

# 基于 #1 理论方差的光学陀螺长期随机误差分析

程旭维 汤霞清 黄湘远

(装甲兵工程学院控制系火控室, 北京 100072)

**摘要** 为解决 Allan 方差计算的平均时间只能达到数据持续时间长度的一半, 以及长相关时间下置信度较低的问题, 根据光纤陀螺随机误差信号的频率特性, 提出了采用 #1 理论方差对光学陀螺的随机误差特性进行分析的方法。分析比较了 Allan 方差和 #1 理论方差的性质和特点, 并对比了两者分析白噪声特性以及辨识光纤陀螺实测数据中随机噪声的类型和噪声水平的结果。结果表明, 当相关时间较长时, #1 理论方差值和实际的幂律谱噪声的行为特征不仅一致; 且能够比 Allan 方差更有效提高方差估计值的置信度, 估计精度优于 Allan 方差方法。

**关键词** 光纤光学; Allan 方差; #1 理论方差; 陀螺; 置信度

**中图分类号** V249.32+5 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201441.1005003

## Investigation on Random Error Properties of Optic Gyroscope Based on Theoretical Variance #1

Cheng Xuwei Tang Xiaqing Huang Xiangyuan

(Department of Control Engineering, Academy of Armored Force Engineering, Beijing 100072, China)

**Abstract** In order to solve the problems that the averaging time of Allan variance can only reach half of total data length, and confidence at long averaging time is lower, according to the random errors properties of the optic gyroscope at time and frequency domains, a new method for analyzing the random error properties of the optic gyroscope based on theoretical variance #1 is proposed. By comparing the performance of the Allan and theoretical variance #1, identifying the noise types and noise levels, applying Allan variance and theoretical variance #1 methods, it is shown that the values of the theoretical variance #1 are consistent with the power law noises in estimating long-term  $\tau$ -values, which improves the confidence efficiently and has higher evaluation precision than the conventional Allan method.

**Key words** fiber optics; Allan variance; theoretical variance #1; gyroscope; confidence

**OCIS codes** 060.2370; 060.2800; 140.3370

## 1 引 言

随着激光陀螺(RLG)和光纤陀螺(FOG)技术的成熟与发展,近年来以光学陀螺为核心的惯性导航以及制导系统以其优越的性能<sup>[1]</sup>得到了广泛应用。陀螺仪的精度决定着惯性系统的精度,为减小光学陀螺仪的误差并提高系统精度,需要对陀螺仪误差进行精确估计与建模,并通过适当的手段进行温度误差补偿以及动静态误差补偿<sup>[2-3]</sup>。在光学陀

螺的应用中,其误差测试与建模技术是目前研究和应用的关键技术之一。

Allan 方差分析是在时域上对频率稳定性进行分析的一种通用方法,被 IEEE 标准化组织推荐用来分析光学陀螺的随机特性<sup>[4]</sup>。然而,利用 Allan 方差法分析光纤陀螺噪声特性时,其不足之处表现在对高频段噪声及低频段随速率斜坡与振动角加速度特性确定的不确定性上<sup>[5]</sup>。另一方面,Allan 方差的估计是

收稿日期: 2014-01-15; 收到修改稿日期: 2014-03-10

基金项目: 军队科研计划

作者简介: 程旭维(1989—),男,博士研究生,主要从事光纤陀螺以及姿态测量系统误差补偿等方面的研究。

E-mail: chengxuwei0872@126.com

导师简介: 汤霞清(1965—),男,博士,教授,主要从事惯性技术、战车组合导航方面的研究。

E-mail: tangxiaqing\_001@126.com

基于有限长度的数据,估计的可信度依赖于数据的独立组数。对于给定的随机序列,划分的组数越少,Allan 方差的估计误差就越大<sup>[6]</sup>;且 Allan 方差计算的平均时间只能够达到数据持续时间长度的一半,在长相关时间下,其估计置信度较差。同时,在大的平均因子的情况下,数据对称使得 Allan 方差有可能出现崩溃的情况<sup>[7]</sup>。另外,类似于无窗的离散傅里叶变换(DFT),用于 Allan 方差的转移函数的泄露现象<sup>[8-9]</sup>也是 Allan 方差法的潜在问题。

