

# 新型正交消隐点的摄像机标定方法

卢 津 孙惠斌 常智勇

(西北工业大学现代设计与集成制造技术教育部重点实验室, 陕西 西安 710072)

**摘要** 在分析了摄像机模型, 单双目视觉系统标定以及消隐点几何特性的基础上, 提出了一种新型正交消隐点的摄像机标定方法。该方法仅使用摄像机在不同视角拍摄多幅(至少 3 幅)棋盘格模板的图像。引入一二阶径向畸变的摄像机针孔模型, 主要由消隐点的计算与优化, 消隐点法线性标定内部参数, 新型改进的 Tsai 两步法线性求解外部参数和非线性全局优化等组成。实验结果表明, 所给出的方法在全局优化之后, 7 幅图像的重投影平均像素误差为 0.0043 pixel, 耗时为 1.7911260 s, 可见速度快且精度高, 可广泛应用于计算机视觉研究、工业三维测量与重构、道路测绘等多个领域的摄像机标定。

**关键词** 机器视觉; 摄像机标定; 消隐点模型; 算法优化

**中图分类号** TP394.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201441.0208001

## A Novel Method for Camera Calibration with Orthogonal Vanishing Points

Lu Jin Sun Huibin Chang Zhiyong

(Key Laboratory of Contemporary Design and Integrated Manufacturing Technology,  
Ministry of Education, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China)

**Abstract** A novel camera calibrating method based on orthogonal vanishing points is proposed after analyzing camera model, calibration of single and stereo vision systems and geometrical characteristics of the vanishing point. Only one camera photographing at least three checkerboard patterns in different orientations is required. The pinhole and the first two terms of radial distortion model is introduced. The presented method mainly contains the computation and optimization of vanishing points, a linear calibration of intrinsic parameters, the improved Tsai's two-steps for extrinsic parameters and a nonlinear global refinement. Experimental result demonstrates that the proposed algorithm is fast and accurate. After global optimization, the re-projective mean pixel error is 0.0043 pixel and the time consumption is 1.7911260 s. This novel method can be widely applied in fields including the computer vision research, the industry three-dimensional measurement and reconstruction and road mapping.

**Key words** machine vision; camera calibration; vanishing point model; algorithm optimization

**OCIS codes** 110.2960; 110.5200; 150.1135; 150.0155; 150.1488

### 1 引 言

在计算机视觉测量领域中, 摄像机标定是从二维(2D)图像信息获取三维(3D)空间信息必不可少的步骤, 具体来说是根据获取的 2D 图像信息来确定摄像机内部参数, 畸变参数和外部参数的过程<sup>[1]</sup>。目前, 学者们在传统标定方法的理论基础上, 研究出

了众多简单灵活的工业相机新型标定方法。这些新型标定方法: 1) 在标定模板上进行不断创新, 从最初工艺要求极高的 3D 精密标定立方块到现今的 2D 平面模板和一维(1D)线性模板, 其中 2D 模板主要有圆点靶标、十字叉靶标、棋盘格靶标等, 1D 模板中单条结构应用最为广泛; 2) 在标定的理论算法上改

**收稿日期**: 2013-09-05; **收到修改稿日期**: 2013-09-24

**基金项目**: 陕西省自然科学基金(2013JM7001)、西北工业大学基础研究基金(JC20110215)

**作者简介**: 卢 津(1987—), 男, 博士研究生, 主要从事光学测量、机器视觉、图像处理等方面的研究。

E-mail: lujin\_6217@126.com

**导师简介**: 孙惠斌(1977—), 男, 博士, 副教授, 主要从事 CAD/CAM、网络化制造、服务型制造、制造协同、数字化制造、机器视觉、图像处理等方面的研究。E-mail: sun\_huibin@nwpu.edu.cn (通信联系人)

进与创新,自标定方法中的消隐点、圆环点、Kruppa方程、绝对二次曲线、绝对二次曲面等。其中, Caprile 等<sup>[2-3]</sup>首次提出了利用消隐点的几何特性来标定摄像机。近几年,研究者从消隐点的产生模型、算法、拍摄图像的数量等方面不断改进与创新,出现了一些便捷灵活的新标定方法。

从消隐点产生模型分类,已经存在的有:1)两对正交的平行直线,霍炬等<sup>[4]</sup>采用这个模型产生一对正交的消隐点,利用与摄像机原点的关系建立约束方程;2)正方形, Ricolfe-Viala 等<sup>[5-6]</sup>都采用正方形产生 4 个消隐点,然后用其建立消隐线约束方程来标定;3)非平行的矩形对,吴福朝等<sup>[7]</sup>采用其产生的两对正交消隐点,作为求解圆环点的过度量来标定摄像机;4)圆柱,魏锋等采用单幅圆柱体图像进行摄像机标定;5)长(正)方体, He 等<sup>[8-9]</sup>借助建筑物的棱角面关系,即长方块的棱角面关系,利用一幅图像产生 3 个消隐点,建立标定约束方程,而 Bouguet 等<sup>[10]</sup>利用同样的原理,从拍摄实际场景的图像中获取 7 个消隐点来建立标定约束方程。这些模板虽然选取简易灵活,但是对图像的预处理比较苛刻,不适合于精度要求高的场合,并且这些模板没有考虑消隐点退化的状况,仅仅一对平行直线很有可能因为拍摄视角的不合理,会出现消隐点退化的情形。

从算法原理分类有:1)通过消隐点计算圆环点,间接建立约束方程。吴福朝等<sup>[7,11]</sup>等没有直接利用消隐点的性质,而是将消隐点作为过度量来计算圆环点,并结合射影变换下交比不变性建立关于圆环点的约束方程;2)通过消隐点与绝对二次曲线图像(IAC)的关系直接或间接地建立 IAC 约束方程。陈爱华等<sup>[12]</sup>提出了采用两对正交消隐点,利用其相互正交的几何性质,直接建立消隐点与 IAC 的约束方程组来标定;3)通过消隐点与摄像机光心的空间轨迹在同一球面上的位置关系,建立圆的标定约束方程或间接构造消隐线的标定约束方程。文献[4]采用这一原理直接建立了圆的标定约束方程,而 Grammatikopoulos 等<sup>[13]</sup>将建立的圆标定约束方程转化成了消隐线标定约束方程,进行了非线性计算;4)通过消隐点与摄像机光心连线的几何关系,建立

