

计算全息三维显示的信息量及其简化

王 辉 金洪震 毋东元 李志光

(浙江师范大学信息光学研究所, 浙江 金华 321004)

摘要 全息信息简化是基于波前再现的全息三维显示技术重要的课题。对全息三维显示的信息量与再现像的视差角与视场角的关系进行了分析,指出全息三维显示的巨大信息量是为了提供足够的视差和视场,以达到人眼立体视觉效果。在牺牲垂直视差并保证足够的水平视差角和视场角的条件下,利用光栅对全息图进行取样,计算了光栅取样全息图对信息压缩的极限,分析了简化后全息图再现像的特点和存在的问题,对于信息压缩后的光栅取样全息图的再现进行了设计。

关键词 全息; 三维显示; 全息信息量; 信息压缩

中图分类号 O432 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201441.0209012

Information Capacity and Reduction in Computing Holographic Three-Dimensional Display

Wang Hui Jin Hongzhen Wu Dongyuan Li Zhiguang

(Institute of Information Optics, Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang 321004, China)

Abstract The quantitative relation of hologram information capacity with parallax and field angle is computed. The result points out that there is a mass of information in order to provide adequate parallax and field angle for three-dimensional display. With enough parallax and field angle, the limit of information reduction is given, and the characteristics of reconstruction image of grating sampled hologram (GSH) is analyzed. A design for using the GSH to three-dimensional displaying is proposed. This work can be guidance for fast computing hologram and holographic video.

Key words holography; three-dimensional display; hologram information capacity; information reduction

OCIS codes 090.2870; 090.5694; 100.6890; 110.3055

1 引 言

一幅用于三维显示的实际全息图信息量至少达到 10^{10} bit, 如以 30 Hz 帧频传输这样的信息, 至少需要数百千兆赫的带宽^[1]。早在 20 世纪 60 年代, 很多著名全息专家就对于全息信息问题给予了极大的关注^[2-4], 但是由于当时的相关技术与全息三维动态显示的要求距离太远, 关于全息信息量及其简化的讨论似乎没有实际意义, 因而这一问题很快就淡出了研究热点, 除了一些零星的研究^[5-7], 至今没有突破性的进展。目前, 由于计算机、通讯以及光电显示技术的极大进步, 基于波前再现的全息技术再次成为三维显示研究的热点技术之一^[8], 全息信息量及其简化也再次成为不可回避的问题。

计算全息的灵活性决定了其在三维显示中具有

巨大的应用潜力^[9]。对于计算全息而言, 信息量的研究显得更为重要。作为数字化全息图, 不仅要考虑计算量和存储容量问题, 还要考虑数据传输和显示。显然, 巨大的信息量对于全息数据传输和最终的显示都会带来很多困难。为了达到实时显示目的, 虽已提出了很多高速算法^[10-12], 但信息量并没有因为计算速度的提高而减少。

本文在分析全息信息量与视差角和视场角关系的基础上, 指出全息图的巨大信息量主要是为了提供足够大的视差角和视场角。根据人眼三维视觉原理, 对光栅取样全息图(GSH)的信息简化进行了全面的研究, 给出了信息简化的极限。对既可以减少信息量又可以保证足够视差角和视场角的光栅取样全息图技术的实现进行了详细的论述。

收稿日期: 2013-10-10; **收到修改稿日期**: 2013-11-21

基金项目: 国家自然科学基金(11374267)、浙江师范大学创新团队项目

作者简介: 王 辉(1958-), 男, 博士, 教授, 主要从事光信息处理、全息三维显示、微光学元件设计等方面的研究。

E-mail: wh@zjnu.cn

2 全息图信息量与视差和视场关系

设物光波和参考光复振幅分别 $O(x_h, y_h) = A_o(x_h, y_h) \exp[i\varphi_o(x_h, y_h)]$ 和 $R(x_h, y_h) = \exp[i\varphi_r(x_h, y_h)]$, 采用博奇编码方法计算全息图时, 全息图的振幅透射率为

$$\tau(x_h, y_h) = 0.5 \{1 + A_o(x_h, y_h) \cos[\varphi_o(x_h, y_h) - \varphi_r(x_h, y_h)]\}. \quad (1)$$

全息图的信息量可以用(1)式的空间自由度来表示, 而空间自由度是空间带宽积的 2 倍^[13]. $\tau(x_h, y_h)$ 的空间带宽积可以用图 1 计算. 设图 1 中物体和全息图相对于光轴 z 对称放置. 可以看出, 全息图上最大空间频率是由物体边缘(O_1 或 O_2) 发出的光线与参考光在全息图边缘处干涉形成的, 所以可以用点全息图来分析全息图的空间带宽积.

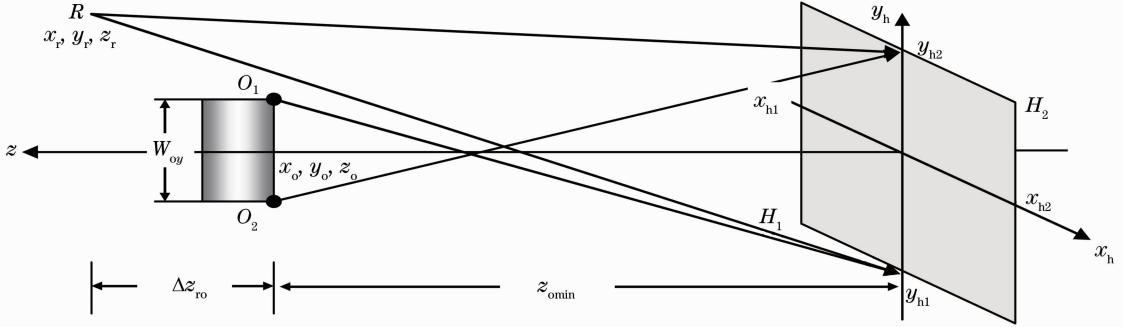


图 1 菲涅耳计算全息原理光路

Fig. 1 Optical principle of computer generated Fresnel hologram

在菲涅耳近似下, 物光相位分布为 $\varphi_o(x_h, y_h) = k \frac{(x_h - x_o)^2 + (y_h - y_o)^2}{2z_o}$, 而参考光相位分布为 $\varphi_r(x_h, y_h) = k \frac{(x_h - x_r)^2 + (y_h - y_r)^2}{2z_r}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ 为全息图记录波长. 全息图的空间频率为

$$\begin{cases} f_{hx} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_h} [\varphi_o(x_h, y_h) - \varphi_r(x_h, y_h)] = f_{ox} - f_{rx}, \\ f_{hy} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y_h} [\varphi_o(x_h, y_h) - \varphi_r(x_h, y_h)] = f_{oy} - f_{ry}, \end{cases} \quad (2)$$

