# 基于最小二乘相位解包裹改进算法的研究

## 郭媛陈小天\*

(齐齐哈尔大学计算机与控制工程学院,黑龙江齐齐哈尔 161006)

摘要 已有的相位解包裹算法都只是对真实相位进行求取而忽略了相位包裹数 & 值存在的意义。基于最小二乘 解包裹算法提出对 & 值直接求取的算法,从而对解包裹更能准确地求出真实相位。在此基础上,提出新的解包裹 方法,不仅提高了解包裹的精度,而且减少了解包裹的时间,加快了运行速度,并通过程序验证了该算法的可行性。 为高精度、大计算量的解包裹提供了新的参考方法。

关键词 测量;数字散斑;相位解包裹; k 值直接求取;迭代算法;大计算量 中图分类号 O436.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201441.0508005

## Study of Improved Phase Unwrapping Algorithm Based on Least Squares

#### Guo Yuan Chen Xiaotian

(College of Computer and Control Engineering, Qiqihar University, Qiqihar, Heilongjiang 161006, China)

Abstract Among all the present phase unwrapping algorithms, the main idea is to get the real phase directly. However, the meaning of phase unwrapping coefficient k is rarely taken into account. A new algorithm to gain directly the value of k based on least-square (LS) phase unwrapping algorithm is proposed. It can unwrap the phase more rapidly and accurately. On this basis, a new phase unwrapping method is put forward. It not only improves the accuracy of phase unwrapping, but also reduces the time of phase unwrapping and accelerates the running speed of the program. Experiments show that the algorithm is feasible. It provides a new way for large amount of calculation in phase unwrapping with high speed and precision.

Key words measurement; digital speckle; phase unwrapping; direct calulation of k; iterative algorithm; large computation

OCIS codes 030.6140; 100.5088; 120.3180

## 1引言

数字散斑干涉测量技术是激光技术与数字图像 处理相结合的光测方法,它具有精度高、灵敏度高、 非接触无损测量等优点<sup>[1-3]</sup>。但通过数字散斑干涉 测量相移技术直接测得的结果却是包裹相位图,其 值在[-π,π]范围内,必须经过相位解包裹来得到 真实的相位图,这样才能得到测量结果<sup>[4]</sup>。近年来, 散斑干涉二维相位解包裹算法研究发展迅速,大致 可分为三类:基于路径跟踪的算法<sup>[5]</sup>、基于最小范数 的算法<sup>[6-8]</sup>以及基于最优估计的算法<sup>[9-10]</sup>。解包裹 算法中最常用的算法是基于最小范数算法中的最小 二乘解包裹算法<sup>[11-15]</sup>,对最小二乘解包裹算法求解 最常用的求解方法有迭代法、直接快速傅里叶变 换<sup>[11-12]</sup>和离散余弦变换<sup>[13-15]</sup>。直接法速度快但效 果不理想,经典的迭代法[如 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel(GS)迭代法、逐次超松弛(SOR)迭代法等]收 敛速度慢,通常不适合用于大的数据(如 64×64 以 上)<sup>[15]</sup>。为了寻求更加快速准确的相位解包裹方

收稿日期: 2013-11-11; 收到修改稿日期: 2013-12-11

基金项目:国家自然科学基金(61100103)、黑龙江省自然科学基金(F201219)、黑龙江省教育厅科研面上项目 (12521600)、齐齐哈尔大学青年重点基金(2011K-02)

作者简介:郭 媛(1974—),女,博士,教授,主要从事光学信息处理、光学检测与传感器等技术的研究。

E-mail: guoyuan171@126.com

\* 通信联系人。E-mail: chenxiaotian1988@qq.com

法,本文在最小二乘经典迭代法的基础上提出基于 k值直接求取的新型迭代相位解包裹算法,并通过 程序验证了其快速性以及准确性。

2 最小二乘解相位基本原理

数字散斑干涉测量中,相干图像  $\varphi_{i,j}$  是包裹的相位函数,  $-\pi \leq \varphi_{i,j} \leq \pi$ , 与之对应的真实相位为  $\varphi_{i,j}$ , 并有

$$\phi_{i,j} = \psi_{i,j} + 2\pi k_{i,j}, \qquad (1)$$

式中  $k_{i,j}$  为整数,对于  $M \times N$ 个数据点的矩阵i, j 对 应其下标,0  $\leq i \leq M - 1, 0 \leq j \leq N - 1$ 。