向量垂直度函数的内参数优化方程。文献[4]在通过圆标定约束方程计算出内参数之后,又依这一关系建立了非线性的内部参数优化方法。

基于以上的研究,采用了规格 12×13,间距 6 mm的正方格子棋盘格模板,本文先利用最小二乘法拟合出图像中的直线束,而后采用 Levenberg-Marquard(L-M)算法寻优到最佳的消隐点坐标,在不考虑畸变的情况下,结合相互正交的消隐点对的性质线性求解出内部参数,再将其作为已知量,用本文新型改进的 Tsai 法线性求解外部参数,并引入畸变系数,创建图像残差当量最小化寻优函数,求解畸变系数和对所有参数全局优化。

## 2 基本模型

### 2.1 摄像机模型

在研究了 Tsai, Heikkilä 和 Zhang 等三种摄像机模型<sup>[14-15]</sup>的基础上,确定了本文的摄像机模型,如图 1 所示,从 3D 空间点  $S_w = [X_w, Y_w, Z_w]^T$  (对应的齐次坐标为  $\hat{S}_w = [X_w, Y_w, Z_w, 1]^T$ ) 到像素图像平面坐标系  $uv$  的 2D 点  $s = [u, v]^T$  (对应的齐次坐标为  $\hat{s} = [u, v, 1]^T$ ) 的变换经过了以下 4 步。

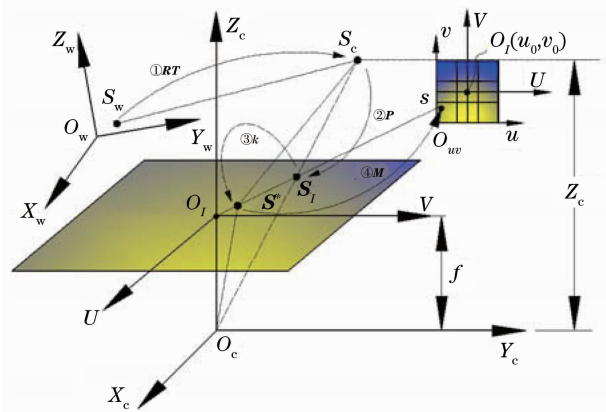
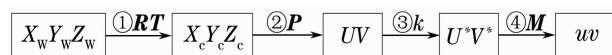


图 1 摄像机模型

Fig. 1 Camera model

在不考虑一、二阶径向畸变的前提下,该变换的线性摄像机针孔模型<sup>[16]</sup>为

$$\lambda \hat{s} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/d_x & 0 & u_0 \\ 0 & 1/d_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\textcircled{4}M} \underbrace{\begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\textcircled{2}P} \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix}}_{\textcircled{1}RT} S_w + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = K[R | T] \hat{S}_w, \quad \lambda \neq 0, \quad (1)$$

式中  $\mathbf{K}=\mathbf{MP}=[f_x \ 0 \ u_0; 0 \ f_y \ v_0; 0 \ 0 \ 1]$  为摄像机的内部参数矩阵,  $[\mathbf{R}|\mathbf{T}]$  为外部参数矩阵, 而  $(f_x, f_y)=(f/d_x, f/d_y)$  分别为  $u$  轴和  $v$  轴上的归一化焦距, 成像中心  $O_i$  的图像坐标为  $[u_0, v_0]$ ,  $\lambda$  为不确定因子。

实际上, 由于摄像机镜头存在不同程度的畸变, 致使经过  $\textcircled{2}P$  投影到物理图像平面坐标系  $UV$  的无畸变 2D 点坐标  $\mathbf{S}_i=[U, V]^T$  发生了偏离, 即畸变后的图像平面坐标  $\mathbf{S}^*=[U^*, V^*]^T$ , 其畸变的数学模型为

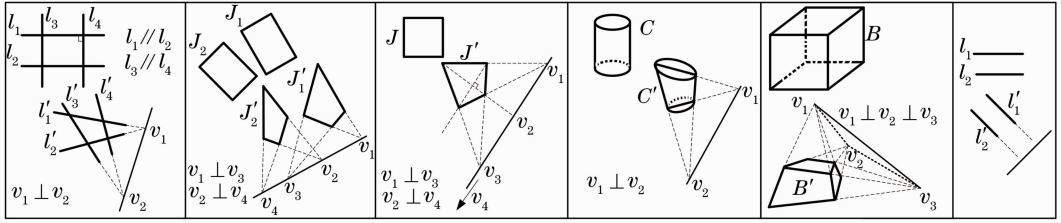


图 2 常见的消隐点模型。(a) 两条正交的平行直线; (b) 非平行的矩形对; (c) 正方形; (d) 圆柱; (e) 长(正)方体; (f) 退化模型  
Fig. 2 Regular vanishing points' models. (a) Two perpendicular parallel lines; (b) non-parallel rectangles; (c) square; (d) cylinder; (e) cuboid or cube; (f) degradation model

从概率与统计原理切入, 对于多条(不小于 3 条)直线组成的平行直线束, 只要摄像机光轴与模板平面所成夹角在  $0^\circ \sim 80^\circ$  之间, 必会在这束平行直线的图像中产生一个合理的消隐点。而对上述研究中的模板, 仅仅以两条直线组成的一对平行直线, 应用直线相交的原理, 使其在图像上产生一个消隐点, 则有些牵强。本文选取常用的棋盘格标定板, 充分利用其纹理特征, 在棋盘格图像的水平(hor)、垂直(ver)、主对角线(mad)和副对角线(vid)4 个方向上通过提取的若干角点, 采用最小二乘误差指标<sup>[18]</sup>拟合出四组平行直线束, 再以最小二乘原理和 L-M 寻优算法分别找到这四个方向上的四个最优消隐点。理论上, 这四个消隐点在无穷远处的同一条直线上, 通过这一原理, 可以进一步判定消隐点的求取是否合理, 并继续优化其坐标。

