在物体形状不改变的伪装形式中,相位检索技术可以把相位(深度)加到有限透视的景物和图像中,给出伪装景物中的结构信息,该形状信息不随振幅或颜色对比度而变化,并提供更好的识别。研究有效地适用于自然场景全光场的相位检索方法具有重要的理论意义和应用价值。可惜的是,TIE 法本质上是在相干照明的前提下推导出来的,不能直接应用到含透镜成像的自然场景的相位检索中<sup>[14]</sup>。

本文探讨了相干照明情况下的相位检索方法,将传统的 TIE 法和角谱迭代法相结合求解相位信息,并给出了模拟实验结果。推导了基于自然场景透镜模型的相位检索方法,并通过搭建的光学系统采集三幅强度图像计算了物面的相位。

## 2 相干照明下的融合相位检索算法

### 2.1 TIE 法

当一平面波通过试片并与试片作用后,波的前进方向会发生改变,最后在成像平面上形成强度的分布变化,如图 1 所示。这些影像波的强度分布关系式包括了相位变化以及振幅变化的信息。

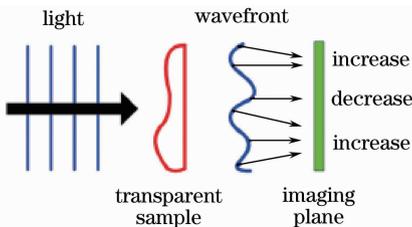


图 1 波传播示意图

Fig. 1 Schematic diagram of wave propagation

强度传输方程把物平面上波的强度和相位信息与波传播方向上的强度变化率联系起来,将不可见的相位变化转化成可见的强度变化,并通过观察强度的传播来显示相位的梯度,如下式所示:

$$-k \frac{\partial I(x, y, z)}{\partial z} = \nabla \cdot [I(x, y, z) \nabla \varphi(x, y, z)], \quad (1)$$

式中  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  表示波长,  $I$  和  $\varphi$  分别代表相干光场的强度和相位。因此,可以利用记录不同成像平面上的强度分布,由 TIE 解得相位信息。强度的偏导数  $\partial I(x, y, z)/\partial z$  的计算是个重要问题,通常情况下,光强变化可以利用两个临近平面上散焦图像强度的有限差分近似替代,同时误差降到了距离的二阶<sup>[15]</sup>,即

$$\frac{\partial I(x, y, z)}{\partial z} \approx \frac{I(x, y, z + \Delta z) - I(x, y, z - \Delta z)}{2\Delta z}. \quad (2)$$

Allen 等<sup>[16]</sup>提出可以使用傅里叶算子分步计算得到方程的解。设

$$\nabla^2 \psi = -k \frac{\partial I}{\partial z}, \quad (3)$$

对任意函数  $f(x, y)$ ,其傅里叶性质可描述为  $\nabla f(x, y) = ix\mathcal{F}^{-1}q_x\mathcal{F}[f(x, y)] + iy\mathcal{F}^{-1}q_y\mathcal{F}[f(x, y)]$ , (4)

$$\nabla^2 f(x, y) = -\mathcal{F}^{-1}(q_x^2 + q_y^2)\mathcal{F}[f(x, y)], \quad (5)$$

式中  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$  分别表示  $x$  和  $y$  方向的单位矢量,  $q_x$  和  $q_y$  分别表示傅里叶空间对应  $x$  和  $y$  的变量,  $\mathcal{F}(\cdot)$  和  $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$  分别对应傅里叶变换和逆傅里叶变换。结合 (3) 式和 (5) 式得

$$\psi(x, y, z) = \mathcal{F}^{-1}(q_x^2 + q_y^2)\mathcal{F}\left[k \frac{\partial I(x, y, z)}{\partial z}\right]. \quad (6)$$

再次使用傅里叶性质解得相位的值,可表示为

$$\varphi(x, y, z) = -\mathcal{F}^{-1}[(q_x^2 + q_y^2)^{-1}] \cdot \mathcal{F}^{-1}\{\nabla[I^{-1}(x, y, z) \nabla \psi(x, y, z)]\}. \quad (7)$$

