

# 基于压缩感知理论的无透镜离轴傅里叶全息编码与重建

韩 超 吴 伟 李 蒙蒙

(安徽工程大学电气工程学院, 安徽 芜湖 241000)

**摘要** 高计算复杂度是目前制约全息显示的瓶颈, 针对这一难题, 提出一种基于压缩感知理论与无透镜傅里叶变换相结合的全息图编码与重现算法。利用计算机生成无透镜离轴傅里叶全息图, 再用压缩感知理论对全息图进行压缩采样和恢复, 最后对恢复出的全息图进行重构, 并再现原始图像。该方法的优点在于只采样全息图的部分有用系数就能很好地恢复出原始图像, 从而解决了传感器采样数据过大的问题, 降低了计算复杂度。仿真实验表明, 20% 的压缩采样时, 重构出的全息图的相关系数为 0.85, 而 50% 时该系数为 0.9999。通过搭建的全息再现系统进行实际验证, 实验结果表明能够清晰地再现出原始图像, 从而证明了该方法的可行性。

**关键词** 全息; 信息光学; 压缩感知; 计算全息; 全息显示; 数字微镜器件

**中图分类号** O438 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/CJL201441.0209015

## Encoding and Reconstruction of Lensless Off-Axis Fourier Hologram Based on the Theory of Compressed Sensing

Han Chao Wu Wei Li Mengmeng

(College of Electrical Engineering, Anhui Polytechnic University, Wuhu, Anhui 241000, China)

**Abstract** High computational complexity is the bottleneck of the holographic display. Aiming at the problem, a new hologram coding and reconstruction algorithm based on compressed sensing theory and lensless Fourier transform is proposed. Lensless off-axis Fourier hologram is generated by computer, and then the hologram is sampled and reconstructed by the theory of compressed sensing. At last, the original image is reconstructed by the hologram. The advantage of this method is that only some useful sampling coefficients of the hologram is used to reconstruct the original image well, which solves the problem of large volume of sampling data of the sensor and achieves the goal of reduction of the computational complexity. Simulation results show that the correlation coefficient of reconstructed image with 20% compressive sampling rate is 0.85; when compressive sampling rate of hologram with 50%, the coefficient reaches 0.9999. In addition, a holographic reconstruction system is built to verify the hologram compression sampling theory. The experimental results indicate that the original image can be clearly reconstructed by the system, which proves the feasibility of the method.

**Key words** holography; information optics; compressed sensing; computer-generated hologram; holographic display; digital microscopic devices

**OCIS codes** 090.1760; 090.2870; 090.1970; 070.6120

## 1 引 言

随着计算机技术、微机电技术的飞速发展, 全息显示已步入了数字化时代, 并在该领域取得了诸多令人鼓舞的成果<sup>[1-6]</sup>。但就目前来看全息显示要真正达到商业化标准仍然十分困难, 其中一个重要原因就是计算量太大, 这是因为目前的采样标准所基于的采样原理的限制。传统的数字信号处理采用“先采样, 后处理”的模式, 通常在采样阶段并不考虑对实际信息的需要。于是, 为了满足不同处理方法

和实际应用的需要, 采样阶段需尽可能地采集数据, 然后再进行压缩删除掉冗余的信息, 这样就使传感器的负担大大增加, 导致信息的传输与处理速度变慢。因此, 采用压缩感知理论(CS)<sup>[7-13]</sup>进行采样, 结合利用计算机产生的无透镜离轴傅里叶全息显示算法的优点, 解决目前全息图采样数据量过大的问题, 使得在采样部分有用系数的情况下就能够很好地恢复出原始物体, 从而大大减轻了传感器的压力。