图 3 为本文的模型示意图。对任意一幅图像, 在像素图像平面坐标系  $uv$  上, 提取的第  $i$  行第  $j$  列角点像素坐标表示为  $s^{i,j}=[u_{ij}, v_{ij}]^T$ , 对应的齐次坐标为  $\mathbf{s}^{i,j}=[u_{ij}, v_{ij}, 1]^T$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ ; 水平、垂直、主对角线和副对角线拟合的平行直线束分别表示为:  $L_{\text{hor}}=\{l_{\text{hor}}^i | l_{\text{hor}}^i(a_{\text{hor}}^i, -1, b_{\text{hor}}^i), i=1, 2, \dots, m\}$ ,  $L_{\text{ver}}=\{l_{\text{ver}}^j | l_{\text{ver}}^j(a_{\text{ver}}^j, -1, b_{\text{ver}}^j), j=1, 2, \dots, n\}$ ,  $L_{\text{mad}}=\{l_{\text{mad}}^p | l_{\text{mad}}^p(a_{\text{mad}}^p, -1, b_{\text{mad}}^p), p=1, 2, \dots, m+n-3\}$ ,  $L_{\text{vid}}=\{l_{\text{vid}}^q | l_{\text{vid}}^q(a_{\text{vid}}^q, -1, b_{\text{vid}}^q), q=1, 2, \dots,$

$$\underbrace{S_1(1 + k_1 \Delta r^2 + k_2 \Delta r^4)}_{\textcircled{3}k} \approx S^*, \quad (2)$$

式中  $k_1, k_2$  为畸变系数,  $\Delta r^2=(U-U^*)^2+(V-V^*)^2$ 。

## 2.2 消隐点模型

在第 1 节中已经论述了常见的消隐点产生模型, 如图 2 所示。这些模型的一个共同特征是只采用一对平行直线产生消隐点, 这样难免会因拍摄视角不适导致退化情形<sup>[17]</sup>。

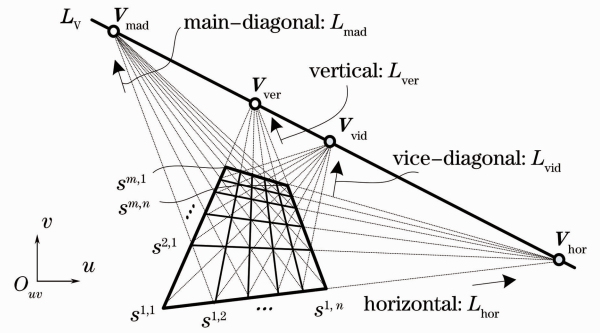


图 3 消隐点成像模型  
Fig. 3 Proposed model of vanishing points

$m+n-3\}$ ; 相应的消隐点表示为  $\mathbf{V}_{\text{hor}}=[u_{\text{hor}}, v_{\text{hor}}]^T$ ,  $\mathbf{V}_{\text{ver}}=[u_{\text{ver}}, v_{\text{ver}}]^T$ ,  $\mathbf{V}_{\text{mad}}=[u_{\text{mad}}, v_{\text{mad}}]^T$ ,  $\mathbf{V}_{\text{vid}}=[u_{\text{vid}}, v_{\text{vid}}]^T$ , 而这 4 个消隐点在无穷远处的同一条直线  $L_v$  上。

## 3 模型分析

文献[7]提及, 应用圆环点的理论标定摄像机, 关键取决于前期图像边缘提取、直线拟合以及无穷远点和无穷远直线的求解精度。用 Harris 算法提取角点之后, 本节将主要分析论证直线的拟合和消隐点的寻优计算。

1) 平行直线束: 如图 3 所示, 以水平方向为例, 设空间棋盘格在像素图像平面上的第  $i$  行投影点像

素齐次坐标为  $\mathbf{s}_{ij} = [u_{ij}, v_{ij}, 1]^T, j=1, 2, \dots, n$ , 该行对应要求解的直线模型  $v_{ij} = a_{\text{hor}}^i u_{ij} + b_{\text{hor}}^i$  用直线参数  $l_{\text{hor}}^i$  表示为  $[a_{\text{hor}}^i, -1, b_{\text{hor}}^i]$ , 那么该模型对应的最小二乘误差指标可表示为

$$E_{\text{LS}} = \epsilon(a_{\text{hor}}^i, b_{\text{hor}}^i) = \sum_{j=1}^n ([a_{\text{hor}}^i, -1, b_{\text{hor}}^i] [u_{ij}, v_{ij}, 1]^T)^2 = \sum_{j=1}^n (a_{\text{hor}}^i u_{ij} + b_{\text{hor}}^i - v_{ij})^2. \quad (3)$$

采用类似于文献[18]中的方法可求解出最佳的直线参数  $l_{\text{hor}}^i(a_{\text{hor}}^i, -1, b_{\text{hor}}^i)$ 。

同理, 其余方向也可得到最佳的直线参数  $l_{\text{ver}}^i(a_{\text{ver}}^i, -1, b_{\text{ver}}^i), l_{\text{mad}}^i(a_{\text{mad}}^i, -1, b_{\text{mad}}^i), l_{\text{vid}}^i(a_{\text{vid}}^i, -1, b_{\text{vid}}^i)$ 。

2) 消隐点: 由消隐点的定义<sup>[19]</sup>, 可知 2.2 节中的这 4 组平行直线束在图像上的无穷远处会形成 4 个消隐点  $\{V_{x'} = [u_{x'}, v_{x'}]^T, x' = \text{hor, ver, mad, vid}\}$ , 并且这 4 个消隐点会形成一条直线  $L_V$ 。实际上, 由于实验环境、图像拍摄视角、图像预处理、噪声干扰等影响, 在每个方向上的无穷远处平行直线束往往会产生众多消隐点, 那么最优的消隐点位置是每个方向上的消隐点到对应方向各条直线的距离和  $d$  最小。以水平方向为例, 定义最佳的消隐点目标函数模型为:

$$F_{\text{hor}} = \underset{l_{\text{hor}}^i}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^m d[V_{\text{hor}}(u_{\text{hor}}, v_{\text{hor}}), l_{\text{hor}}^i(a_{\text{hor}}^i, -1, b_{\text{hor}}^i)] = \underset{l_{\text{hor}}^i}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^m \frac{|a_{\text{hor}}^i u_{\text{hor}} - v_{\text{hor}} + b_{\text{hor}}^i|}{\sqrt{a_{\text{hor}}^i{}^2 + (-1)^2}}, \quad (4)$$

应用 L-M 算法通过求解上述优化模型来搜索最佳的消隐点位置。

```

% 算法描述: 计算水平方向消隐点位置 (Compute V_hor)
% 输入: 水平直线参数 l_hor^i(a_hor^i, -1, b_hor^i)
% 输出: 最佳消隐点 V_hor = [u_hor, v_hor]^T
1 初始化 V_hor = [u_hor, v_hor]^T, 即设置初始估计值: V_hor^0 = [100, 100]^T;
2 for i = 1:m
3     load l = l_hor^i(a_hor^i, -1, b_hor^i);
4     建立最佳的消隐点目标函数模型: f = |a_hor^i u_hor - v_hor + b_hor^i| / sqrt(a_hor^i^2 + (-1)^2);
5     应用 L-M 算法寻优: V_hor(u_hor, v_hor) = lsqnonlin(@f, V_hor^0, [], [], L-M 算法, l);
% lsqnonlin 是 Matlab 中的迭代函数
6 end
% 其余三方向上的最佳消隐点位置求解原理同上。
    
```