### 2.2 角谱迭代法

假设物面和像面之间的光场变换关系服从标量衍射理论,根据平面角谱传播理论,利用角谱传递函数可以构建物面和像面光场之间的正向和逆向衍射计算过程。那么,物面光场  $U_0(x, y)$  和像面光场  $U_d(x, y)$  之间满足如下关系:

$$U_d(x_2, y_2) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[U_0(x_1, y_1)H(f_{x_j}, f_{y_j})]\}, \quad (8)$$

式中

$$H(f_{x_j}, f_{y_j}) = \exp\left[ikd \sqrt{(1 - (\lambda f_{x_j})^2 - (\lambda f_{y_j})^2)}\right]$$

为角谱传播的传递函数,  $f_{x_j} = \frac{m}{\Delta L}$ ,  $f_{y_j} = \frac{n}{\Delta L}$  ( $m, n$  为采样点数,  $m, n = -N/2, -N/2+1, \dots, N/2-1$ ,  $N$  为采样总数),  $d$  为物面与像面之间的距离 ( $d$  为正时表示正向衍射传播过程, 反之表示逆向衍射传播过程),  $\Delta L$  为计算宽度。角谱迭代算法的主要思想是: 选取随机相位作为物面波的初始相位, 正向传播得到像面的复振幅, 接着用测量得到的强度替换计算值, 逆向传播得到物面波的复振幅, 同样用测量得到的强度替换计算值, 再正向传播, 反复迭代, 直到定义的误差达到预先设定的精度或者设定的最大迭代次数为止。

### 2.3 融合相位检索算法

在第 1 节中提到, 上述两类相位检索技术都有自己的应用局限。因此, 在相干照明下, 可以将两者有效地结合在一起, 即先利用 TIE 算法计算出相位, 并作为角谱迭代算法的初始值, 然后再使用角谱迭代恢复该区域的相位, 降低迭代时间, 提高算法精度。下面把这种方法简称为融合法。具体算法步骤如下:

给定一幅聚焦平面强度图像  $I_f$ , 两幅与聚焦平面相同距离  $\Delta z$  的散焦图像  $I_{-\Delta z}$  和  $I_{\Delta z}$ , 相干光波长  $\lambda$ , 传播距离  $d$ , 物面的强度  $I_0$ 。

- 1) 用(2)式计算强度微分  $\partial I(x, y, z) / \partial z$ ;
- 2) 用(6)式计算  $\psi(x, y, z)$ ;
- 3) 利用(4)所示式的傅里叶性质计算  $\nabla \psi(x, y, z)$ ;
- 4) 利用(4)、(5)式所示的傅里叶性质计算  $\nabla [I_f^{-1}(x, y, z) \nabla \psi(x, y, z)]$ ;
- 5) 用(7)式计算初始相位  $\varphi_0$ ;
- 6) 以相位  $\varphi_0$  作为物面波的初始相位分布, 结合已知的  $I_0$ , 得到初始的复振幅  $U_0 = I_0 \exp(i\varphi_0)$ ;
- 7) 用(8)式对  $U_0$  进行正向的角谱传播, 得到聚焦面上的复振幅  $U_d = I_d \exp(i\varphi_d)$ ;
- 8) 保留相位  $\varphi_d$ , 把振幅  $I_d$  变换成已知的聚焦面的强度  $I_f$ , 即新的像面波函数变为  $U'_d = I_f \exp(i\varphi_d)$ ;
- 9) 用(8)式对  $U'_d$  进行逆向的角谱传播, 计算得到物面上的复振幅  $U'_0 = I'_0 \exp(i\varphi)$ ;
- 10) 保留相位  $\varphi$  不变, 将振幅  $I'_0$  变换为  $I_0$ , 即复振幅变为  $U'_0 = I_0 \exp(i\varphi)$ , 作为下一个迭代循环的初始物波函数, 反复迭代, 直到定义的误差达到预先设定的精度或者设定的最大迭代次数为止。