压缩感知理论是在 2006 年, 由 Donoho<sup>[10]</sup> 提出

**收稿日期:** 2013-07-16; **收到修改稿日期:** 2013-09-22

**基金项目:** 国家自然科学基金(60872106)、校预研基金资助项目(zryy1311)

**作者简介:** 韩 超(1974—), 男, 博士, 副教授, 主要从事光信息处理、图像处理、全息显示等方面的研究。

E-mail: hanchaozh@126.com

的一种新的数据获取理论。该理论指出对可压缩信号即便以远低于奈奎斯特采样标准采样,仍然能够精确地恢复出原始信号,因而被美国评为 2007 年度十大科技进展之一。在 CS 理论框架下,能够在数据获取时大幅度突破奈奎斯特采样定律的制约,给存储、传输和处理各种自然信号带来极大便利。2009 年,Brady 等<sup>[14]</sup>将压缩感知理论与全息术相结合,论述了运用压缩感知理论在共轴全息术中采样的理论并给出了相应的实验,理论和实验结果均表明在不影响显示效果的情况下,在共轴全息中采用压缩感知理论进行采样可以大大降低采样数目,降低计算复杂度。2011,吴迎春等<sup>[15]</sup>将压缩感知用于重建数字同轴全息,基于衍射线性运算,导出了利用压缩感知重建数字同轴全息三维空间的算法,并利用该算法很好地重建了颗粒的模拟全息图和数字显微全息实验全息图。本文则是对无透镜离轴傅里叶

算法生成的全息图利用 CS 理论直接压缩采样,从而大大降低采样数目,减轻传感器的采样压力,降低计算复杂度,旨在采样很少数据的情况下能够获得较好的显示效果。

## 2 无透镜离轴傅里叶变换全息

与非涅耳全息、像全息等离轴全息术相比,无透镜数字傅里叶变换全息<sup>[16]</sup>具有记录光路简单,光学元件少,可避免因透镜带来的相差等非线性因素的影响;数值再现算法简单,只需做一次傅里叶变换,缩短了再现周期等优点。

### 2.1 记录原理

用平行参考光照射物体形成物光波,同时在物平面下方 $(-b, 0)$ 处用一束参考光与物光波形成干涉,在干板处形成干涉条纹。

物光波函数可表示为

$$U(x, y) = -\frac{j}{\lambda z_0} \exp\left[j \frac{k}{2z_0}(x^2 + y^2)\right] F\left\{O(x_0, y_0) \exp\left[j \frac{k}{2z_0}(x_0^2 + y_0^2)\right]\right\} = C' \exp\left[j \frac{k}{2z_0}(x^2 + y^2)\right] \Delta(f_x, f_y) \Big|_{f_x = \frac{x}{\lambda z_0}, f_y = \frac{y}{\lambda z_0}}. \quad (1)$$

参考光波函数可表示为

$$R(x, y) = R_0 \exp\left[j \frac{k}{2z_0}(x^2 + y^2)\right] \exp(j2\pi f_x b) \Big|_{f_x = \frac{x}{\lambda z_0}}. \quad (2)$$

干涉条纹强度可表示为

$$I(x, y) = |U(x, y) + R(x, y)|^2 = U \cdot U^* + R_0^2 + C'R_0\Delta(f_x, f_y)\exp(-j2\pi f_x b) + C'R_0\Delta^*(f_x, f_y)\exp(j2\pi f_x b), \quad (3)$$

式中  $f_x, f_y$  表示为  $x, y$  方向的空间频率分量,  $\Delta(f_x, f_y)$  表示  $O(x_0, y_0) \exp\left[j \frac{k}{2z_0}(x_0^2 + y_0^2)\right]$  的傅里叶变换,  $C'$  表示  $-j/(\lambda z_0)$ ,  $R_0$  表示参考光波函数,  $O(x_0, y_0)$  表示物光波函数,  $*$  表示共轭。