## 4 摄像机标定

### 4.1 内部参数的消隐点线性法标定

如图 3 所示, 依据文献[19]中正交消隐点的定义及性质, 显然有  $V_{\text{hor}} \perp V_{\text{ver}}, V_{\text{mad}} \perp V_{\text{vid}}$  成立, 则建立内部参数的几何约束方程组

$$\begin{cases} \hat{V}_{\text{hor}}^T \omega \hat{V}_{\text{ver}} = 0 \\ \hat{V}_{\text{mad}}^T \omega \hat{V}_{\text{vid}} = 0 \end{cases}, \quad \{\hat{V}_{x'} = [u_{x'}, v_{x'}, 1]^T, x' = \text{hor, ver, mad, vid}\}. \quad (5)$$

式中

$$\omega = \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/f_x^2 & 0 & -u_0/f_x^2 \\ 0 & 1/f_y^2 & -v_0/f_y^2 \\ -u_0/f_x^2 & -v_0/f_y^2 & u_0^2/f_x^2 + v_0^2/f_y^2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 & W_{13} \\ 0 & W_{22} & W_{23} \\ W_{13} & W_{23} & W_{33} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

由(5)、(6)式进一步计算, 可得

$$\begin{bmatrix} u_{\text{hor}} u_{\text{ver}} & u_{\text{ver}} + u_{\text{hor}} & v_{\text{hor}} v_{\text{ver}} & v_{\text{ver}} + v_{\text{hor}} & 1 \\ u_{\text{mad}} u_{\text{vid}} & u_{\text{vid}} + u_{\text{mad}} & v_{\text{mad}} v_{\text{vid}} & v_{\text{vid}} + v_{\text{mad}} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

式中  $\mathbf{W} = [W_{11} \ W_{13} \ W_{22} \ W_{23} \ W_{33}]^T$ 。

对于拍摄的  $N(N \geq 3)$  幅图像, (7)式扩展成超定系统的非线性方程组:

$$\begin{bmatrix} {}^1u_{\text{hor}} & {}^1u_{\text{ver}} & {}^1u_{\text{ver}} + {}^1u_{\text{hor}} & {}^1v_{\text{hor}} & {}^1v_{\text{ver}} & {}^1v_{\text{ver}} + {}^1v_{\text{hor}} & 1 \\ {}^1u_{\text{mad}} & {}^1u_{\text{vid}} & {}^1u_{\text{vid}} + {}^1u_{\text{mad}} & {}^1v_{\text{mad}} & {}^1v_{\text{vid}} & {}^1v_{\text{vid}} + {}^1v_{\text{mad}} & 1 \\ {}^2u_{\text{hor}} & {}^2u_{\text{ver}} & {}^2u_{\text{ver}} + {}^2u_{\text{hor}} & {}^2v_{\text{hor}} & {}^2v_{\text{ver}} & {}^2v_{\text{ver}} + {}^2v_{\text{hor}} & 1 \\ {}^2u_{\text{mad}} & {}^2u_{\text{vid}} & {}^2u_{\text{vid}} + {}^2u_{\text{mad}} & {}^2v_{\text{mad}} & {}^2v_{\text{vid}} & {}^2v_{\text{vid}} + {}^2v_{\text{mad}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^Nu_{\text{hor}} & {}^Nu_{\text{ver}} & {}^Nu_{\text{ver}} + {}^Nu_{\text{hor}} & {}^Nv_{\text{hor}} & {}^Nv_{\text{ver}} & {}^Nv_{\text{ver}} + {}^Nv_{\text{hor}} & 1 \\ {}^Nu_{\text{mad}} & {}^Nu_{\text{vid}} & {}^Nu_{\text{vid}} + {}^Nu_{\text{mad}} & {}^Nv_{\text{mad}} & {}^Nv_{\text{vid}} & {}^Nv_{\text{vid}} + {}^Nv_{\text{mad}} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

进一步,有  $\hat{\mathbf{V}}_p \mathbf{W} = 0$ , 应用最小二乘原理, 对该式两边同时左乘  $\hat{\mathbf{V}}_p^T$ , 变成

$$\hat{\mathbf{V}}_p^T \hat{\mathbf{V}}_p \mathbf{W} = 0 \Rightarrow \mathbf{V}_p \mathbf{W} = 0. \quad (9)$$

对于齐次线性方程组(9)的系数矩阵  $\mathbf{V}_p$  进行奇异值(SVD)分解, 那么最小特征值对应的特征向量就是(9)式的非零解, 即  $\mathbf{W} = [\mathbf{W}_{11} \ \mathbf{W}_{13} \ \mathbf{W}_{22} \ \mathbf{W}_{23} \ \mathbf{W}_{33}]^T$  求解。

接下来由(6)式, 采用类似于 Zhang 的方法<sup>[20]</sup>可以得到摄像机的内部参数分别为

$$v_0 = -\frac{\mathbf{W}_{23}}{\mathbf{W}_{22}}, \quad \delta = \mathbf{W}_{33} - \frac{\mathbf{W}_{13}^2 - v_0 \mathbf{W}_{11} \mathbf{W}_{23}}{\mathbf{W}_{11}}, \quad f_x = \sqrt{\frac{\delta}{\mathbf{W}_{11}}}, \quad f_y = \sqrt{\frac{\delta}{\mathbf{W}_{22}}}, \quad u_0 = -\frac{\mathbf{W}_{13} f_x^2}{\delta}. \quad (10)$$