定义 x 方向和 y 方向上的包裹相位差分别为  $\Delta_{i,j}^{x}$ 和 $\Delta_{i,j}^{y}$ :

$$\begin{cases} \Delta_{i,j}^{x} = W(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) \\ \Delta_{i,j}^{y} = W(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}), \end{cases}$$
(2)

式中W为包裹算子,其目的是对包裹相位偏导数进行加减 $2\pi$ ,从而确保 $\Delta_{i,i}^{x}$ 和 $\Delta_{i,i}^{x}$ 位于 $[-\pi,\pi]$ 之间。

最小二乘相位解包裹算法的基本思想是寻求真 实相位的偏导数和包裹相位差的差分的值最小,即

$$\min(J) = \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{j=0}^{N-1} (\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j} - \Delta_{i,j}^{x})^{2} + \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{j=0}^{N-1} (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j} - \Delta_{i,j}^{y})^{2}.$$
(3)

对(3)式 øi,j求导数并令其为 0,整理得泊松方程

$$\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j} = \rho_{i,j}, \quad (4)$$

式中

 $\rho_{i,j} = (\Delta_{i,j}^{x} - \Delta_{i-1,j}^{x}) + (\Delta_{i,j}^{y} - \Delta_{i,j-1}^{y}).$ (5) 因为相位微分在包裹相位图像边缘是无效的,故泊 松方程的 Meumann 边界条件<sup>[13]</sup>为

$$\begin{cases} \Delta_{-1,j}^{x} = 0, & \Delta_{M-1,j}^{x} = 0, & 0 \leqslant j \leqslant N-1 \\ \Delta_{i,-1}^{y} = 0, & \Delta_{i,N-1}^{y} = 0, & 0 \leqslant i \leqslant M-1 \end{cases}$$
(6)

经典的解包裹的迭代方法有:

1) Gauss-Seidel 迭代法,其迭代形式为  

$$\phi_{i,j}^{n+1} = (\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i,j+1}^n + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j-1}^{n+1} - \rho_{i,j})/4.$$
(7)

2) SOR 迭代法,其迭代形式为  $\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^{n} + w(\phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n} +$ 

$$\phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j-1}^{n+1} - 4\phi_{i,j}^n - \rho_{i,j})/4$$
, (8)

式中 n 为迭代次数, w 是松弛因子, 这里选取最佳松弛因子为

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left[\cos(\pi/p) + \cos(\pi/q)/2\right]^2}}, (9)$$

式中 w 一般在1到2之间, p 和q 分别为 x 方向和 y 方向的网格数。

### 3 改进的最小二乘相位解包裹

#### **3.1 对经典迭代算法的改进** 将(1)式代入(4)式中得

 $k_{i+1,j} + k_{i-1,j} + k_{i,j+1} + k_{i,j-1} - 4k_{i,j} = (\rho_{i,j} + 4\psi_{i,j} - \psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j} - \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})/(2\pi).$ (10) \$\\$\\$(10)\$\]\]\$\\$\\$\\$(10)\$\]\]\$

$$_{i,j} = (\rho_{i,j} + 4\psi_{i,j} - \psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j} - \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})/(2\pi).$$
(11)

所以(10)式变为

$$k_{i+1,j} + k_{i-1,j} + k_{i,j+1} + k_{i,j-1} - 4k_{i,j} = a_{i,j}.$$
(12)

同样对(12)式进行迭代运算:

Gauss-Seidel 迭代法,其迭代形式为

$$k_{i,j}^{n+1} = (k_{i+1,j}^n + k_{i,j+1}^n + k_{i-1,j}^{n+1} + k_{i,j-1}^{n+1} - a_{i,j})/4.$$
(13)

SOR 迭代法,其迭代形式为

$$k_{i,j}^{n+1} = k_{i,j}^n + w(k_{i+1,j}^n + k_{i,j+1}^n + k_{i-1,j}^{n+1} + k_{i,j-1}^{n+1} - 4k_{i,j}^n - a_{i,j})/4.$$
(14)

真实相位为

$$\phi_{i,j} = \phi_{i,j} + 2\pi \text{round}(k_{i,j}),$$
 (15)  
式中 round 为取整运算。

#### 3.2 新型相位解包裹算法

在经典算法的基础上改进的对 k 值求取的算法 比原始迭代算法精度和速度有所提高,然而改进的 经典算法在解决大网格解包裹问题上仍然存在迭代 速度慢的问题,在此基础上这里提出新的相位解包 裹算法。

由 *x* 方向和 *y* 方向上的梯度差之和最小,(3) 式变为

$$\min(J) = \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{j=0}^{N-1} (\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j} - \Delta_{i-1,j}^{x})^{2} + \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{j=0}^{N-1} (\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1} - \Delta_{i,j-1}^{y})^{2}.$$
(16)

将(16)式对 øi,j求导数,令其为 0,整理得

$$2\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j} - \phi_{i,j-1} = \Delta_{i-1,j}^x + \Delta_{i,j-1}^y.$$
(17)

同理将(1)式代入(17)式中得

$$2k_{i,j} - k_{i-1,j} - k_{i,j-1} = (\Delta_{i-1,j}^{x} + \Delta_{i,j-1}^{y} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j-1})/(2\pi).$$
(18)

令(18)式右部分为 
$$b_{i,j}$$
,即  
 $b_{i,j} = (\Delta_{i-1,j}^{x} + \Delta_{i,j-1}^{y} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j-1})/(2\pi).$ 
(19)

同样,这里服从(6)式的边界条件,则(18)式变为

$$2k_{i,j} - k_{i-1,j} - k_{i,j-1} = b_{i,j}.$$
 (20)

对(20)式进行迭代运算,其运算形式

$$k_{i,j}^{n+1} = (b_{i,j} + k_{i-1,j}^{n+1} + k_{i,j-1}^{n+1})/2.$$
 (21)  
真实相位通过(15)式计算出。这里边界条件为

$$k_{0,j} = 0, \quad j = 0, \dots, N-1$$

$$k_{i,0} = 0, \quad i = 0, \dots, M-1$$

当边界不为0时,边界上不能正确解出,而实际中不存在边界不为0的情况。

## 4 实验与结果分析

为了验证改进算法的性能,以 M×N 网格大小的相位图像为实验真实数据  $\phi_{i,j}$ 用 Matlab 软件以 2 倍的 peaks 函数编程对提出的算法进行验证。

经典算法与改进算法的无噪声实验数据如表 1 和表 2 所示,同样也代表了噪声很小的一种情况,实 际中解包裹都是要经过滤波处理,然后解包裹,这里 这种情况也可以理解为滤波后的结果。其中,表 1 是网格大小为 128×128 的计算解包裹的数据,表 2 是网格大小为 512×512 的计算解包裹的数据。

表1 经典相位解包裹算法与改进的解包裹算法用于无噪声 128×128 网格计算

Table 1 Results of classic phase unwrapping algorithm and improved phase unwrapping algorithm