### 2.2 再现原理

当用发散球面波照射全息图再现时,设光源在轴上,光源与全息图之间的距离为  $z_c$ 。与原像有关的第三项为

$$I_3 = C'R_0\Delta(f_x, f_y)\exp(-j2\pi f_x b)\exp\left[j \frac{k}{2z_c}(x^2 + y^2)\right] \times \exp\left[j \frac{k}{2}\left(\frac{1}{z_c} - \frac{1}{z_0}\right)(x^2 + y^2)\right], \quad (4)$$

与物波函数(1)式相比较可知,这就是产生原始像的项,所不同的只是增加了两个因子: 1)  $-j2\pi f_x b$ , 它代表倾斜因子,表示再现物光的倾斜角为  $\theta = \arcsin(b/z_c)$ ; 2)  $\exp\left[j \frac{k}{2}\left(\frac{1}{z_c} - \frac{1}{z_0}\right)(x^2 + y^2)\right]$ , 它代表一个附加的相位因子。

与共轭像有关的第四项为

$$I_4 = C'^* R_0 \Delta^*(f_x, f_y) \exp(j2\pi f_x b) \exp\left[j \frac{k}{2z_c}(x^2 + y^2)\right] \times \exp\left[j \frac{k}{2}\left(\frac{1}{z_c} - \frac{1}{z_0}\right)(x^2 + y^2)\right]. \quad (5)$$

由(5)式可知,与原始像对称的 $(-b, 0)$ 处可得共轭像,是倒立虚像。

## 3 压缩感知理论

压缩感知理论的核心思想是将压缩与采样同时

进行,首先采集信号的非自适应线性投影(测量值),然后确定测量矩阵,最后依据相应重构算法由测量值重构出原始信号。压缩感知理论主要包括信号的稀疏表示、编码测量和重构算法等三个方面<sup>[17-19]</sup>。

### 3.1 压缩感知的定义

$R^N$  空间的一个有限长度的一维离散信号  $x$  可以表示成一个  $N \times 1$  的列向量。任何一个信号在  $R^N$  空间中都可以用一组  $N \times 1$  的基向量  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$  表示,通过把  $\{\psi_i\}$  作为列向量表示  $N \times N$  基矩阵  $\Psi = [\psi_1 \psi_2 \cdots \psi_N]$ , 信号  $x$  可以表示成

$$x = \sum_{i=1}^N s_i \psi_i, \quad x = \Psi s, \quad (6)$$

式中  $s$  是  $N \times 1$  列权值系数向量,  $s_i = \langle x, \psi_i \rangle = \psi_i^T x$ ,  $T$  表示转置。考虑到一种普遍的线性测量值计算  $x$  和集合向量  $\{\phi_j\}_{j=1}^M$  的内积 ( $M \ll N$ ), 设  $y_i = \langle x, \phi_j \rangle$ 。把测量值  $y_i$  转置成  $M \times 1$  的向量  $y$  并且把测量向量  $\phi_j^T$  作为行, 形成  $M \times N$  的矩阵  $\Phi$ , 代入(6)式得

$$y = \Phi x = \Phi \Psi s = \Theta s, \quad (7)$$

式中  $\Theta = \Phi \Psi$  是一个  $N \times N$  的矩阵, 测量过程是非自适应的, 也就是说  $\Phi$  不取决于信号  $x$ 。

### 3.2 测量矩阵的选择

一般情况下, 因测量过程矩阵  $\Phi$  和  $\Psi$  是线性的和限定的, 求解给定的  $y$  是一个  $M < N$  的线性代数问题, 方程的个数少于未知数的个数, 这是一个病态问题。

对于  $K$  稀疏可压缩的信号有解的充分条件是  $\Theta$  满足下式:

$$1 - \epsilon \leq \frac{\|\Theta v\|_2}{\|v\|_2} \leq 1 + \epsilon, \quad (8)$$