#### 4.2 外部参数的新型改进 Tsai 两步法线性标定

本节对 Tsai 标定算法<sup>[21]</sup>做了新型的改进: 1) 将 4.1 节中的计算结果  $f_x, f_y, u_0, v_0$  作为初始值, 而 Tsai 法中的图像主点  $(u_0, v_0)$  是人为取其图像的中心点; 2) 将 Tsai 法中先求解  $t_y$  改进成先求解  $t_z$ , 这样根据  $t_z$  在摄像机坐标系  $Z_c$  轴的正方向上, 直接可以取正解, 省去了判定符号这一步骤; 3) 已知  $t_z$  之后, 可以直接求解出旋转矩阵的前两列  $r_1, r_2, r_4, r_5, r_7, r_8$  和平移向量的  $t_x, t_y$  等 8 个未知量, 且不用判定各量的符号; 4) 直接对旋转矩阵的前两列进行叉乘, 便可求解出第三列  $r_3, r_6, r_9$ , 相比 Tsai 法和文献<sup>[22]</sup>的方法, 也不用判定各量的符号。以 4.1 节中的结果作为初始值, 更为客观合理, 在算法步骤上更是大大提高了效率与精度。具体求解如下: 将世界坐标系  $X_w Y_w Z_w$  定于棋盘格模板上, 让  $X_w O_w Y_w$  平面与模板平面重合,  $Z_w$  轴垂直模板平面, 则角点沿  $Z_w$  轴方向的坐标为  $Z_w = 0$ 。

(1) 式经计算可写成方程组的形式:

$$u = f_x \frac{r_1 X_w + r_2 Y_w + t_x}{r_7 X_w + r_8 Y_w + t_z} + u_0, \quad v = f_y \frac{r_4 X_w + r_5 Y_w + t_y}{r_7 X_w + r_8 Y_w + t_z} + v_0. \quad (11)$$

变形后, 可得线性方程组为

$$\begin{bmatrix} f_x X_w & f_x Y_w & f_x & 0 & 0 & 0 & -U_x X_w & -U_x Y_w \\ 0 & 0 & 0 & f_y X_w & f_y Y_w & f_y & -V_x X_w & -V_x Y_w \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} U_x \\ V_x \end{bmatrix}. \quad (12)$$

式中向量  $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6 \ b_7 \ b_8]^T$ ,  $U_x = u - u_0$ ,  $V_x = v - v_0$ , 而  $\mathbf{b}$  中对应的各量分别为  $b_1 = r_1/t_z, b_2 = r_2/t_z, b_3 = t_x/t_z, b_4 = r_4/t_z, b_5 = r_5/t_z, b_6 = t_y/t_z, b_7 = r_7/t_z, b_8 = r_8/t_z$ 。

同样, 对于一幅图像上的  $m$  行  $n$  列角点, 即  $m \times n$  个角点, (12) 式扩展成超定系统的线性方程组:

$$\begin{bmatrix} f_x {}^1X_w & f_x {}^1Y_w & f_x & 0 & 0 & 0 & -{}^1U_x {}^1X_w & -{}^1U_x {}^1Y_w \\ 0 & 0 & 0 & f_y {}^1X_w & f_y {}^1Y_w & f_y & -{}^1V_x {}^1X_w & -{}^1V_x {}^1Y_w \\ f_x {}^2X_w & f_x {}^2Y_w & f_x & 0 & 0 & 0 & -{}^2U_x {}^2X_w & -{}^2U_x {}^2Y_w \\ 0 & 0 & 0 & f_y {}^2X_w & f_y {}^2Y_w & f_y & -{}^2V_x {}^2X_w & -{}^2V_x {}^2Y_w \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_x {}^mX_w & f_x {}^mY_w & f_x & 0 & 0 & 0 & -{}^mU_x {}^mX_w & -{}^mU_x {}^mY_w \\ 0 & 0 & 0 & f_y {}^mX_w & f_y {}^mY_w & f_y & -{}^mV_x {}^mX_w & -{}^mV_x {}^mY_w \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} {}^1U_x \\ {}^1V_x \\ {}^2U_x \\ {}^2V_x \\ \vdots \\ {}^mU_x \\ {}^mV_x \end{bmatrix}, \quad (13)$$

简写成

$$\mathbf{Fb} = \mathbf{U}. \quad (14)$$

将 4.1 节中求解的内部参数作为初始值代入(14)式, 依然采用最小二乘法求解, 即通过  $\mathbf{b} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{U}$  得到各个分量。一旦每一分量已知, 根据刚体变换矩阵的性质, 有  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵, 即

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 & r_1 r_4 + r_2 r_5 + r_3 r_6 & r_1 r_7 + r_2 r_8 + r_3 r_9 \\ r_1 r_4 + r_2 r_5 + r_3 r_6 & r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 & r_4 r_7 + r_5 r_8 + r_6 r_9 \\ r_1 r_7 + r_2 r_8 + r_3 r_9 & r_4 r_7 + r_5 r_8 + r_6 r_9 & r_7^2 + r_8^2 + r_9^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

于是有

$$\begin{cases} r_1 r_4 + r_2 r_5 + (\pm \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2})(\pm \sqrt{1 - r_4^2 - r_5^2}) = 0 \\ r_4 r_7 + r_5 r_8 + (\pm \sqrt{1 - r_4^2 - r_5^2})(\pm \sqrt{1 - r_7^2 - r_8^2}) = 0. \\ r_1 r_7 + r_2 r_8 + (\pm \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2})(\pm \sqrt{1 - r_7^2 - r_8^2}) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

引入向量  $\mathbf{b}$  中的各分量,化简整理得

$$\begin{cases} S_{e_1} t_{z_1}^4 - S_{r_1} t_{z_1}^2 + 1 = 0 \\ S_{e_2} t_{z_2}^4 - S_{r_2} t_{z_2}^2 + 1 = 0, \\ S_{e_3} t_{z_3}^4 - S_{r_3} t_{z_3}^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

式中

$$\begin{aligned} S_{r_1} &= b_1^2 + b_2^2 + b_4^2 + b_5^2, & S_{e_1} &= (b_1 b_5 - b_2 b_4)^2, \\ S_{r_2} &= b_4^2 + b_5^2 + b_7^2 + b_8^2, & S_{e_2} &= (b_4 b_8 - b_5 b_7)^2, \\ S_{r_3} &= b_1^2 + b_2^2 + b_7^2 + b_8^2, & S_{e_3} &= (b_1 b_8 - b_2 b_7)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