Phase unwrapping	Iterative	Number of	Unwrapping	Real phase	Max (abs)	Min (abs)
method	threshold	iterations	time /s	accuracy		
GS for $\phi_{i,j}$	0.0001	3093	8.510249	0.0001	0.5713	$1.3 \times 10^{-6}$
GS for $k_{i,j}$	0.0001	3397	9.365986	$1 \times 10^{-12}$	0	0
SOR for $\phi_{i,j}$	0.1	88	9.819996	0.1	1.3462	5.6 $\times 10^{-5}$
SOR for $k_{i,j}$	0.1	86	9.256047	$1 \times 10^{-12}$	0	0
Improved algorithm	0.1	2	0.049146	$1 \times 10^{-12}$	0	0

in 128 $\times$ 128 noiseless grid computing

表 2 经典相位解包裹算法与改进的解包裹算法用于无噪声 512×512 网格计算

Table 2 Results of classic phase unwrapping algorithm and improved phase unwrapping algorithm

in  $512 \times 512$  noiseless grid computing

Phase unwrapping	Iterative	Number of	Unwrapping	Real phase	Max (abs)	Min (abs)
method	threshold	iterations	time /s	accuracy		
GS for $\phi_{i,j}$	0.001	3689	331.3148	0.001	5.6277	$1.6 \times 10^{-6}$
SOR for $\phi_{i,j}$	0.1	362	339.2909	0.1	1.2780	7.0×10 <sup>-7</sup>
Improved algorithm	0.1	2	0.563233	$1 \times 10^{-12}$	0	0

表1中 Max (abs)、Min (abs)分别为原始相位 和解包裹得到的相位差值绝对值的最大值和最小 值。表2中迭代阈值为能够准确解出包裹的最小迭 代阈值,迭代次数为能够准确解出包裹的最小迭代 次数。

由于不同的算法对迭代阈值的设定不一样,实验中同种算法对 \$\vee\$\_{i,j} 和对 \$k\_{i,j} 的迭代阈值设定相同。 从表 1 可以看出同种算法设置的迭代阈值一样时, 对 \$k\_{i,j} 计算得到的真实相位的精度明显比对 \$\vee\$\_{i,j} 计 算的精度高,而且对 k 的计算得到的真实相位误差 趋于 0,对 ø<sub>i,j</sub> 计算的误差较大,并且时间上相差不 大。从表中可以明显看出改进后的算法更加实用于 高精度解包裹计算。

由于对 k 值的计算最后都要通过取整运算,故 对 k 值的迭代中 k 值的迭代阈值精度要求不高,这 里 k 值的迭代阈值精度取能够正确计算出真实相位 的最小迭代阈值精度即可。

由(1)式可知,经典算法对  $\phi_{i,j}$  的计算精度取决

于迭代精度,而对 k 值的计算得到的真实相位的精 度取决于包裹相位的精度,对 k 值的计算最后取整, 对解包裹运算的精度没有影响。这里包裹相位  $\varphi_{i,j}$ 的精度取  $1 \times 10^{-12}$ ,从而用 k 值计算出的相位值的 精度也是  $1 \times 10^{-12}$ 。

从表 2 可以看出随着网格的增加,经典迭代直 接对  $\phi_{i,j}$ 解包裹运算的速度变得很慢,而且存在误 差。而提出的相位解包裹算法迭代速度快,计算出 的相位甚至能够与原相位相等。从表 1~2 可以看 出,新算法随着网格数的增加,其优势越来越明显, 即速度快误差小。

加入 0.5 倍的正态分布的随机噪声噪声后,对 128×128 网格直接进行解包裹,实验数据如表 3[随 机噪声 randn(M,N)的状态为 0],实验结果如图 1 所示,其中,真实相位图如图 1(a),对真实相位  $\phi_{i,j}$ 进行包裹运算的包裹相位图如图 1(b),用 GS 算法 对  $\phi_{i,j}$ 解包裹如图 1(c),用 GS 算法对  $k_{i,j}$ 计算解包 裹如图 1(d),用 SOR 算法对  $\phi_{i,j}$ 解包裹如图 1(e), 用 SOR 算法对  $k_{i,j}$ 计算解包裹如图 1(f),所提出的 算法解包裹如图 1(g)。