输出物面相位  $\varphi$ 。

模拟实验中图像大小为  $128 \text{ pixel} \times 128 \text{ pixel}$ , 物体的强度  $I$  和相位  $\varphi$  设置为

$$\begin{cases} I = 0.1 + 0.02[\text{rand}(x, y) - 0.5] \\ \varphi = \cos(1000\pi x) + \cos(4000\pi y) \end{cases}, \quad (9)$$

式中  $1 \leq x \leq 128, 1 \leq y \leq 128$ ,  $\text{rand}(\cdot)$  表示随机函数。模拟得到的结果如图 2 所示。

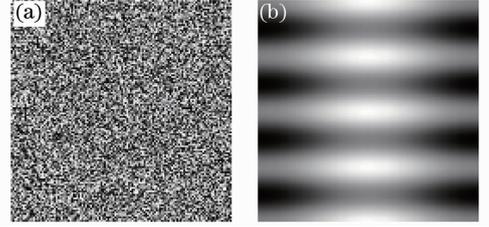


图 2 物平面的(a)强度和(b)相位分布

Fig. 2 (a) Intensity and (b) phase distributions at object plane

根据光传播公式模拟欠焦、聚焦和过焦面上的强度图像<sup>[16]</sup>。传播距离  $d = 0.2 \text{ mm}$ , 此时, TIE 法、角谱迭代法以及融合法的相位检索结果如图 3 所示。为了更好地说明融合法的优势性, 令第  $k$  次迭代得到的像面的光强计算值为  $I_k^*$ , 真实测量值为  $I_1$ , 则该次迭代的强度误差 (SSE) 描述为  $E = \sum (I_k^* - I_1)^2 / \sum (I_1)^2$ , 对应的误差曲线如图 4 所示, 其中横坐标是迭代次数 (本次实验迭代次数等于

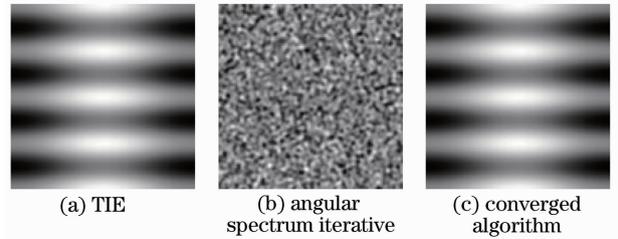


图 3 不同方法的相位检索结果

Fig. 3 Phase retrieval results using different algorithms

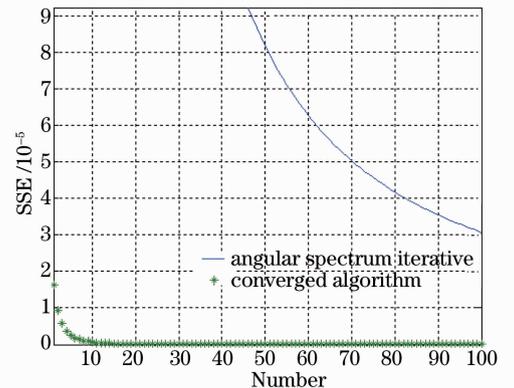


图 4 强度误差曲线图

Fig. 4 Error curves of intensity

100), 纵坐标是误差值。可以看出, 无论是收敛速度还是误差值, 融合法都优于单独的角谱迭代法。

定义计算出的相位为  $\varphi_r$ , 原始相位为  $\varphi$ , 相对均方根(RMS)误差计算公式如下:

$$\varphi_{\text{RMS-error}} = 100 \times \sqrt{\frac{\sum (\varphi_r - \varphi)^2}{\sum \varphi^2}} \% \quad (10)$$

各种方法计算结果的 RMS 如表 1 所示。

表 1 相对均方根误差  
Table 1 RMS-error

| Distance<br>$d / \text{mm}$ | RMS-error |                               |                        |
|-----------------------------|-----------|-------------------------------|------------------------|
|                             | TIE       | Angular spectrum<br>iterative | Converged<br>algorithm |
| 0.2                         | 2.0259%   | 51.4730%                      | 2.0101%                |