采用求根公式得到

$$t_z^2 = (S_r \pm \sqrt{S_r^2 - 4S_e}) / (2S_e), \quad (19)$$

结合文献[21]中判定  $t_z^2$  的取值问题,最终得

$$t_z^2 = (S_r - \sqrt{S_r^2 - 4S_e}) / (2S_e), \quad (20)$$

于是分别计算得到上三式中  $t_{z_1}^2, t_{z_2}^2, t_{z_3}^2$ 。由方根运算的二值性,需要判定  $t_z$  的正负号,然而  $t_z$  在摄像机坐标系的  $Z_c$  轴正方向上,所以在这里无需判定其正负号问题,直接取其正值,最终采用求平均值减小误差的原理,得到

$$t_z = (t_{z_1} + t_{z_2} + t_{z_3}) / 3. \quad (21)$$

这样,对应的  $r_1, r_2, r_4, r_5, r_7, r_8, t_x, t_y$  也就得解。至于旋转矩阵中的第三列  $r_3, r_6, r_9$ , 为了避免引入判断其正负号的麻烦,直接采用旋转矩阵的前两列叉乘,即

$$[r_3 \ r_6 \ r_9]^T = [r_1 \ r_4 \ r_7]^T \times [r_2 \ r_5 \ r_8]^T. \quad (22)$$

至此,摄像机的内外部参数求解结束,但是这个结果还不是最佳的,下面引入畸变系数,对上述参数值进行优化处理,以此达到一个最优的结果。

### 4.3 实际图像平面坐标点的2D全局优化

根据摄像机的模型,引入畸变系数  $k_1, k_2$ 。如图4所示,按照①、②、③步骤可得到物体空间特征点  $S_w$  从世界坐标系  $X_w Y_w Z_w$  投影到物理图像平面坐标系  $UV$  的畸变2D点实际图像平面坐标  $S^* = [U^*, V^*]^T$ ,同时按照①'得到该特征点从像素图像平面坐标系  $uv$  到物理图像平面坐标系  $UV$  的畸变2D点实际图像坐标  $S'^* = [U'^*, V'^*]^T$ ,这二者之间存在着一定的图像残差<sup>[23-24]</sup>。在这种情况下,应用非线性优化使这种残差达到最小,其残差当量最小化寻优函数为

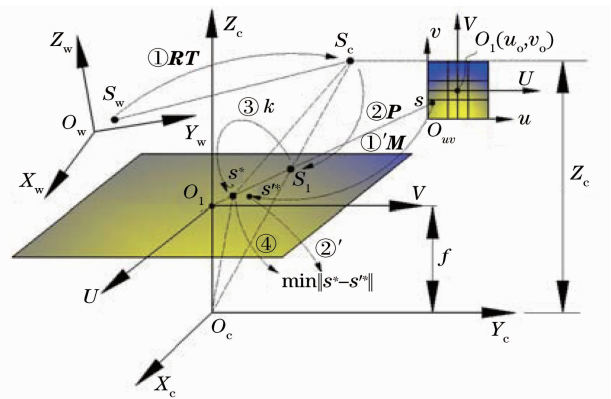


图4 2D全局优化步骤

Fig. 4 Steps of 2D global optimization



$$F_{2D} = \min \left\| S^* \left( \underbrace{[\mathbf{R}, \mathbf{T}]_{\textcircled{1}}}_{\textcircled{1}}, \underbrace{\mathbf{P}, k_1, k_2}_{\textcircled{2}, \textcircled{3}} \right) - S'^* \left( \underbrace{\mathbf{M}}_{\textcircled{1}'} \right) \right\| =$$

$$\min \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (U_{ij}^* - U'_{ij})^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (V_{ij}^* - V'_{ij})^2}{mm}}$$

(23)

表 1 摄像机内部参数比较

Table 1 Comparison of camera intrinsic parameters

	$f_x/\text{pixel}$	$f_y/\text{pixel}$	$u_0/\text{pixel}$	$v_0/\text{pixel}$	$k_1/\text{mm}^{-2}$	$k_2/\text{mm}^{-2}$
OpenCV	656.39200	657.86400	302.92200	239.96100	-0.25826	0.13821
Matlab	657.00166	657.57021	302.42622	240.24340	-0.25499	0.12748
Proposed	662.23865	665.29397	326.89683	257.36306	0.01390	-0.00552

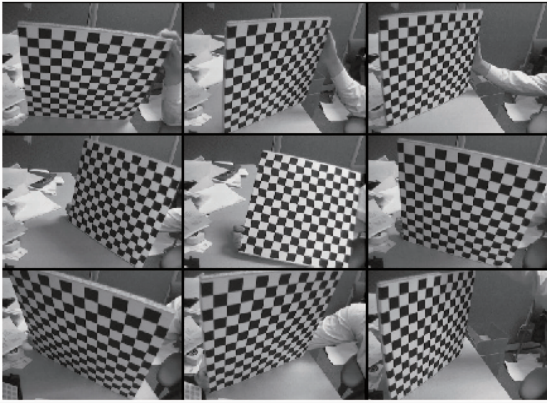


图 5 Bouguets 的 9 幅图像

Fig. 5 Nine images of Bouguet used here

又选取 Zhang 的 5 幅图像 (640 pixel×480 pixel), 格子间距 170 mm×170 mm, 传感器尺寸为 4.8 mm×

## 5 实验结果

选用 Bouguet 的 9 幅图像 (640 pixel×480 pixel), 格子间距 30 mm×30 mm, 如图 5 所示。由于所用相机以及相应像素尺寸等参数未知, 所以应用 OpenCV 方法、Matlab 方法、本文的方法进行标定, 其内部参数结果见表 1。

3.6 mm, 像素尺寸为 7.5 μm×7.5 μm, 镜头焦距为  $f=6$  mm。如图 6 所示。

采用不同方法, 内部参数标定结果如表 2 所示, 其中焦距  $f$  取  $x$  轴和  $y$  轴方向上的有效焦距的平均值, 即  $f=(f_x d_x + f_y d_y)/2$ 。

为了进一步验证该方法的精确度与可行性, 采用德国映美精生产的面阵 CCD 相机 DMK21BU04. H, 分辨率为 640 pixel×480 pixel, 传感器尺寸为 3.6 mm×2.7 mm, 像素尺寸 5.6 μm×5.6 μm, 镜头焦距为  $f=12$  mm 和西安艾菲特光电技术有限公司制造的高精度棋盘格标定板 AFT-MCT-OV100 (格子间距:  $6 \pm 0.001$  mm) 进行实验。为了与其他标定方法比较, 拍摄了 7 幅棋盘格模板图像, 如图 7 所示。