式中 f_{ox}, f_{oy} 和 f_{rx}, f_{ry} 分别是物光波和参考光的空间频率:

$$\begin{cases} f_{ox} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi_o(x_h, y_h)}{\partial x_h} = \frac{x_h - x_o}{\lambda z_o}, & f_{oy} = \frac{y_h - y_o}{\lambda z_o}, \\ f_{rx} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi_r(x_h, y_h)}{\partial x_h} = \frac{x_h - x_r}{\lambda z_r}, & f_{ry} = \frac{y_h - y_r}{\lambda z_r}, \end{cases} \quad (3)$$

代入(2)式可以得到

$$f_{hx} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{z_r - z_o}{z_o z_r} x_h - \frac{x_o}{z_o} + \frac{x_r}{z_r} \right), \quad f_{hy} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{z_r - z_o}{z_o z_r} y_h - \frac{y_o}{z_o} + \frac{y_r}{z_r} \right). \quad (4)$$

设全息图尺寸为 $W_{hx} \times W_{hy}$, 物体大小 $W_{ox} \times W_{oy}$, 物点与全息图最近距离是 z_{omin} . 通过(4)式, 可得全息图的最大空间频率和最小空间频率分别为

$$f_{hxmax} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{z_r - z_{omin}}{z_{omin} z_r} \frac{W_{hy}}{2} + \frac{W_{ox}}{2z_{omin}} + \frac{x_r}{z_r} \right), \quad f_{hymax} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{z_r - z_{omin}}{z_{omin} z_r} \frac{W_{hy}}{2} + \frac{W_{oy}}{2z_{omin}} + \frac{y_r}{z_r} \right), \quad (5)$$

$$f_{hxmin} = \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{z_r - z_{omin}}{z_{omin} z_r} \frac{W_{hy}}{2} - \frac{W_{ox}}{2z_{omin}} + \frac{x_r}{z_r} \right), \quad f_{hymin} = \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{z_r - z_{omin}}{z_{omin} z_r} \frac{W_{hy}}{2} - \frac{W_{oy}}{2z_{omin}} + \frac{y_r}{z_r} \right). \quad (6)$$

最大频率和最小频率与参考光坐标 (x_r, y_r, z_r) 有关. (x_r, y_r, z_r) 选取的原则是, 必须保证物光和参考光分离. 当计算全息采用博奇编码方法时, 分离的条件是全息图最小空间频率必须满足(参见图 1 y_{hl} 点)

$$\begin{cases} f_{hxmin} = \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{z_r - z_{omin}}{z_{omin} z_r} \frac{W_{hy}}{2} - \frac{W_{ox}}{2z_{omin}} + \frac{x_r}{z_r} \right) \geq 0 \\ f_{hymin} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{z_r - z_{omin}}{z_{omin} z_r} \left(-\frac{W_{hy}}{2} \right) - \frac{W_{oy}}{2z_{omin}} + \frac{y_r}{z_r} \right] \geq 0 \end{cases}, \quad (7)$$

解之得

$$\frac{x_r}{z_r} \geq \frac{z_r - z_{\text{omin}}}{z_{\text{omin}} z_r} \frac{W_{\text{hr}}}{2} + \frac{W_{\text{or}}}{2z_{\text{omin}}}, \quad \frac{y_r}{z_r} \geq \frac{z_r - z_{\text{omin}}}{z_{\text{omin}} z_r} \frac{W_{\text{hy}}}{2} + \frac{W_{\text{oy}}}{2z_{\text{omin}}}. \quad (8)$$

直射光和再现光刚好分离时,

$$\frac{x_r}{z_r} = \frac{z_r - z_{\text{omin}}}{z_{\text{omin}} z_r} \frac{W_{\text{hr}}}{2} + \frac{W_{\text{or}}}{2z_{\text{omin}}}, \quad \frac{y_r}{z_r} = \frac{z_r - z_{\text{omin}}}{z_{\text{omin}} z_r} \frac{W_{\text{hy}}}{2} + \frac{W_{\text{oy}}}{2z_{\text{omin}}}, \quad (9)$$

代入(5)式,有

$$f_{\text{hrmax}} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{z_r - z_{\text{omin}}}{z_{\text{omin}} z_r} W_{\text{hr}} + \frac{W_{\text{or}}}{z_{\text{omin}}} \right), \quad f_{\text{hymax}} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{z_r - z_{\text{omin}}}{z_{\text{omin}} z_r} W_{\text{hy}} + \frac{W_{\text{oy}}}{z_{\text{omin}}} \right). \quad (10)$$

全息图相当于一个观察窗口,图2给出了通过全息窗口观察再现像的过程。 ω 是视差角, ω 越大,再现像的视差越大,立体感越强。 ψ 是视场角,它反映了能够观看的空间大小。

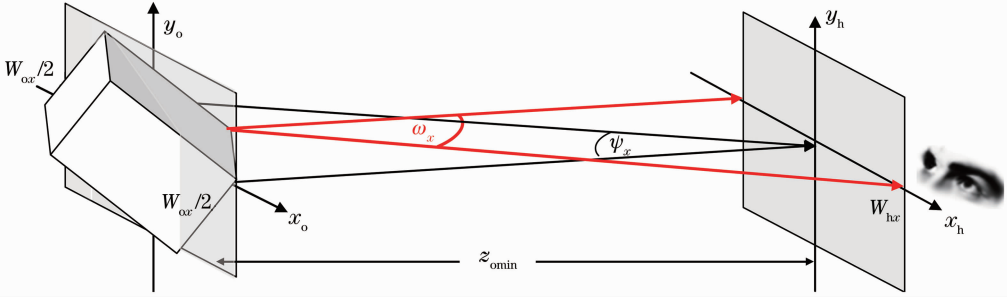


图2 全息图尺寸与视差角、视场角关系

Fig. 2 Relationship of parallax and field angle with size of hologram

在旁轴近似下,

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{W_{\text{hr}}}{z_{\text{omin}}}, & \omega_y = \frac{W_{\text{hy}}}{z_{\text{omin}}}, \\ \psi_x = \frac{W_{\text{or}}}{z_{\text{omin}}}, & \psi_y = \frac{W_{\text{oy}}}{z_{\text{omin}}}, \end{cases} \quad (11)$$

由(10)式,此时全息图最大空间频率可以表示为

$$\begin{cases} f_{\text{hrmax}} = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\Delta z_{\text{ro}}}{z_r} \omega_x + \psi_x \right), \\ f_{\text{hymax}} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\Delta z_{\text{ro}}}{z_r} \omega_y + \psi_y \right), \end{cases} \quad (12)$$