这就是有限等距性质(RIP)。

保证稳定性的方法之一是确保测量矩阵  $\Phi$  和系数变换矩阵  $\Psi$  是不相关的, 测量矩阵的行  $\{\phi_j\}$  不能够稀疏表示系数变换矩阵的列  $\{\psi_i\}$ 。所以, 给定一个系数变换矩阵  $\Psi$ , 要求如何设计测量矩阵  $\Phi$  使得  $\Theta = \Phi \Psi$  满足有限等距性质。

在这里选择的是高斯随机矩阵作为测量矩阵  $\Phi$ , 它有两个性质: 1)  $\Phi$  与基  $\Psi = I$  的  $\delta$  冲击函数的高概率不相关, 如果使用的测量参数  $M \geq cK \lg(N/K)$ , 且  $\epsilon$  是一个小的常数,  $M \times N$  的高斯矩阵  $\Theta = \Phi I = \Phi$  高概率的满足有限等距性质; 2) 因高斯分布矩阵  $\Phi$  的属性, 矩阵  $\Theta = \Phi \Psi$  也是满足高斯分布的, 所以不管稀疏变换矩阵  $\Psi$  如何选择都可以。因此随机高斯矩阵具有普适性。

### 3.3 正交匹配追踪算法重构全息图

因为贪婪算法在对问题求解时, 总是能做出好的选择, 所以, 选择了一种名为正交匹配追踪的贪婪算法(OMP)<sup>[20-21]</sup>, 它可以在给定的  $M$  个随机线性测量值下有效地恢复  $K$  稀疏的  $N$  维向量。目的是从  $y = \Phi x$  重建出原始信号  $x$ , 正交匹配追踪算法就是通过确定  $\Phi$  的哪一列参与测量向量  $y$  来确定  $x$ , 运用贪婪的模式去确定每一列。在每一次的迭代过程中, 选择  $\Phi$  中与  $y$  的剩余部分最相关的列, 然后从  $y$  中抽取该列对  $y$  的贡献值, 再对其冗余迭代。

OMP 算法的流程图如图 1 所示。

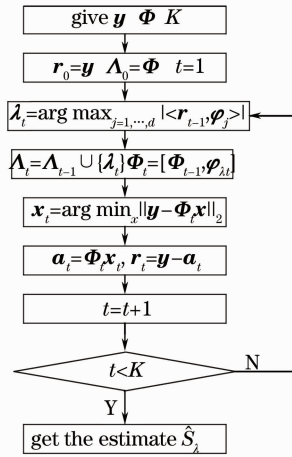


图 1 OMP 算法流程图

Fig. 1 OMP algorithm flow chart

## 4 模拟实验

在基于压缩感知的全息图显示实验中, 取安徽工程大学后 4 个字拼音首字母“GCDX”制作一幅 512 pixel × 512 pixel 大小的图像如图 2(a) 所示, 通过无透镜离轴傅里叶变换产生字母全息图, 其中波长为 632.8 nm, 参考光角为  $\pi/9$ , 然后将全息图利用小波变换使其稀疏化, 并对稀疏化的图像压缩采样, 再通过 OMP 算法重构出不同采样率下的全息图, 最后再次利用无透镜离轴傅里叶变换恢复原始字母图像。图 2(b) 是由图 2(a) 通过无透镜离轴傅里叶变换得到的计算全息图, 图 2(c) 是由图 2(b) 通过无透镜离轴傅里叶变换再现的图像。图 3 是图 2(b) 经过小波变换稀疏后在不同压缩采样率下利用 OMP 算法重构出来的全息图, 由压缩采样重构出的全息图可以看出压缩采样率越高, 重构出来的全息图越接近未压缩的计算全息图[图 2(b)]。图 4 中分别对应着图 3 的再现图像, 由图 4 可以明显看出, 随着压缩采样率的不断提高, 再现出来的原始图像也是越来越清晰; 从表