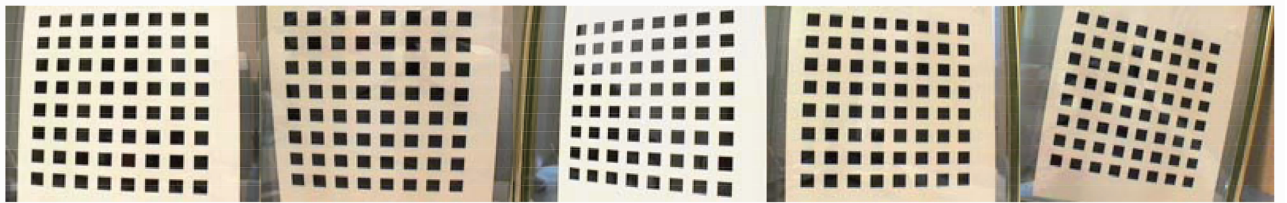


图 6 Zhang 的 5 幅图像

Fig. 6 Zhang's five images



图 7 棋盘格图像

Fig. 7 Checkerboard images

采用 Zhang, Tsai, OpenCV, Matlab 以及本文的方法标定, 内部参数与畸变系数见表 3。

利用标定出的摄像机参数, 计算角点从世界坐标系  $X_w Y_w Z_w$  到像素图像平面坐标系  $uv$  的 2D 点像素坐

标  $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{u}, \tilde{v}]^T$ , 然后用 Sun 的  $E_d^{[14]}$  (重投影像素误差) 和葛动元的  $\delta_{uv}^{[25]}$  (图像残差) 方法对其结果评估。每幅图像优化前后的摄像机参数和评价结果见表 4, 其中旋转矩阵经过罗德里格斯法则变换, 用其对应的旋转向量表示。

表 2 摄像机内部参数比较

Table 2 Comparison of camera intrinsic parameters

	$f / \text{mm}$	$f_x / \text{pixel}$	$f_y / \text{pixel}$	$u_0 / \text{pixel}$	$v_0 / \text{pixel}$	$k_1 / \text{mm}^{-2}$	$k_2 / \text{mm}^{-2}$	Time / s
Matlab	6.2968	839.57597	839.89213	303.66632	209.00885	-0.2066978	0.3207820	—
Zhang's	6.2437	832.49969	832.52953	303.95890	206.58553	-0.2286013	0.1903550	0.547666
Tsai's	5.5635	—	—	320.00000	240.00000	0.0065626	—	3.669155
Proposed	6.2131	828.41129	828.01389	304.46428	222.32924	0.0035854	-0.0011940	0.929537

表 3 标定结果

Table 3 Calibration results

	$f / \text{mm}$	$f_x / \text{pixel}$	$f_y / \text{pixel}$	$u_0 / \text{pixel}$	$v_0 / \text{pixel}$	$k_1 / \text{mm}^{-2}$	$k_2 / \text{mm}^{-2}$	Time / s
OpenCV	12.1740	2174.45300	2173.41700	350.01300	175.58100	-0.07316400	0.00208800	—
Matlab	12.1390	2168.13806	2167.21766	339.79140	180.08225	-0.07558764	-0.03442972	—
Zhang's	12.1548	2171.74357	2169.25643	340.10386	183.29413	-0.43951284	0.06491250	10.844398
Tsai's	12.1429	—	—	320.00000	240.00000	0.00038634	—	14.457258
Proposed	12.1224	2165.89221	2163.53731	343.65957	181.36112	0.00179004	-0.00084267	1.7911260

表 4 优化前后的摄像机参数

Table 4 Parameters of camera before and after optimization

	$f / \text{mm}$	$f_x / \text{pixel}$	$f_y / \text{pixel}$	$u_0 / \text{pixel}$	$v_0 / \text{pixel}$	$k_1 / \text{mm}^{-2}$	$k_2 / \text{mm}^{-2}$			
Before optimization	12.1224	2165.89223	2163.53729	343.65935	181.36079	—	—			
	R-vector				T / mm					
	Image1	[-1.8377	-1.9138	1.2563]	[-4.6145	-5.4353	477.5372]	T		
	Image2	[-1.6929	-1.6986	1.3870]	[1.0133	-4.0364	479.6290]	T		
	Image3	[1.6152	1.5929	0.0813]	[-48.6377	-10.4835	447.4711]	T		
	Image4	[1.7126	1.4562	0.1251]	[-64.4677	-6.5078	437.3429]	T		
	Image5	[-1.6469	-1.8817	1.3571]	[11.8542	-6.1423	475.7068]	T		
	Image6	[-1.5779	-1.7107	1.4407]	[12.6334	-4.7520	478.0434]	T		
Image7	[1.3893	1.3992	0.3245]	[-48.5277	-12.7240	440.2842]	T			
After optimization	$f / \text{mm}$	$f_x / \text{pixel}$	$f_y / \text{pixel}$	$u_0 / \text{pixel}$	$v_0 / \text{pixel}$	$k_1 / \text{mm}^{-2}$	$k_2 / \text{mm}^{-2}$			
	12.1224	2165.89221	2163.53731	343.65957	181.36112	0.00179004	-0.00084267			
	R-vector				T / mm				$E_d$	$\delta_{uv}$
	Image1	[-1.8372	-1.9127	1.2608]	[-4.6133	-5.4361	477.5369]	0.0033	0.0384	
	Image2	[-1.6939	-1.6981	1.3915]	[1.0156	-4.0375	479.6289]	0.0036	0.0412	
	Image3	[1.6119	1.5899	0.0802]	[-48.6673	-10.4954	447.4675]	0.0038	0.0431	
	Image4	[1.7069	1.4506	0.1330]	[-64.5932	-6.5340	437.3239]	0.0040	0.0456	
	Image5	[-1.6454	-1.8802	1.3581]	[11.8545	-6.1420	475.7068]	0.0059	0.0674	
Image6	[-1.5776	-1.7101	1.4418]	[12.6328	-4.7535	478.0427]	0.0048	0.0547		
Image7	[1.3885	1.3990	0.3226]	[-48.5406	-12.7263	440.2820]	0.0049	0.0568		
Pixel error							0.0043	0.0496		

## 6 结 论

提出了一种新型正交消隐点的摄像机标定方法。该方法对实验环境要求低, 且不需要任何精密的机械结构来保证标定精度, 仅需要常用的平面棋盘格模板, 消隐点的模型成功避免了其退化情形。拍摄  $N(N \geq 3)$  幅图像, 选取典型的 Harris 算法提