式中 $\Delta z_{\text{ro}} = z_r - z_{\text{omin}}$ 。全息图的带宽积为

$$B_h = W_{\text{hr}} f_{\text{hrmax}} W_{\text{hy}} f_{\text{hymax}} = \frac{\omega_x \omega_y z_{\text{omin}}}{\lambda^2} \left(\frac{\Delta z_{\text{ro}}}{z_r} \omega_x + \psi_x \right) \left(\frac{\Delta z_{\text{ro}}}{z_r} \omega_y + \psi_y \right). \quad (13)$$

根据抽样定理,抽样频率应大于全息图最大频率的2倍,则全息图的抽样点数至少为

$$N_h = \frac{4\omega_x \omega_y z_{\text{omin}}}{\lambda^2} \left(\frac{\Delta z_{\text{ro}}}{z_r} \omega_x + \psi_x \right) \left(\frac{\Delta z_{\text{ro}}}{z_r} \omega_y + \psi_y \right). \quad (14)$$

如果物体尺寸比全息图大很多,比值 $\omega_x/\psi_x, \omega_y/\psi_y$ 很小,(14)式可以近似为

$$N_h \approx \frac{4z_{\text{omin}}^2 \omega_x \omega_y \psi_x \psi_y}{\lambda^2}. \quad (15)$$

(14)式称作全息图的自由度,自由度可以表征全息的信息量^[13]。(14)式表征了全息图的信息量与观察物体时视差角和视场角的关系,视差角和视场角

越大,所需要的信息量也就越大。

以一个实际例子来说明(14)式的数量级。在平面电视显示中,图像的大小与观察者的距离有一最佳设计^[14]。实验表明,2 m观看距离上获得较强临场感的图像面积约为0.8 m²。根据幅型比例16:9计算,在2 m观察距离时,屏幕显示尺寸为1196 mm × 673 mm。假设在计算全息图时,物体的大小等于电视屏幕尺寸,即 $W_{\text{or}} \approx 1196$ mm, $W_{\text{oy}} \approx 673$ mm。为了使得双目视差起作用,全息图在水平(x)方向的宽度 W_{hr} 必须大于或等于瞳距 W_e ,人眼双瞳距离一般为 $W_e = 65$ mm,同时考虑运动视差对立体视觉的影响,为此设全息图尺寸为 $W_{\text{hr}} \times W_{\text{hy}} = 100$ mm × 100 mm。设物体纵向深度为 $\Delta z_o = 500$ mm,物体中心与观察者距离为2000 mm,参考光坐标 $z_r = 2000$ mm,因此 $z_{\text{omin}} = 1750$ mm, $\Delta z_{\text{ro}} = 250$ mm, $\omega_x = \omega_y = 0.0571$, $\psi_x = 0.6834$, $\psi_y = 0.3846$;设全息图计算时波长选取人眼最灵敏的波长 $\lambda = 0.555 \times 10^{-3}$ mm,根据以上参数计算(14)式结果为 $N_h \approx 3.4 \times 10^{10}$ 。如果以30 Hz帧频传输这样信息,经计算传输带宽约为510 GHz,这个结果和文献[1]给出的数据是一致的。

3 全息图的信息压缩与简化

3.1 降低垂直视差

在观察距离一定的情况下,全息图尺寸越大,视

差越大,立体感越强。但人眼获得立体视觉主要取决于水平视差,只有当眼睛上下移动才能感知垂直视差,所以当观察者静止或者只有水平移动时,可以降低垂直视差的要求,即可以减小全息图在垂直方向的视差角 ω_y 。减小 ω_y 的条件是必须保证其在垂直方向像点的衍射角小于人眼的分辨极限。设全息图垂直方向的宽度为 W_{hyE} 时,其对应方向的像点可以被眼分辨,根据衍射原理则有 $W_{hyE} \geq \lambda/\delta_E$, δ_E 是人眼的分辨角,当取 $W_{hyE} = \lambda/\delta_E$ 时,有

$$\omega_y = \frac{W_{hyE}}{z_{omin}} = \frac{\lambda}{z_{omin}\delta_E}, \quad (16)$$

这是一个很小的量,代入(14)式并作近似后,得到

$$N_{hys} = 4z_{omin} \frac{\omega_x\psi_x\psi_y}{\lambda\delta_E}. \quad (17)$$

(17)式和(15)式的比值为

$$\frac{N_{hys}}{N_h} = \frac{\lambda}{z_{omin}\delta_E\omega_y}. \quad (18)$$

众所周知,在中等亮度和对比度下人眼的分辨角为 $1' \sim 1.5'$,即 $2.90 \times 10^{-4} \sim 4.36 \times 10^{-4}$ rad。在动态显示时,可选取 $\delta_E = 1.5' = 4.3 \times 10^{-4}$ rad^[15],对于2 m处的图像,人眼可分辨的像点间隔为0.86 mm。作为比较,将第2节最后提到的例子中 $\omega_y = 0.0571$ 代入(18)式得到 $N_{hys}/N_h \approx 1/77$ 。在不考虑垂直视差的情况下,全息图信息量约是原来的1/77。

3.2 全息图水平方向取样

为了获得水平立体视差,全息图在 x 方向的尺寸难以减小。根据衍射原理,100 mm宽度的全息图,再现像分辨角为 $\delta_{ix} = \frac{\lambda}{W_{hr}} = \frac{0.555 \times 10^{-3}}{100} = 5.55 \times 10^{-6}$ 。这个分辨角远远小于人眼的分辨角 $\delta_E =$

4.3×10^{-4} rad。所以全息图的巨大信息量并不是为了提供适当的分辨率,而是为了实现足够大的视差角。其结果就使得全息图显示出很高的分辨率,但眼睛无法分辨。从分辨率这个角度来看,全息图的信息在水平方向仍然是冗余的。那么是否可以既保证全息显示具有足够大的视差角,又不浪费全息图再现像的分辨率呢?