1 可以看出,压缩采样率越高,再现出的原始图像与未压缩时再现出的原始图像[见图 2(c)]相比的峰值信噪(PSNR)比越大,与未压缩时再现出的原始图像的相关系数(NC)也就越大,而且在 50%的压缩采样率下重构出的原始图像与未压缩时重构出的原始图像的相关系数几乎为 1。由于原全息图像在稀疏过程中以及在采用 OMP 算法进行压缩与重构的过程中会产生细微的改变,即引入噪声,而原始图像的重建是靠全息图对射光的衍射来完成的,因此,即使在压缩感知重构全息图的过程中引入很小的噪声,也会在全息图重建原始图像时体现出来,位于图 4 中间

的“黑道”正是压缩感知算法重构全息图的过程中引入了噪声所致。关于此噪声产生的机理及去除方法,将在后续的研究工作中作进一步的探讨。

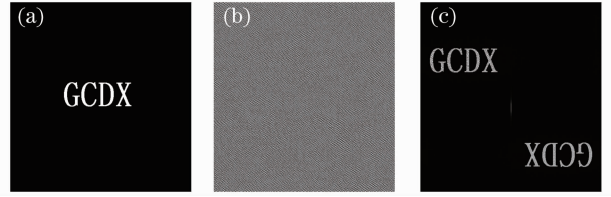


图 2 (a)原始图像; (b)全息图; (c)未压缩再现图  
Fig. 2 (a) Original image; (b) hologram; (c) uncompressed reconstruction image

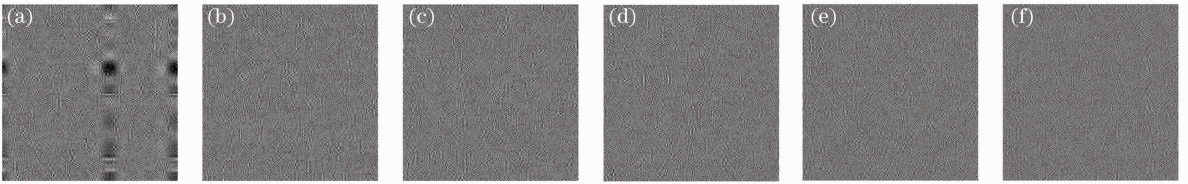


图 3 不同压缩采样率下重构的全息图。(a) 20%; (b) 23%; (c) 25%;(d) 30%;(e) 40%;(f) 50%  
Fig. 3 Reconstructed holograms under different compression sampling rates.

(a) 20%; (b) 23%; (c) 25%;(d) 30%;(e) 40%;(f) 50%

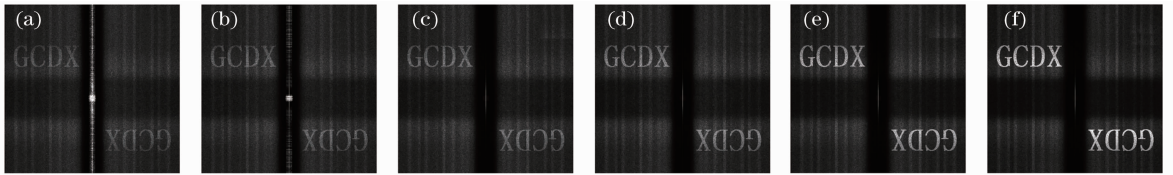


图 4 不同压缩采样率下重构出的原始图像。(a) 20%;(b) 23%;(c) 25%;(d) 30%;(e) 40%;(f) 50%  
Fig. 4 Reconstructed original images under different compression sampling rates.