针对传统的 Allan 方差分析方法的不足,本文提出了以一种较新的统计工具——#1 理论方差法<sup>[10-11]</sup>来研究光学陀螺的随机误差特性。#1 理论方差在保持 Allan 方差特性的基础上增加了等效自由度,因而提高了方差估计的置信度。同时,计算的数据长度比 Allan 方差法加长了 50%。在利用两种方法分析白噪声特性的基础上,以光纤陀螺为例,分别利用两种方法分析实测的陀螺输出数据,辨识出光纤陀螺的随机噪声类型和噪声水平。并且分析了 #1 理论方差在分析光学陀螺噪声时的优势,这些特性可以在实际应用中提高陀螺性能和设计动静态误差补偿。

## 2 Allan 方差的基本原理

Allan 分析方法建立在时域上对被分析信号进行频域稳定性分析,不仅能够反映噪声的随机特性,而且能够识别出数据中存在的特定噪声的来源。因此,Allan 方差法可以非常容易地辨识和表征光学陀螺中各种误差源及各项误差对整个噪声统计特性的贡献。通过利用特定噪声的 Allan 方差与功率谱密度(PSD)之间的定量关系,可以直接从信号时域上的数据段得到各误差源的类型和幅度<sup>[12]</sup>。其基本过程如下。

以一个固定的采样周期  $\tau_0$  采集光纤陀螺输出的角速率  $\omega(i), i = 1, 2, \dots, N$ , 对这  $N$  个初始样本进行二次采样,采样时间  $\tau = M\tau_0, M = 1, 2, \dots, N/2$ ; 数据分组数为  $K = N/M$ , 且为整数; 则每一时间长度  $\tau$  的数组平均值为

$$\omega_j(M) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \omega_{(j-1)M+i}(\tau_0), j = 1, 2, \dots, K. \quad (1)$$

利用新的样本序列  $\omega_j(M)$ , 定义时域上的 Allan 方差为

$$\sigma_A^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle [\omega_{j+1}(M) - \omega_j(M)]^2 \rangle \approx \frac{1}{2(K-1)} \sum_{j=1}^{K-1} \delta_j^2, \quad (2)$$

式中  $\delta_j = \omega_{j+1}(M) - \omega_j(M)$  为相邻数组平均值之差;  $\langle \rangle$  表示总体均值,通过选取不同的数组长度  $\tau$  (即相关时间),可以求得相应的 Allan 方差以及标准差。为减少运算过程中的存储量、提高运算速度,也可采用递推式计算 Allan 方差。

Allan 方差的估计是基于有限长度数据,其估计的可信度完全依赖于数据的独立组数。对于独立组数为  $K$  ( $K-1$  代表 Allan 方差估计的实际自由度)的随机信号,估计的可信度随  $K$  的增加而提高,Allan 方差估计的百分比误差为

$$\eta = \frac{100}{\sqrt{2(K-1)}}. \quad (3)$$

例如,当总数据点数  $N=20000$  时,如果每个子集包含  $M=250$  个点,即  $K=80$ , 则其估计误差为 7.95%。

在频域上,Allan 方差与信号的双边 PSD 之间的关系为

$$\sigma_A^2(\tau) = 4 \int_0^{\infty} S_{\omega}(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df, \quad (4)$$

式中  $\tau$  为样本组相关时间;  $S_{\omega}(f)$  为随机过程的 PSD。可以看到,当通过一个传递函数为  $\frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2}$  的滤波器时,Allan 方差与随机过程的总能量成正比,滤波器的带通取决于相关时间  $\tau$ , 因而通过调节  $\tau$  即可检测不同类型的随机过程。