人眼在观察全息图时,是通过进入瞳孔的细小光束观察物体的,如图3所示。如果视线从A点移动到B点,观察到的物点并无人眼可分辨的变化,则A和B之间的部分全息图可以去掉。因此可以通过对全息图取样减少全息图的大小。Burckhardt等^[2-3]曾经提出通过对全息图的取样减少全息信息量,但对于当时的光学全息图,所提出的方法是很不实用的,所以对这一技术没有进行深入研究,但在计算全息中则具有重要意义。

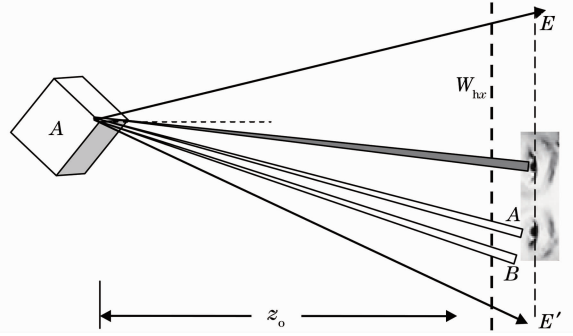


图3 全息图的取样

Fig. 3 Sampling hologram using grating

下面讨论通过光栅函数对全息图取样后对再现像的影响,设光栅函数为

$$g(x_h) = \frac{1}{d} \left[\text{rect}\left(\frac{x_h}{a}\right) \otimes \text{comb}\left(\frac{x_h}{d}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{x_h}{W_{hr}}\right), \quad (19)$$

式中 a 是光栅的透光部分, d 是光栅周期, W_{hr} 是全息图在 x 方向的长度。全息图被光栅取样后,透射率为

$$\tau_g(x_h, y_h) = \tau(x_h, y_h) \left[\text{rect}\left(\frac{x_h}{a}\right) \otimes \text{comb}\left(\frac{x_h - \Delta x_h}{d}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{x_h - \Delta x_h}{W_{hr}}\right). \quad (20)$$

把这样的全息图称作光栅取样全息图。

将全息图透射率(1)式写成指数形式,并仅考虑 x 方向,

$$\tau(x_h) = \frac{1}{2} + \frac{A_o}{4} \exp\{i[\varphi_o(x_h) - \varphi_r(x_h)]\} + \frac{A_o}{4} \exp\{-i[\varphi_o(x_h) - \varphi_r(x_h)]\}, \quad (21)$$

式中 $\varphi_o(x_h) = k \frac{(x_h - x_o)^2}{2z_o}$, $\varphi_r(x_h) = k \frac{(x_h - x_r)^2}{2z_r}$ 。(21)式的第一项是直流项,不参与成像,第二项包含原物体像,第三项包含原物体共轭像。考虑第二项被光栅取样后的分布

$$\tau_g(x_h) = \frac{A_o}{4d} \exp\{i[\varphi_o(x_h) - \varphi_r(x_h)]\} \left[\text{rect}\left(\frac{x_h}{a}\right) \otimes \text{comb}\left(\frac{x_h}{d}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{x_h}{W_{hr}}\right). \quad (22)$$

全息图再现时,可能会有移动 Δx_h ,所以把(22)式写成

$$\begin{aligned} \tau_g(x_h) = & \frac{A_o}{4d} \exp\{i[\varphi_o(x_h - \Delta x_h) - \varphi_r(x_h - \Delta x_h)]\} \left[\text{rect}\left(\frac{x_h}{a}\right) \otimes \text{comb}\left(\frac{x_h - \Delta x_h}{d}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{x_h - \Delta x_h}{W_{hr}}\right) = \\ & \frac{A_o}{4d} \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z_o} x_o^2\right) \exp\left(-\frac{i\pi}{\lambda z_r} x_r^2\right) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z_o} (x_h - \Delta x_h)^2\right] \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda z_r} (x_h - \Delta x_h)^2\right] \times \\ & \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda z_o} x_o(x_h - \Delta x_h)\right] \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda z_r} x_r(x_h - \Delta x_h)\right] \left[\text{rect}\left(\frac{x_h}{a}\right) \otimes \text{comb}\left(\frac{x_h - \Delta x_h}{d}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{x_h - \Delta x_h}{W_{hr}}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

用再现光 $C(x_h) = R(x_h) = \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{(x_h - x_r)^2}{2z_r}\right]$ 照明上述分布, 从全息图出射的光复振幅为

$$\begin{aligned} u_{ig}(x_h) = & \frac{A_o}{4d} \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z_o} x_o^2\right) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z_o} (x_h^2 - 2x_h \Delta x_h + \Delta x_h^2)\right] \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z_r} (2x_h \Delta x_h - \Delta x_h^2)\right] \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda z_r} x_r x_h\right) \times \\ & \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda z_o} (x_o x_h - x_o \Delta x_h)\right] \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda z_r} (x_r x_h - x_r \Delta x_h)\right] \left[\text{rect}\left(\frac{x_h}{a}\right) \otimes \text{comb}\left(\frac{x_h - \Delta x_h}{d}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{x_h - \Delta x_h}{W_{hr}}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

(24) 式表达的是从全息图出射的光。可以证明, 衍射后在像平面上的复振幅分布为

$$u_{igO}(x_i) = aW_{hr}A \exp\left(-i\frac{\pi}{\lambda} \frac{x_i^2}{z_o}\right) \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda z_o} \frac{x_i \Delta x_h}{z_o}\right) \sum \frac{\sin\left(\pi \frac{n}{d} a\right) \sin\left[\frac{\pi W_{hr}}{\lambda z_o} \left(x_i - x_o + \frac{\Delta z_{or}}{z_r} \Delta x - \frac{n}{d} \lambda z_o\right)\right]}{\pi \frac{n}{d} a \frac{\pi W_{hr}}{\lambda z_o} \left(x_i - x_o + \frac{\Delta z_{or}}{z_r} \Delta x - \frac{n}{d} \lambda z_o\right)}. \quad (25)$$

光强分布为

$$I_i = \left\{ aW_{hr}A \sum \frac{\sin\left(\pi \frac{n}{d} a\right) \sin\left[\frac{\pi W_{hr}}{\lambda z_o} \left(x_i - x_o + \frac{\Delta z_{or}}{z_r} \Delta x - \frac{n}{d} \lambda z_o\right)\right]}{\pi \frac{n}{d} a \frac{\pi W_{hr}}{\lambda z_o} \left(x_i - x_o + \frac{\Delta z_{or}}{z_r} \Delta x - \frac{n}{d} \lambda z_o\right)} \right\}^2. \quad (26)$$

(26) 式即是光栅取样全息图再现的像点分布, 可以看出, 由于光栅取样, 再现像变为多级像点, 多级像点坐标为

$$\begin{aligned} x_i = & x_o - \frac{\Delta z_{or}}{z_r} \Delta x + \frac{n}{d} \lambda z_o, \\ n = & 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

式中 x_o 是原物点坐标, 也是理想像点坐标。 $\frac{\Delta z_{or}}{z_r} \Delta x$ 是由于全息图位移 Δx 而产生的像点位移, 它既与全息图的移动量 Δx 有关, 也与物点与参考光源的距离 Δz_{or} 有关。当 $\Delta z_{or} = z_o - z_r = 0$ 时, $\frac{\Delta z_{or}}{z_r} \Delta x = 0$, 说明此时全息图的位移并不产生像点的位移。这正是无透镜傅里叶变换全息图, 根据傅里叶变换的位移性质, 当函数移动时, 其变换函数只发生相移而不产生位移。