(a) 20%; (b) 23%; (c) 25%;(d) 30%;(e) 40%;(f) 50%

表 1 不同压缩采样率下的 PSNR 和 NC

Table 1 PSNR and NC under different compression sampling rates

Compressive sampling rate / %	PSNR /dB	NC
20	34.9922	0.8547
23	48.8403	0.9707
25	67.1150	0.9995
30	67.4043	0.9997
40	67.8922	0.9998
50	68.4361	0.9999

在经过理论分析与模拟实验后,在防震平台上搭建了一套全息再现系统(见图 5),其中包括波长为 650 nm 的半导体激光器,针孔滤波器、透镜、德州仪器公司生产的数字微镜器件(DMD)、计算机等实验设备。首先将激光器产生的光源经过针孔滤波器进行滤波扩束,再通过透镜准直照射在 DMD 上,最后将不同压缩采样率下重构出的全息图输入到 DMD 中,通过 DMD 衍射出来的光线照射在显示屏

幕上,从而重构出原始图像(见图 6)。观察图 6 可以发现,随着压缩采样率的提高,再现出来的图像越来越清晰,压缩采样率在 20%时真实实验与仿真实验相比,重构出来的原始图像显得非常模糊,这可能是由实验过程中 DMD 器件的像素大小、系统误差、外在环境等因素所致。在对全息图进行 50%压缩采样下能够清楚地再现出原始图像。

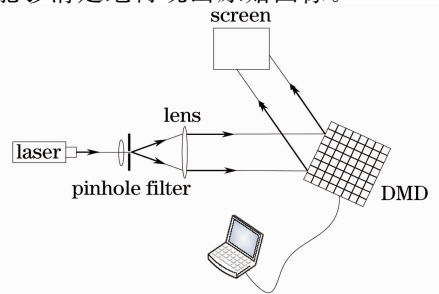


图 5 全息再现系统示意图

Fig. 5 Schematic diagram of holographic reconstruction system

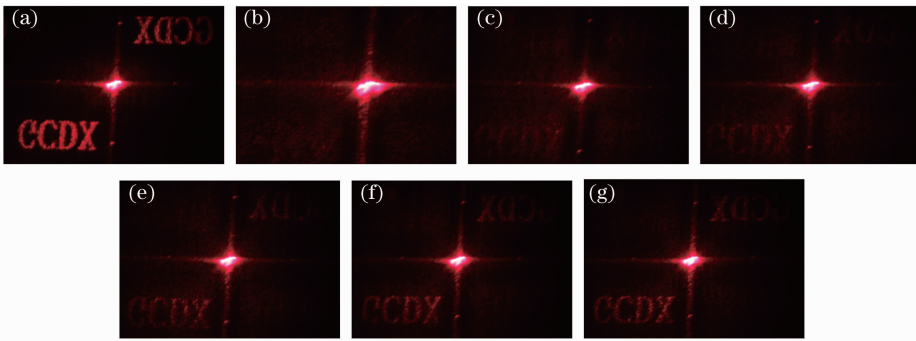


图6 不同压缩采样率下重构全息图的再现图像。(a) 未压缩；(b) 20%；(c) 30%；(d) 40%；(e) 50%；(f) 60%；(g) 70%

Fig. 6 Reconstructed image of reproduced hologram under different compression sampling rates.  
(a) Uncompressed; (b) 20%; (c) 30%; (d) 40%; (e) 50%; (f) 60%; (g) 70%

## 5 结 论

采用基于压缩感知理论与无透镜傅里叶算法相结合的全息图编码与重现算法,能够很好地解决全息采样数据量过大的难点,大大减轻了传感器采样数据量过大的负担。计算机模拟结果表明,压缩采样率50%时就能非常好地重构出原全息图像。通过搭建以数字微镜器件为核心的全息显示系统做进一步验证,结果表明本算法切实可行、效果较好。