## 3 #1 理论方差的基本原理

#1 理论方差是一种估计性能提高了的方差分析方法,尽管其在估计若干噪声(如调相闪烁噪声)时是有偏的。类似于 Allan 方差,其定义如下。

对于原始采样周期同样为  $\tau_0$  的时偏序列  $\omega(i)$  进行二次采样,采样时间  $\tau = m\tau_0$ , 其中,  $m$  为偶数,即  $m = 2, \dots, N_x - 1$ ; #1 理论方差定义为

$$\sigma_{\text{Theol}}(m, \tau_0, N_x) = \frac{1}{0.75(N_x - m)(m\tau_0)^2} \sum_{i=1}^{N_x - m} \sum_{\delta=0}^{m/2-1} \frac{1}{(m/2) - \delta} [(x_i - x_{i-\delta+\frac{m}{2}}) + (x_{i+m} - x_{i+\delta+\frac{m}{2}})]. \quad (5)$$

评估频率稳定性的采样时间步幅变为  $\tau_s = 0.75 m\tau_0$ ,  $\tau_s$  与 Allan 方差定义中的相关时间具有相同涵义, 这意味着最后一个相关时间为  $\tau_s = 0.75 (N_x - 1)\tau_0$ , 即平均时间是总采样时间的 3/4, 比 Allan 方差中最长的  $\tau$  值大 50%。当  $m$  较小时, #1 理论方差的优势体现地并不明显; 在测试长相关时间的频率稳定性时, 通常使原始采样间隔尽量小, 这样得到较大的  $m$ , 考虑到等效自由度和置信区间的关系<sup>[13]</sup>, 设定  $10 \leq m \leq N_x - 1$ , 对于给定的  $\tau$ , 原始采样间隔  $\tau_0$  更小能够使得 #1 理论方差分离出更多关于噪声类型信息。特别地当  $\delta = 0$  时, (5) 式退化成为 Allan 方差。

当采样步长  $\tau_s$  在  $T/2 \sim T - \tau_0$  变化时, 采用 #1 理论方差对信号  $y_n$  进行采样的过程可由图 1 所示。其中,  $y_n$  由原始信号定义为  $y_n = (x_n - x_{n-1})/\tau$ 。#1 理论方差目的是计算区间  $T$  上的不同平均时间的频率差分。图 1(a) 为当  $\delta = 0$  时的情况, 此时采样步长  $\tau_s$  等于平均时间, 即  $\tau_1 = T/2$ , 此时等价于经典的 Allan 方差法; (b) 当  $1 < \delta < m/2$  时的情况, 此时采样步幅  $\tau_s > T/2$ ; 采样函数的最后一项如 (c) 所示, 表示  $\tau_{sN} > T - \tau_0$  时的情形。可见在 #1 理论方差中, 单个频率差分后的平均有效  $\tau$  值限定在  $T/2 \leq \tau \leq T - \tau_0$ 。

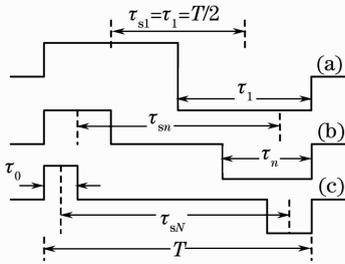


图 1 #1 理论方差变步长的采样过程

Fig. 1 Sampling process at varying stride in theoretical variance #1

工程实际中, #1 理论方差亦可表示为

$$\sigma_{\text{Theor}}(\tau = 0.75 \tau_0) = \frac{4}{3(N_x - k + 1)k^2} \times \sum_{i=k\delta}^{N_x} \sum_{k\delta=0}^{\frac{k}{2}} \frac{1}{\delta} [(x_i - x_{i-\delta}) + (x_{i-k} - x_{i-k+\delta})]^2, \quad (6)$$