从 (27) 式可知, 每一像点强度被因子 $\frac{\sin[\pi(n/d)a]}{\pi(n/d)a}$ 限制, 当 $(n/d)a = \pm 1$ 时, $\frac{\sin[\pi(n/d)a]}{\pi(n/d)a} = 0$, 像点振幅为零, 此时 $n_c = \pm(d/a)$ 。比 n_c 大的级次虽然不一定等于零, 但振幅很小, 可以忽略不计。因此可以认为多级像点集中在

$x_o - \frac{\Delta z_{or}}{z_r} \Delta x \pm n_c \frac{\lambda z_o}{d}$ 范围内, 因此多级像点范围的宽度为

$$\Delta x_i = 2\lambda z_o/a. \quad (28)$$

根据瑞利判据, 如果 $\frac{\Delta x_i}{2} = \frac{\lambda z_o}{a}$ 小于人眼的分辨极限, 则像点的离散人眼不能分辨, 仍然认为是一个像点。因而对于取样单元全息图的宽度 a 要求为 $\frac{\lambda z_o}{a} \leq \delta_E z_o$, 即 $a \geq \frac{\lambda}{\delta_E}$ 。显然这个要求和 $W_{hrE} = \frac{\lambda}{\delta_E}$ 是一致的。当 $\lambda = 555 \text{ nm}$ 时, $a = \frac{0.555 \times 10^{-3}}{4.3 \times 10^{-4}} = 1.29 \text{ mm}$ 。

图 4 表示当 $d = 4a$, $z_o = 2000 \text{ mm}$, $\lambda = 555 \text{ nm}$ 时, 随着光栅取样全息图的移动多级像点的分布。图中的虚线轮廓线是 $\frac{\sin[\pi(n/d)a]}{\pi(n/d)a}$ 分布曲线。

下面计算光栅取样全息图的信息量。在光栅全息全息图中, 一个取样单元取样全息图宽度为 $a = \frac{\lambda}{\delta_E}$, $\omega_{xa} = \frac{a}{z_{omin}} = \frac{\lambda}{z_{omin} \delta_E}$, 根据 (17) 式, 取样单元全息图信息量为

$$N_{hys} = 4z_{omin} \frac{\omega_{xa} \psi_x \psi_y}{\lambda \delta_E} = 4 \frac{\psi_x \psi_y}{\delta_E^2}. \quad (29)$$

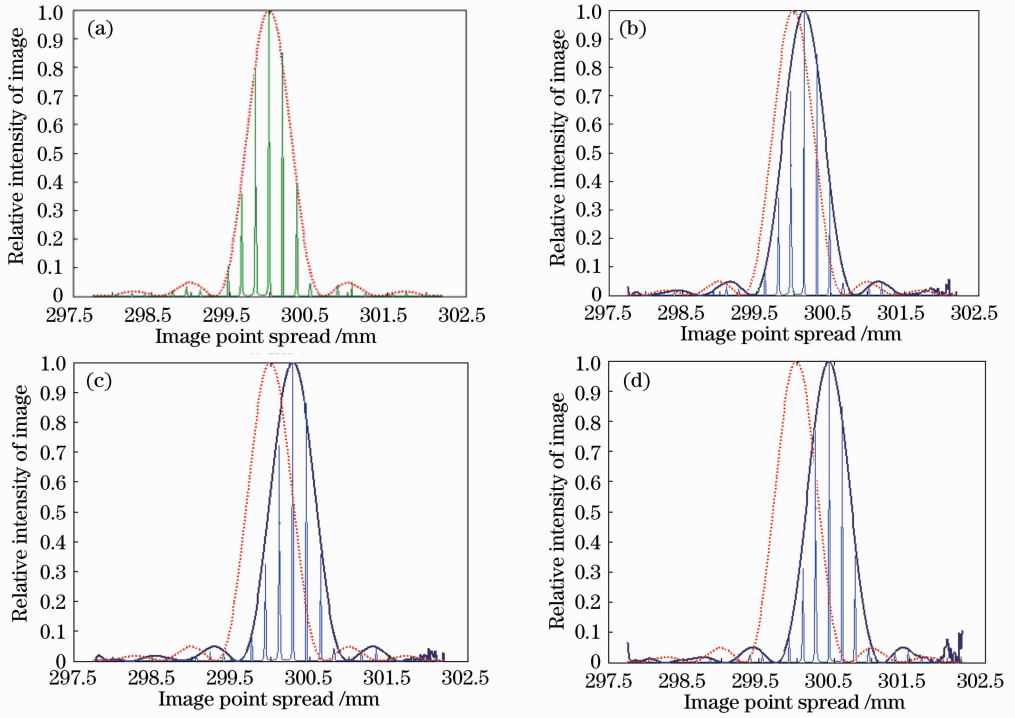


图 4 光栅取样全息图的多级像点以及像点的移动。(a)无位移；(b)位移 a ；(c)位移 $2a$ ；(d)位移 $3a$

Fig. 4 Multi-image points of GSH and their motion when GSH displacement is (a) zero, (b) a , (c) $2a$, (d) $3a$

取样光栅周期为 d , 单元全息图的总数是 W_{hr}/d , 最后可得光栅取样全息图的信息量为

$$N_{h_{yrs}} = \frac{W_{hr}}{d} N_{h_{yrs}} = 4 \frac{W_{hr}}{d} \frac{\psi_x \psi_y}{\delta_E^2} = 4 z_{omin} \frac{\omega_x}{d} \frac{\psi_x \psi_y}{\delta_E^2}. \quad (30)$$

其与(17)式的比值为

$$\frac{N_{h_{yrs}}}{N_{h_{ys}}} = \frac{\lambda}{d \delta_E} = \frac{a}{d}. \quad (31)$$