## 参 考 文 献

- 1 Fahri Yaras, Hoonjong Kang, Levent Onural. Circular holographic video display system [J]. *Opt Express*, 2011, 19(10): 9147–9156.
- 2 Mohamed E I Bahrawi, Niveen Farid. 3D display system based on digital holography-application in making cartoon holography [J]. *Scientific Research*, 2012, 4(7): 349–352.
- 3 Richard Stahl, Veronique Rochus, Xavier Rottenberg, *et al.*. Modular sub-wavelength diffractive light modulator for high-definition holographic display[J]. *J Phys*, 2013, 415(1): 1–7.
- 4 Wang Yue, Shen Chuan, Zhang Cheng, *et al.*. Research on color holographic display with space division multiplexing based on liquid crystal on silicon[J]. *Chinese J Lasers*, 2012, 39(12): 1209001.  
王岳, 沈川, 张成, 等. 基于硅基液晶的空分复用彩色全息显示研究[J]. *中国激光*, 2012, 39(12): 1209001.
- 5 Shen Chuan, Zhang Cheng, Liu Kaifeng, *et al.*. Research on issues about reconstructed holographic image based on a pixelated spatial light modulator[J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(3): 0309001.  
沈川, 张成, 刘凯峰, 等. 基于像素结构空间光调制器的全息再现问题研究[J]. *光学学报*, 2012, 32(3): 0309001.
- 6 Wang Hao, Bi Yong, Li Fang, *et al.*. Enlargement technology of reconstructed image of computer generated hologram based on spatial light modulator[J]. *Chinese J Lasers*, 2013, 40(3): 0309001.  
王皓, 毕勇, 李芳, 等. 基于空间光调制器的计算全息再现像放大技术[J]. *中国激光*, 2013, 40(3): 0309001.
- 7 Emmanuel J Candès. Compressive sampling[C]. *Proceedings of the International Congress of mathematicians*, 2006, 3: 1433–1452.
- 8 Candes E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transaction on Information Theory*, 2006, 52(2): 489–509.

- 9 Candès E, Romberg J. Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions [J]. *Foundations of Computational Mathematics*, 2006, 6(2): 227–254.
- 10 Donoho D. Compressed sensing [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289–1306.
- 11 Goyal V, Fletcher A, Rangan S. Compressive sampling and lossy compression [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 48–56.
- 12 Donoho D L, Tsai Y. Extensions of compressed sensing[J]. *Signal Processing*, 2006, 86(3): 533–548.
- 13 Ryoichi Horisaki, Jun Tanida, Adrian Stern, *et al.*. Multidimensional imaging using compressive Fresnel holography [J]. *Opt Lett*, 2012, 37(11): 2013–2015.
- 14 Brady D J, Choi K, Marks D L, *et al.*. Compressive holography [J]. *Opt. Express*, 2009, 17(15): 13040–13049.
- 15 Wu Yingchun, Wu Xuecheng, Wang Zhihua, *et al.*. Compressed sensing reconstruction of digital in-line holography [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, 31(11): 1109001.  
吴迎春, 吴学成, 王智化, 等. 压缩感知重建数字同轴全息[J]. *光学学报*, 2011, 31(11): 1109001.
- 16 Chen Jiabi, Su Xianyu. *The Principle and Application of Optical Information Technology*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2002. 136–138.  
陈家璧, 苏显渝. *光学信息技术原理及应用*[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002. 136–138.
- 17 Baraniuk R G. Compressive sensing[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, 24(4): 118–121.
- 18 Li Ke, Li Jun. Hologram compression based on compressive sensing[J]. *Journal of South China Normal University (Natural Science Edition)*, 2012, 44(4): 61–65.  
李科, 李军. 基于压缩传感的全息图压缩研究[J]. *华南师范大学学报(自然科学版)*, 2012, 44(4): 61–65.
- 19 Ma Jianshe, Xia Feipeng, Su Ping, *et al.*. Study on compressive sensing phase-shifting digital holography [J]. *Semiconductor Optoelectronics*, 2013, 34(1): 130–133.  
马建设, 夏飞鹏, 苏萍, 等. 压缩感知相移数字全息术[J]. *光电技术应用*, 2013, 34(1): 130–133.
- 20 Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655–4666.
- 21 Needell D, Vershynin R. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit [J]. *IEEE Signal Processing Society*, 2010, 4(2): 310–316.