### 3 自然场景中的融合相位检索算法

自然场景光源本身具有非相干的特性, 与传统 TIE 所基于的相干假设前提不符合。文献[17]指出即使在空间非相干的情况下, 聚焦平面位置上的 TIE 依然是成立的, 本文不再讨论。另一方面, 在自然光条件下成像通常需要应用透镜聚光, 因此必须考虑透镜的相位调制作用, 示意图如图 5 所示。假设物体放置在离透镜距离为  $R$  的位置上, 其波振面的复振幅用  $U_0(x, y) = I_0 \exp(i\varphi_0)$  表示, 透镜前后波振面的复振幅分别用  $U_l(x, y) = I_l \exp(i\varphi_l)$  和  $U'_l(x, y) = I'_l \exp(i\varphi'_l)$  表示。根据透镜相位变换特性, 两者之间应满足<sup>[18]</sup>

$$U'_l(x, y) = U_l(x, y)P(x, y)\exp\left[-i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right], \quad (11)$$

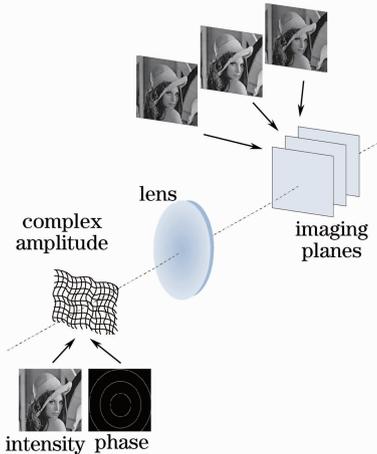


图 5 含透镜的光传播示意图

Fig. 5 Schematic diagram of light propagation with lens

式中  $P(x, y)$  表示透镜的光瞳函数,  $P(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{inner} \\ 0, & \text{outer} \end{cases}$ 。中心成像平面离透镜距离  $v$  处及与中心像平面距离分别为  $-\Delta z$ 、 $\Delta z$  的像平面的复振幅分别对应描述成  $U_v(x, y)$ 、 $U_{-\Delta z}(x, y)$  和  $U_{\Delta z}(x, y)$ 。

根据自由空间光的传播原理,  $U_{-\Delta z}$  和  $U_{\Delta z}$  与  $U_v(x, y)$  之间分别满足菲涅耳积分公式。文献[13]中指出, 菲涅耳积分可以写成一个收敛指数序列的形式。在近场情况下, 指数序列可以近似用前两阶表示为

$$U_{-\Delta z} \approx \exp(-ik\Delta z)U_v(x, y) + \frac{-i\lambda\Delta z \exp(-ik\Delta z)}{4\pi} \nabla^2 U_v(x, y), \quad (12)$$

$$U_{\Delta z} \approx \exp(ik\Delta z)U_v(x, y) + \frac{i\lambda\Delta z \exp(ik\Delta z)}{4\pi} \nabla^2 U_v(x, y). \quad (13)$$

由此推导出三个强度平面之间满足的 TIE 形式为

$$\nabla \cdot (I_v \nabla \varphi_v) \approx \frac{k}{\Delta z} (I_{-\Delta z} - I_v), \quad (14)$$

$$-\nabla \cdot (I_v \nabla \varphi_v) \approx \frac{k}{\Delta z} (I_{\Delta z} - I_v). \quad (15)$$

将(14)、(15)式相加整理得

$$-\nabla \cdot (I_v \nabla \varphi_v) \approx \frac{k}{2\Delta z} (I_{\Delta z} - I_{-\Delta z}). \quad (16)$$

利用三个平面的强度信息结合(16)式即可求解得到中心像平面的相位信息  $\varphi_v$ 。根据光路的可逆性, 逆向求解物面的相位。

- 1) 以  $\varphi_v$  作为初始相位分布, 结合已知的  $I_v$ , 得到初始的像平面复振幅  $U_v = I_v \exp(i\varphi_v)$ ;
- 2) 根据光传播公式逆向传播距离  $v$  近似得到透镜后的强度信息  $I'_l$ ;
- 3) 根据角谱迭代的算法步骤, 求解透镜后的相位  $\varphi'_l$ ;
- 4) 利用(11)式计算透镜前的相位  $\varphi_l$ ;
- 5) 使用步骤 2) 逆向传播距离  $R$  近似得到物平面的强度信息  $I_0$ ;
- 6) 使用步骤 2) 逆向传播距离  $R$  近似得到物平面的相位  $\varphi_0$ 。