(31) 式表明 d 越大, 信息量越小。但由图 3 可知, 观

察者通过取样全息图观看再现像时, 好像是通过栅栏看物体, d 越大, “栅栏”效应越明显, 这一问题将在下一节讨论。

4 取样全息图栅栏效应的消除及垂直方向扩展

全息图的简化过程可以用图 5 来说明。仅考虑水平视差时, 只需要计算图 5(b)所示的宽度为 W_{hyE}

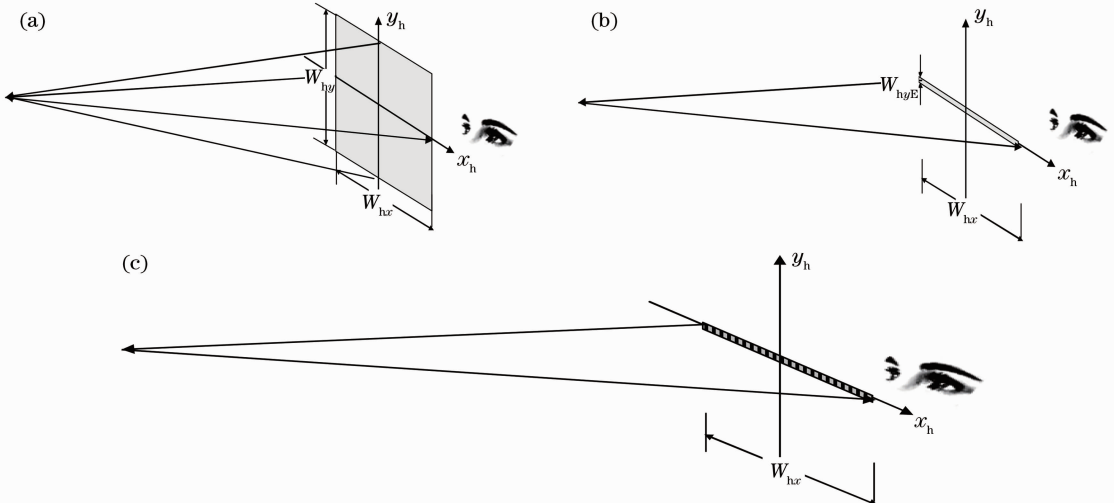


图 5 光栅取样全息图过程

Fig. 5 Process of sampling hologram using grating

的条形全息图就可以了。在保证水平视差的同时，可以进一步用光栅对条形全息图取样，如图 5(c) 所示。这样在进行全息图计算时，只需计算被取样部分全息图就行了，在减少计算量的同时，存储容量和传输带宽也大大减少了。但是，当直接通过光栅取样全息图观察再现像时[图 5(c)]，不仅产生“栅栏”效应，而且在垂直方向双眼被固定在很窄的条形全息图区域，当眼睛上下移动时将会移出再现光场而无法观察到再现像。

4.1 栅栏效应的消除

当全息图移动 Δx_h 时像点移动 $\frac{\Delta z_{or}}{z_r} \Delta x_h$ ，如果 $\frac{\Delta z_{or}}{z_r} \Delta x_h$ 很小以至于难以察觉，就可以将光栅取样全息图拷贝到“栅栏”空隙中，如图 6 所示，H0 是原光栅取样全息图，H1、H2 和 H3 是 H0 分别移动 $\Delta x_h = a, 2a, 3a$ 后的状态，将四个全息图叠加后得到全息图 Hs。图中的数字 0, 1, 2, 3 分别对应 H0, H1, H2, H3。

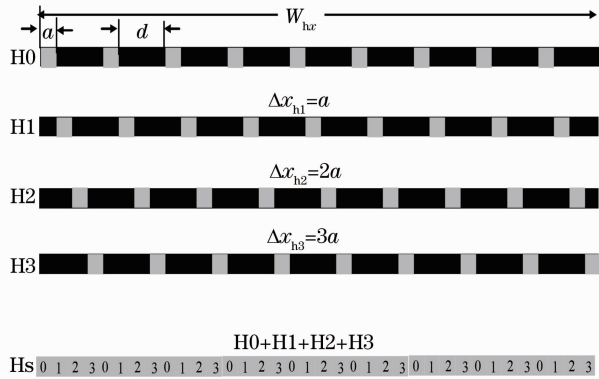


图 6 光栅取样全息图的叠加

Fig. 6 Superposition of grating sampling holograms

设光栅取样全息图的周期是 a 的整数倍，则全息图的叠加数为 $M_H = d/a$ ，全息图每一次移动 $\Delta x_h = a$ ，全息图的最大位移量为 $\Delta x_{hmax} = (d/a - 1)a$ 。图 7 是叠加后全息图再现像分布，可以看出，它与单个光栅全息图像比，像点有明显的扩展。但是当人眼观察再现像时，并看不到图 7 所示的叠加像，因为人眼是通过来自单元全息图的光线观察像点的，眼睛在静止时，只能看到来自某一单元附近的全息图成像光束。可以用图 8 来说明人眼观察再现像的情况。首先计算单只眼睛静止时观察某个像点 x_{i3} 时有几个单元全息图参与再现。设人眼的瞳孔直径为 d_e ，进入瞳孔的光束覆盖全息图的宽度为 $t_h = \frac{d_e}{z_o + z_e} z_o$ ，因此覆盖单元全息图的数量为 $\Delta n = \frac{t_h}{a}$

$= \frac{d_e}{a} \frac{z_o}{z_o + z_e}$ ，当眼睛紧贴全息图观察时 $\Delta n = \frac{d_e}{a}$ 达到最大，若瞳孔直径选 3 mm, $a = 1.29$ mm, $\Delta n \approx 2$ 。也就是说有两个相邻的单元全息图再现的像点 y_i 同时进入眼睛，两个像点距离为 $\frac{\Delta z_{or}}{z_r} a = \frac{200}{2000} \times 1.6 = 0.16$ mm，前面已经指出，对于 2 m 处的图像可以分辨的像点距离为 0.86 mm，所以 0.16 mm 间距此时人眼是不能分辨的。

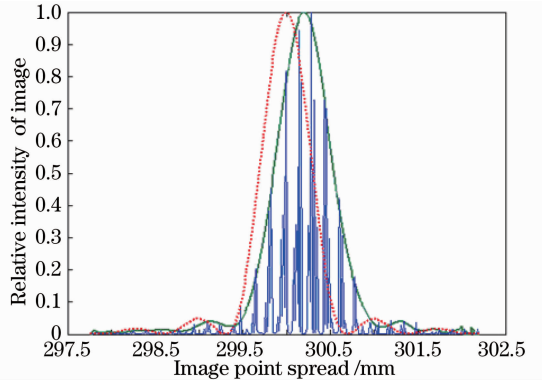


图 7 叠加全息图再现像

Fig. 7 Image of GSHs superimposed

然后再考虑左右眼分别通过光栅全息图 H3 和 H2 的单元全息图 3 和 2 观察再现像的情况。此时两只眼睛分别看到像点 x_{i2}, x_{i3} ，通过视轴辐合后，观察者感觉到的像点位于 x_i 。也就是说，当观察叠加光栅取样全息图的再现像时，看到的不是横向扩展的模糊像，而是像点的纵向移动。

参照图 8 可以算出纵向移动大小为

$$\Delta z_i = \frac{\Delta x_i}{\omega_e} = \frac{\Delta x_i}{D_e} z_o, \quad (32)$$