表 3 经典相位解包裹算法与改进的解包裹算法用于噪声 128×128 网格计算

Table 3 Results of classic phase unwrapping algorithm and improved phase unwrapping algorithm

in 128×128 noise grid computing Phase unwrapping Iterative Number of Unwrapping Real phase Max (abs) Min (abs) method threshold iterations time /s accuracy GS for  $\phi_{i,i}$ 0.0001 3090 9.785426 0.0001 2.0319 2.8×10<sup>-5</sup> GS for  $k_{i,i}$ 0.0001 3389 9.431610  $1 \times 10^{-12}$ 1.8994 2.2 $\times 10^{-5}$ SOR for  $\phi_{i,j}$ 130 14.694050 2.0194 9.2 $\times 10^{-5}$ 0.1 0.1  $1 \times 10^{-12}$ 1.8994 SOR for  $k_{i,j}$ 7.913652 2.2×10<sup>-5</sup> 0.1 95



图 1 含噪声数据的几种相位解包裹的结果比较

Fig. 1 Results of several phase unwrapping algorithms for noisy data

从表 3 和图 1 可以看出,对相位加噪声后,对 \$\vee\$\_{i,j} 送代解包裹算法存在的误差比对 k\_{i,j} 迭代的误差 大,而这里提出的算法能达到误差小,并且在时间 上,速度更快。 当相位噪声比较严重时,通过加入 1.5 倍的正态分布的随机噪声,经过中值滤波以后用提出的算法对网格大小为 1024×1024 的相位解包裹,结果如图 2 所示。





Fig. 2 Phase unwrapping 3D figures in 1024×1024 grid computing for noisy data

参考文献

经典的相位解包裹算法由于迭代速度较慢而不 适合对网格大于 64×64 的相位解包裹运算<sup>[15]</sup>,而提 出的迭代算法能够适合计算量较大,网格大小为 1024×1024的相位解包裹运算。提出的新型相位解 包裹算法能够正确地解出真实相位,并且其解包裹的 时间只用 4.0 s。而经典解包裹算法对 1024×1024 网格的计算时间在 60 min 左右。由此可见提出的相 位解包裹算法能够准确、快速地解出真实相位。

5 结 论

在相位解包裹中直接求取相位包裹数 k 值的这种方法,其最大的优点是 k 值最后都通过取整运算, 故对 k 值的计算精度不需要很高,能够完整解出真 实相位即可,从而加快了迭代的速度。而且对 k 值 的求取不影响真实相位的精度,真实相位的精度取 决于包裹相位的精度,对 k 值的计算大大降低了由 计算引起的误差的影响。本文从无噪声信号(即实 际解 包 裹 中 的 滤 波 处 理 后 信 号)、一 般 噪 声 0.5 randn(M,N)、严重噪声 1.5 randn(M,N)(需 按通常方法先滤波处理)等几方面进行实验,验证了 提出的相位解包裹算法,特别对大计算量的解包裹 运算,能快速、准确地解出。

- I Zeng Limei, Cao Yiping. New method of displacement measurement based on laser speckle using multi-characteristic windows[J]. Chinese J Lasers, 2009, 36(4): 949-953.
   曾丽梅, 曹益平. 采用多特征窗口识别的散斑位移测量新方法
- [J]. 中国激光, 2009, 36(4): 949-953.
  2 Yang Lei, Lu Rongsheng, Lei Liqiao. Information extraction of surface roughness measurement based on wavelet transform of

speckle pattern texture [J]. J Electronic Measurement and Instrument, 2012, 26(12): 1091-1095. 杨 蕾,卢荣胜,雷丽巧.基于小波变换的散斑纹理表面粗糙度 信息把版[J] 由 乙酮是 巨似器 常報 2012 26(12) 1001-

信息提取[J]. 电子测量与仪器学报, 2012, 26(12): 1091-1095.

3 Liu Hengbiao, Wang Changling. Roughness measurement of shot-blasted surface based on polychromatic speckle autocorrelation[J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(9): 2578-2584.

刘恒彪,王昌灵. 抛喷丸表面的多波长散斑自相关法粗糙度测量[J]. 光学学报,2010,30(9):2578-2584.