搭建了单 CCD 图像数据采集光学平台系统, 如图 6 所示。相机镜头在实验中起聚焦作用, IMB-147FT CCD 摄像机用来实时捕捉聚焦和散焦平面图像, 带有液晶显示屏的 N55-462 高精度平移台可以方便地读出测微计前后移动的距离, 分辨率为 0.001 mm。实验中, 将物体放置在相机镜头前方  $R=500$  mm 处, 同时调整镜头焦距和平移台位置,

直到 CCD 上成较为清晰的像(以前方的物体作为参照),此时透镜焦距  $f = 89.1 \text{ mm}$ , 像距  $v = 75.6 \text{ mm}$ , 将该位置定为中心平面位置( $z=0$ )并记录图像,接着分别前后对称移动平移台(即图像间距  $\Delta z=0.200 \text{ mm}$ ),记录两个平面( $z=-\Delta z$  和  $z=\Delta z$ )的图像,结果如图 7 所示。在自然光条件下,假定相机的镜头组中各个透镜之间的关系可以用几何光学很好地描述,本文将相机的镜头组抽象为一个“复合透镜”,以满足图 5 建立的模型。

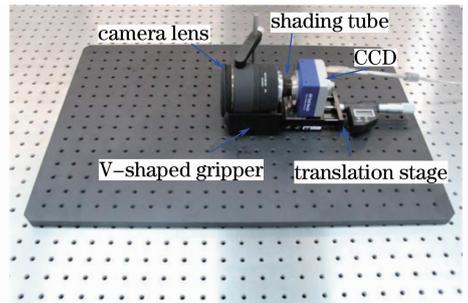


图 6 单 CCD 图像数据采集光学平台  
Fig. 6 Image data acquisition optical platform with a single CCD

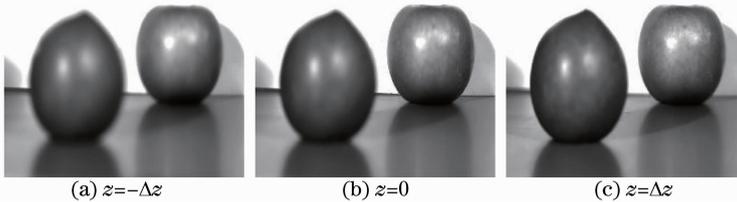


图 7 不同像平面的强度图像

Fig. 7 Intensity images at different imaging planes

利用图 7 中的三幅强度图像求解 TIE 方程得到中心面的相位,结果如图 8(a)所示。依据上面给出的算法步骤,结合角谱迭代逆向求解其他平面的

相位,分别如图 8(b)~(d)所示。物体距离 CCD 越近颜色越深,颜色的深浅是相对的。

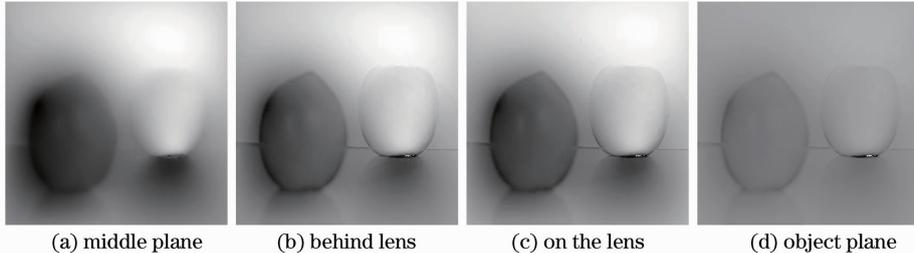


图 8 不同平面的相位图像

Fig. 8 Phase distributions at different planes

## 4 结 论

将 TIE 法和角谱迭代法有效地融合在一起,推导出了相干照明成像以及自然场景成像中较为有效的相位检索方法。重点讨论的是含透镜成像模型中的融合算法,对于自然场景成像中多波长的处理问题还有待进一步研究。