式中 D_e 是双眼的瞳距。因为全息图最大位移量为 Δx_{hmax} ，所以像点的最大位移为 $\frac{\Delta z_{or}}{z_r} \left(\frac{d}{a} - 1 \right) a$ ，像点纵向移动为

$$\Delta z_i = \frac{\Delta x_i}{D_e} z_o = \frac{\Delta z_{or} (d - a)}{z_r D_e} z_o. \quad (33)$$

Δz_i 能否被人眼察觉，取决于人眼的纵向分辨率。人眼的纵向分辨率可用图 9 来说明。 E_r, E_l 表示双眼，眼睛对于 P_1 和 P_2 点的远近是以视角 ω_1 和 ω_2 大小来判断的，根据图 9 可以得到它们的差为

$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{D_e}{z_o - \Delta z_o} - \frac{D_e}{z_o}. \quad (34)$$

如果这个视角差小于人眼的分辨率角 δ_E ，则人眼不能分辨。或者说如果能够觉察 $\Delta \omega$ ，必须满足 $D_e / (z_o - \Delta z_o) - D_e / z_o \geq \delta_E$ ，由此可以到眼睛的纵向分辨距离为

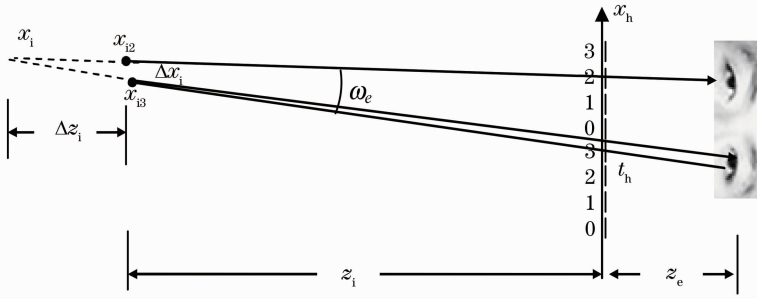


图 8 左右眼通过光栅取样全息图看到的像点

Fig. 8 Image points observed with left eye and right eye

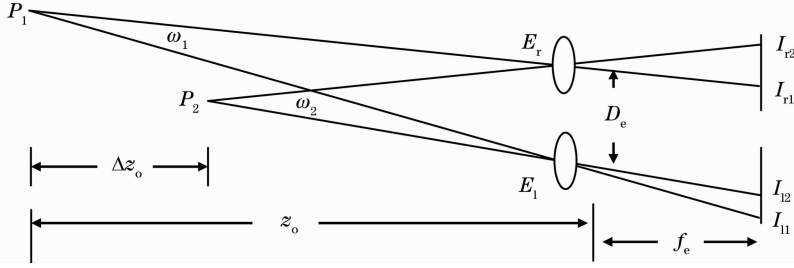


图 9 眼睛纵向分辨率计算

Fig. 9 Computing principle for longitudinal image resolution of eye

$$\Delta z_o \geq \frac{z_o^2 \delta E}{z_o \delta E + D_e} \approx \frac{z_o^2 \delta E}{D_e} \quad (35)$$

令 $\delta z_e = z_o^2 \delta E / D_e$, 是人眼纵向距离分辨极限, 为了使得位移 Δz_i 不可分辨, 则要求: $\Delta z_i \leq \delta z_e$, 即

$$\frac{\Delta z_{or} (d - a)}{z_r D_e} z_o \leq \frac{\delta E z_o^2}{D_e}, \text{解之得} \quad (36)$$

$$d \leq \frac{\delta E z_o z_r}{\Delta z_{or}} + a.$$

将第 2 节最后提到的例子相关数据代入, 即 $a = 1.29 \text{ mm}$, $z_r = 2000 \text{ mm}$, $z_o = 1750 \text{ mm}$, $\delta E = 4.3 \times 10^{-4}$, 代入(36)式得: $d \leq 7.3 \text{ mm}$. 取 d 为 a 的整数, d 最大可以为 $5a = 6.45 \text{ mm}$.

4.2 取样全息图的垂直扩展

为了使眼睛在垂直方向移动时仍能看到再现像, 将叠加后的光栅取样全息图再沿着 y 方向重复拷贝, 将形成图 10 所示的全息图. 那么这样的全息图再现情况如何呢?

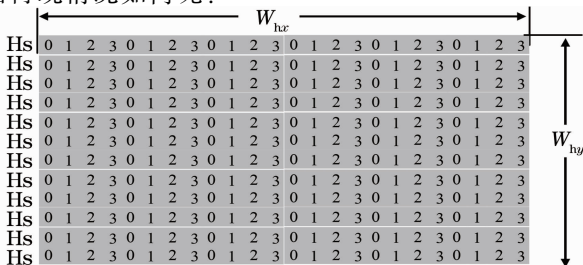


图 10 光栅取样全息图的纵向扩展

Fig. 10 Expanding GSHs along vertical direction

从图 10 可以看出, 在 y 方向的全息图实际上是一个取样单元全息图的重复, 取样单元再现像分布可以利用(25)式得到. 令 $W_{hr} = a$, $d = a$, 并将变量 x 改为 y , (25)式变为

$$u_{igO}(y_i) = B \frac{\sin \left[\frac{\pi a}{\lambda z_o} \left(y_i - y_o + \frac{\Delta z_{or}}{z_r} \Delta y_h \right) \right]}{\frac{\pi a}{\lambda z_o} \left(y_i - y_o + \frac{\Delta z_{or}}{z_r} \Delta y_h \right)} \quad (37)$$

式中 B 包含了与像点分布无关的量. Δy_h 是全息图在 y 方向的位移, 如果相邻全息图是密接的, 则相邻全息图间的位移为 $\Delta y_h = a$, 像点的移动为

$$\Delta y_i = \frac{\Delta z_{or}}{z_r} a.$$

与 x 方向再现原理一致, 眼睛在静止时, 只能看到邻近的几个取样单元全息图的再现像, 而难以觉察像点的横向模糊. 但当双眼上下移动时将看到像点随着移动. 利用图 11 可以分析眼睛上下移动

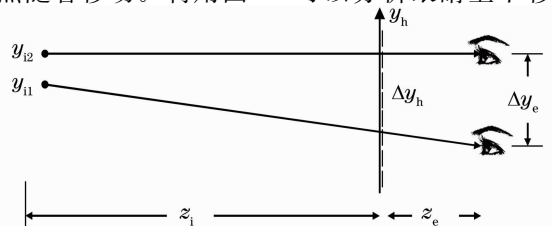


图 11 眼睛垂直移动时像点的移动

Fig. 11 Image point motion when eye moves vertically

时再现像点 y_i 的移动。设眼睛上下移动距离为 Δy_e , 视线扫过的全息图宽度为 $\Delta y_h = \frac{\Delta y_e}{z_o + z_e} z_o$, 对应像点的移动为

$$\Delta y_i = \frac{\Delta z_{or}}{z_r} \Delta y_h = \frac{\Delta z_{or}}{z_r} \frac{\Delta y_e}{z_o + z_e} z_o. \quad (38)$$