取角点, 不需要对图像作额外的预处理, 利用纹理特征就可达到求解最佳消隐点的目的, 确保了内部参数的精度; 新型改进的 Tsai 两步法大大提高了求解外部参数的效率和精度; 全局优化再次保证了标定精度。实验结果表明, 该方法确实提高了标定精度, 具有较高的可靠性和切实的实用价值, 为后续的测



量降低了积累误差,可广泛应用于计算机视觉研究、工业三维测量与重构、道路测绘等多个领域的摄像机标定。不足的是,虽然3幅图像可以满足标定条件,但是标定精度的偶然误差很大,建议拍摄多幅图像,另外,畸变系数的求解有待改进。

## 参 考 文 献

- Gao D P, Yin F L. Computing a complete camera lens distortion model by planar homography[J]. *Opt & Laser Technol*, 2013, 49: 95-107.
- Caprile B, Torre V. Using vanishing points for camera calibration[J]. *Int J Computer Vision*, 1990, 4(2): 127-139.
- Beardsley P, Murray D. Camera calibration using vanishing points[J]. *Proceedings of the British Machine Vision Conference*, 1992. 416-425.
- Huo Ju, Yang Wei, Yang Ming. A self-calibration technique based on the geometry property of the vanish point[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, 30(2): 465-472.  
霍 炬, 杨 卫, 杨 明. 基于消隐点几何特性的摄像机自标定方法[J]. *光学学报*, 2010, 30(2): 465-472.
- Ricolfe-Viala C, Sanchez-Salmeron A J, Martinez-Berti E. Accurate calibration with highly distorted images[J]. *Appl Opt*, 2012, 51(1): 89-101.
- Bouguet J Y, Perona P. Closed-form camera calibration in dual-space geometry[C]. *European Conference on Computer Vision*, 1998.
- Wu Fuchao, Wang Guanghui, Hu Zhanyi. A linear approach for determining intrinsic parameters and pose of cameras from rectangles[J]. *Journal of Software*, 2003, 14(3): 703-712.  
吴福朝, 王光辉, 胡占义. 由矩形确定摄像机内参数与位置的线性方法[J]. *软件学报*, 2003, 14(3): 703-712.
- He B W, Li Y F. A novel method for camera calibration using vanishing points[C]. *14th International Conference on M2VIP*, 2007. 44-47.
- Cipolla R, Drummond T, Robertson D. Camera calibration from vanishing points in images of architectural scenes[C]. *Proceedings of the 10th British Machine Vision Conference*, 1999, 2: 382-391.
- Bouguet J Y, Perona P. Camera calibration from points and lines in dual-space geometry[C]. *European Conference on Computer Vision*, 1998. 2-6.
- Meng Xiaoqiao, Hu Zhanyi. A new easy camera calibration technique based on circular points[J]. *Journal of Software*, 2002, 13(5): 957-965.  
孟晓桥, 胡占义. 一种新的基于圆环点的摄像机自标定方法[J]. *软件学报*, 2002, 13(5): 957-965.
- Chen Aihua, Gao Chenghui, He Bingwei. Camera calibration method based on orthogonal vanishing point pair[J]. *Chinese J Scientific Instrument*, 2012, 33(1): 161-166.  
陈爱华, 高诚辉, 何炳蔚. 基于正交消失点对的摄像机标定方法[J]. *仪器仪表学报*, 2012, 33(1): 161-166.
- Grammatikopoulos L, Karras G, Petsa E. Camera calibration combining images with two vanishing points[J]. *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing & Spatial Information Sciences*, 2004, 35(5): 99-104.
- Sun W, Cooperstock J R. An empirical evaluation of factors influencing camera calibration accuracy using three publicly available techniques[J]. *Machine Vision and Applications*, 2006, 17(1): 51-67.
- Yu Qian, Zhang Xuping, Zhang Yixin, *et al.*. Novel method for structured light plane calibration in three-dimensional vision measurement[J]. *Chinese J Lasers*, 2012, 39(s1): s108006.  
余 乾, 张旭苹, 张益昕, 等. 新型三维视觉测量结构光平面标定方法[J]. *中国激光*, 2012, 39(s1): s108006.
- Xu Song, Sun Xiuxia, Liu Shuguang, *et al.*. Model reference approaching method of camera distortion calibration[J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(7): 0715001.  
徐 嵩, 孙秀霞, 刘树光, 等. 摄像机畸变标定的模型参考逼近方法[J]. *光学学报*, 2013, 33(7): 0715001.
- Yang Huachao, Zhang Shubi, Liu Chao. Research into camera calibration methods based on the vanishing points theory and planar control fields[J]. *J Image and Graphics*, 2010, 15(8): 1168-1174.  
杨化超, 张书毕, 刘 超. 基于灭点理论和平面控制场的相机标定方法研究[J]. *中国图象图形学报*, 2010, 15(8): 1168-1174.
- Linda G S, George C S. *Computer Vision* [M]. America: Prentice Hall, 2001. 232-233.
- Wu Fuchao. *Mathematical Methods in Computer Vision* [M]. Beijing: Science Press, 2008. 79-82.  
吴福朝. *计算机视觉中的数学方法* [M]. 北京: 科学出版社, 2008. 79-82.
- Zhang Z Y. A flexible new technique for camera calibration[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, 22(11): 1330-1334.
- Tsai R Y. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses[J]. *IEEE J Robotics and Automation*, 1987, 3(4): 323-344.
- Xu Jie. Analyzing and improving the Tsai camera calibration method in machine vision[J]. *Computer Engineering and Science*, 2010, 32(4): 45-58.  
徐 杰. 机器视觉中摄像机标定 Tsai 两步法的分析与改进[J]. *计算机工程与科学*, 2010, 32(4): 45-58.
- Chatterjee C, Roychowdhury V P, Chong E K P. A nonlinear Gauss-Seidel algorithm for non-coplanar and coplanar camera calibration with convergence analysis[J]. *Computer Vision and Image Understanding*, 1997, 67(1): 58-80.
- Xu Yong, Guo Pengyu, Long Gucan, *et al.*. Research on fully automatic camera calibration method[J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(6): 0612007.  
许 勇, 郭鹏宇, 龙谷灿, 等. 摄像机全自动标定方法研究[J]. *光学学报*, 2013, 33(6): 0612007.
- Ge Dongyuan, Yao Xifan. Precision of camera calibration based on Rayleigh principle[J]. *Acta Metrologica Sinica*, 2009, 30(1): 11-15.  
葛动元, 姚锡凡. 基于瑞利原理摄像机标定的精度研究[J]. *计量学报*, 2009, 30(1): 11-15.