4 Wang Xin, Jia Shuhai. Novel phase unwrapping algorithm for digital speckle pattern interferometry[J]. Acta Optica Sinica, 2006, 26(5): 663-667.
王 新, 贾书海.数字散斑相位图去包裹新算法[J]. 光学学报,

土 初,页节两, 数子取项相位图去包袭初身法[J]. 元子子很, 2006, 26(5): 663-667.

- 5 Fu Shiqiang, Liao Wenhe, Cui Haihua, et al.. Modulation-Roberts gradiernt amplitude variance quality map for phase unwrapping[J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(3): 727-732. 傅世强,廖文和,崔海华,等. 用于相位展开的调度-罗伯特梯度 幅值方差质量图[J]. 光学学报, 2010, 30(3): 727-732.
- 6 Ma Ming, Zhang Dongsheng. Least-square method for phase unwrapping[J]. Optical Technique, 2002, 28(1): 94-96.
  马明,张东升.最小二乘相位解包络方法[J].光学技术, 2002, 28(1): 94-96.

- 7 Qian Xiaofan, Li Bin, Li Xinghua, et al.. Improvement of least-square phase unwrapping algorithm based on lateral shearing interferometry[J]. Chinese J Lasers, 2012, 39(11): 1109002.
  钱晓凡,李 斌,李兴华,等. 横向剪切最小二乘相位解包裹算法的改进[J]. 中国激光, 2012, 39(11): 1109002.
- 8 Qian Xiaofan, Rao Fan, Li Xinghua, et al.. Accurate leastsquares phase unwrapping algorithm[J]. Chinese J Lasers, 2012, 39(2): 0209001.

钱晓凡, 饶 帆, 李兴华, 等. 精确最小二乘相位解包裹算法 [J]. 中国激光, 2012, 39(2): 0209001.

- 9 Liu Guolin, Du Zhixing, Xue Huaiping, et al.. Application of Kalman filters to noise eliminating and phase unwrapping of InSAR[J]. J Geodesy and Geodynamics, 2006, 26(2): 66-70. 刘国林,独知行,薛怀平,等. 卡尔曼滤波在 InSAR 噪声消除与 相位解缠中的应用[J]. 大地测量与地球动力学, 2006, 26(2): 66-70.
- 10 Z Q Wei, F Xu, Y Q Jin. Phase unwrapping for SAR interferometry based on an ant colony optimization algorithm[J]. Int J Remote Sensing, 2008, 29(3): 711-725.
- 11 Mark D Pritt, Jerome S Shipman. Least-squares two-dimensional phase unwrapping using FFT's[J]. IEEE Trans on Geoscience

and Remote Sensing, 1994, 32(3): 706-708.

- 12 Qian Xiaofan, Zhang Yongcan, Li Xinyu, *et al.*. Phase unwrapping algorithm based on mask and least-squares iteration [J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(2): 440-444.
  钱晓凡,张永安,李新宇,等. 基于掩膜和最小二乘迭代的相位 解包裹方法[J]. 光学学报, 2010, 30(2): 440-444.
- 13 Liu Jingfeng, Li Yanqiu, Liu Ke. Weighted least-square phase unwrapping algorithm for noisy phase-map [J]. Optical Technique, 2008, 34(5): 643-650.
  刘景峰,李艳秋,刘 克. 含噪声包裹相位图的加权最小二乘相 位展开算法研究[J]. 光学技术, 2008, 34(5): 643-650.
- 14 Ghiglia D C, Romero L A. Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods[J]. J Opt Soc Am A, 1994, 11(1): 107-117.
- 15 Xiang Maosheng, Li Shukai. The solution for phase estimation of least square method using DCT[J]. J Image and Graphics, 1998, 3(4): 269-272.

向茂生,李树楷.用 DCT 进行最小二乘相位估计值的求解[J]. 中国图象图形学报,1998,3(4):269-272.

栏目编辑:何卓铭