可以用前述例子数据估计位移量, $z_o = 1750$ mm, $z_r = 2000$ mm, 设眼睛上下移动距离为 $\Delta y_e = 50$ mm, 可以算出当在 $z_e = 100$ mm 处观察全息图时, 再现像点的纵向移动约为 6 mm。

5 结 论

光栅取样条形全息图的信息量由(30)式表示, 即 $N_{\text{hyrs}} = 4 \frac{W_{\text{hr}} \psi_x \psi_y}{d \delta_E^2} = 4 \frac{W_{\text{hr}} W_{\text{or}} W_{\text{oy}}}{dz_{\text{omin}}^2 \delta_E^2}$, 设 $W_{\text{hr}} = 100$ mm, $W_{\text{or}} = 1196$ mm, $W_{\text{oy}} = 673$ mm, $z_{\text{omin}} = 1750$ mm, 经过计算已知 $d = 5a = 6.45$ mm, 将数据代入计算得到 $N_{\text{hyrs}} = 8.8 \times 10^7$, 和 3.4×10^{10} 相比大大减少, 计算速度将提高 385 倍, 存储空间大幅减小。尽管为了消除“栅栏”效应和增加纵向移动范围, 需要对简化全息图进行拼接, 但并不增加计算量、存储容量和信息传输带宽, 因为所有的拼接都可以在显示终端进行。

如果仍以 30 Hz 帧频传输信息, 当每帧信息量为 $N_{\text{hyrs}} = 8.8 \times 10^7$ 时, 则需要的传输带宽约为 1.32 GHz, 与 510 GHz 相比要小很多, 如果按目前一路高清晰度电视的传输带宽 30 MHz 计算, 意味着若要传输全息信号, 则需要占用 $1320 \text{ MHz} / 30 \text{ MHz} = 44$ 路高清晰度电视频道, 就目前电视所能达到的传输带宽而言, 传输一两路可以进行三维显示的全息信号应该是没有问题的, 而且随着千兆电视网的迅速发展, 以及对全息信号进行数字化压缩, 传输带宽将不会是太大的问题。目前制约动态全息三维显示的最大问题是显示终端, 因为目前一般的显示器件的像素数远远低于一帧可进行三维显示全息图所需要的像素数^[16], 为了满足全息显示所要求的像素数, 一个有效的方法是采用显示器拼接技术^[17-18], 显然本文的全息信息简化理论及其拼接技术同样对终端显示器件设计具有指导意义。

参 考 文 献

- 1 Leith E N, Upatnieks J, Hildebrand B P, *et al.*. Requirements for wavefront-reconstruction television facsimile systems [J]. SMPTE, 1965, 74(1): 893-869.
- 2 C B Burckhardt. Information reduction in holograms for visual display [J]. J Opt Soc Am, 1968, 58(2): 241-246.
- 3 L H Lin. A method of hologram information reduction by spatial frequency sampling[J]. Appl Opt, 1968, 7(3): 545-548.
- 4 Alabert Macovski. Hologram information capacity[J]. J Opt Soc Am, 1970, 60(1): 21-29.
- 5 Mark A Neifeld. Information, resolution, and space-bandwidth product[J]. Opt Lett, 1998, 23(18): 1477-1479.
- 6 Wang Hui, Ying Chaofu, Wan Xu, *et al.*. Information content of 3D object and its compression in the digital hologram display[J]. Chinese J Lasers, 2003, 30(9): 823-828.
王 辉, 应朝福, 万 旭, 等. 数字全息显示中的三维物体信息量及其压缩[J]. 中国激光, 2003, 30(9): 823-828.
- 7 Xiaoou Cai, Hui Wang. On holographic information content and its compression[J]. Optik, 2006, 117(3): 131-137.
- 8 Pochi Yeh, Claire Gu. 3D displays: toward holographic video displays of 3D images[J]. Chin Opt Lett, 2013, 11(1): 010901.
- 9 Jia Jia, Wang Yongtian, Liu Juan, *et al.*. Progress of dynamic 3D displays of the computer generated hologram [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2012, 49(5): 050002.
贾 甲, 王涌天, 刘 娟, 等. 计算全息三维实时显示的研究进展[J]. 激光与光电子学进展, 2012, 49(5): 050002.
- 10 Shimobaba Tomoyoshi, Masuda Nobuyuki, Ito Tomoyoshi. Simple and fast calculation algorithm for computer-generated hologram with wavefront recording plane[J]. Opt Lett, 2009, 34(20): 3133-3135.
- 11 Li Fang, Bi Yong, Wang Hao, *et al.*. Weighted 3D GS algorithm for image-quality improvement of multi-plane holographic display[J]. Chinese J Lasers, 2012, 39(10): 1009001.
- 12 Pan Yijie, Wang Yongtian, Liu Juan *et al.*. Fast polygon-based method for calculating computer-generated holograms in three-dimensional display[J]. Appl Opt, 2013, 52(1): A290-A299.
- 13 Tao Chuncan, Tao Chuankuang. Optical Information Theory[M]. Beijing: Science Press, 1999. 39.
陶纯堪, 陶纯匡. 光学信息论[M]. 北京: 科学出版社, 1999. 39.
- 14 Fan Chaoxun. Display devices in digital TV[J]. Advanced Display, 2004, (4): 50-53.
范朝勋. 数字电视的显示器件[J]. 现代显示, 2004, (4): 50-53.
- 15 National Testing and Inspection Center for Radio & TV Products of China. Colorimetry in Digital TV and Flat-Screen TV[M]. Beijing: Posts & Telecom Press, 2010. 3-15.
国家广播电视产品质量监督检验中心. 数字电视与平板电视中的色度学[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2010. 3-15.
- 16 Wang Hao, Bi Yong, Li Fang, *et al.*. Enlargement technology of reconstructed image of computer generated hologram based on spatial light modulator[J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(3): 0309001.
王 皓, 毕 勇, 李 芳, 等. 基于空间光调制器的计算全息再现像放大技术[J]. 中国激光, 2013, 40(3): 0309001.
- 17 J Hahn, H Kim, Y Lim, *et al.*. Wide viewing angle dynamic holographic stereogram with a curved array of spatial light modulators [J]. Opt Express, 2008, 16(16): 12372-12386.
- 18 Fahri Yaras, Hoonjong Kang, Levent Onural. Circular holographic video display system[J]. Opt Express, 2011, 19(10): 9148-9156.