## 参 考 文 献

- 1 M Mir, B Bhaduri, R Wang, *et al.*. Quantitative phase imaging [J]. *Progress in Optics*, 2012, 57: 133–217.
- 2 Shen Chuan, Zhang Cheng, Liu Kaifeng, *et al.*. Research on issues about reconstructed holographic image based on a pixilated spatial light modulator[J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(3): 0309001.
- 沈 川, 张 成, 刘凯峰, 等. 基于像素结构空间光调制器的全

- 息再现像问题研究[J]. *光学学报*, 2012, 32(3): 0309001.
- 3 R W Gerchberg, W O Saxton. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures [J]. *Optik*, 1972, 35: 237–246.
- 4 J R Fienup. Phase retrieval algorithms: a comparison[J]. *Appl Opt*, 1982, 21(15): 2758–2769.
- 5 Ma Xinxue, Wang Jianli, Wang Bin. Study on phase retrieval algorithm[J]. *Laser & Infrared*, 2012, 42(2): 217–221.
- 马鑫雪, 王建立, 王 斌. 相位恢复技术算法的探究[J]. *激光与红外*, 2012, 42(2): 217–221.
- 6 Huang Lixin, Yao Xin, Cai Dongmei, *et al.*. A high accuracy and fast iterative algorithm for phase retrieval [J]. *Chinese J Lasers*, 2010, 37(5): 1218–1221.
- 黄利新, 姚 新, 蔡冬梅, 等. 一种快速高精度的相位恢复迭代法[J]. *中国激光*, 2010, 37(5): 1218–1221.
- 7 M R Teague. Deterministic phase retrieval: a Green's function solution[J]. *J Opt Soc Am*, 1983, 73(11): 1434–1441.
- 8 J Frank, S Altmeyer, G Wernicke. Non-interferometric, non-iterative phase retrieval by Green's functions[J]. *J Opt Soc Am*

- A, 2010, 27(10): 2244–2251.
- 9 Wang Xiao, Mao Heng, Zhao Dazun. Phase retrieval based on intensity transport equation[J]. Acta Optica Sinica, 2007, 27(12): 2117–2121.  
王 潇, 毛 珩, 赵达尊. 基于光强传播方程的相位恢复[J]. 光学学报, 2007, 27(12): 2117–2121.
- 10 T E Gureyev, A Roberts, K A Nugent. Phase retrieval with the transport of intensity equation; matrix solution with use of Zernike polynomials[J]. J Opt Soc Am A, 1995, 12(9): 1932–1942.
- 11 Bindang Xue, Shiling Zheng. Phase retrieval using the transport of intensity equation solved by the FMG-CG method[J]. Optik, 2011, 122(23): 2101–2106.
- 12 Cheng Hong, Zhang Quanbin, Wei Sui, *et al.*. Phase retrieval based on transport-of-intensity equation [J]. Acta Photonica Sinica, 2011, 40(10): 1566–1570.  
程 鸿, 章权兵, 韦 穗, 等. 基于强度传输方程的相位检索[J]. 光子学报, 2011, 40(10): 1566–1570.
- 13 T E Gureyev. Composite techniques for phase retrieval in the Fresnel region[J]. Optics Communications, 2003, 220(1): 49–58.
- 14 K A Nugent. Coherent methods in the X-ray sciences [J]. Advances in Physics, 2010, 59(1): 1–99.
- 15 K Ishizuka, B Allman. Phase measurement in electron microscopy using the transport of intensity equation [J]. Microscopy Today, 2005, 5: 22–24.
- 16 L J Allen, M P Oxley. Phase retrieval from series of images obtained by defocus variation[J]. Opt Commun, 2001, 199(1): 65–75.
- 17 A V Martina, F R Chenb, W K Hsiehb, *et al.*. Spatial incoherence in phase retrieval based on focus variation [J]. Ultramicroscopy, 2006, 106(10): 914–924.
- 18 J Goodman. Introduction to Fourier Optics[M]. New York: McGraw-Hill Press, 1996.

栏目编辑: 史 敏