式中  $k$  为偶数,  $\delta$  为平均因子。

## 4 光学陀螺的随机误差特性分析

受外界光强变化、热效应、光子的自发散射、采样量化、电路结构、工作环境等因素的影响, 光学陀螺的输出中包含各种噪声, 主要包括量化噪声、角度

随机游走、零偏不稳定性、角速度随机游走、速率斜坡和正弦分量等。类似于 Allan 方差, 使用 #1 理论方差不仅可以定性分析光学陀螺中各噪声类型, 并且可以计算各噪声的噪声水平。在工程实践中, 假设光学陀螺各噪声源是独立统计的, Allan 方差以及 #1 理论方差可以表示成各类型误差的平方和。该假设的基本依据是光学陀螺的各项噪声是互不相关的, 且分布于不同的频段上, 它们的 Allan 方差和 #1 理论方差可以分别表示为  $\tau \sim \sigma^2$  双对数图中的  $-1 \sim +1$  次幂级函数, 如图 2 所示。

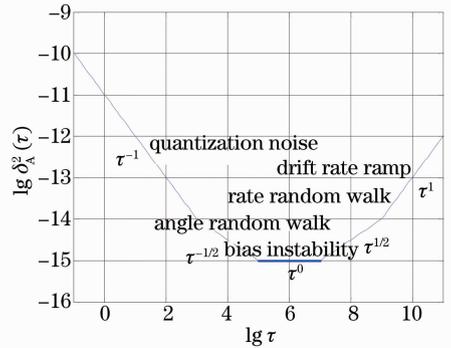


图 2  $\tau \sim \sigma^2$  双对数图

Fig. 2 Log-log plot of  $\tau \sim \sigma^2$

此时, 根据 Allan 方差和功率谱密度函数之间的关系<sup>[14]</sup>, Allan 方差可表示为

$$\sigma_A^2(\tau) = \sigma_N^2(\tau) + \sigma_B^2(\tau) + \sigma_R^2(\tau) + \sigma_{R'}^2(\tau) + \sigma_Q^2(\tau), \quad (7)$$

根据 PSD 中各噪声与相关时间  $\tau$  的关系, 可以得到

$$\sigma_A^2(\tau) = \frac{3Q^2}{\tau^2} + \frac{N^2}{\tau} + (0.6643B)^2 + \frac{K^2\tau}{3} + \frac{R^2\tau^2}{2} = \sum_{n=-2}^{n=2} A_n \tau^n. \quad (8)$$

对 Allan- $\tau$  的曲线进行最小二乘法拟合可得到拟合系数  $A_n$ , 然后结合 (8) 式求得各种噪声系数和各随机误差项大小。对于 #1 理论方差量化噪声、角度随机游走、零偏不稳定性、角速度随机游走、速率斜坡噪声的  $\tau \sim \sigma^2$  双对数图中斜率分别为  $-1$ 、 $-1/2$ 、 $0$ 、 $1/2$ 、 $1$ 。由于 #1 理论方差采用的数据采集方法不同于 Allan 方差法, 使得其相对于 Allan 方差存在偏差, 利用 #1 理论方差的期望值与 Allan 方差的期望值的比率表示。表 1 给出了各种噪声类型所对应的标准差系数, 以及各种类型噪声分别对应的 #1 理论方差和 Allan 方差的偏差。表中 a 方差偏差表示 #1 理论方差相对于 Allan 方差的比率, 标准差偏差表示 #1 理论标准差相对于 Allan

表 1 陀螺主要的随机误差的 Allan 标准差及和 #1 理论方差的偏差

Table 1 Allan standard deviation variance and theoretical variance #1 biases of FOG random errors

Noise pattern	Parameter	Allan standard deviation variance	Variance bias <sup>a</sup>	Standard deviation variance bias
Quantization noise	$\frac{Q}{\mu\text{rad}}$	$\frac{10^6 \cdot 3600\pi \sqrt{3A_{-2}}}{180}$	$0.4 \widehat{Theo1}$	$0.63 \widehat{Theo1} \text{ dev}$
Angle random walk	$\frac{N}{[(^\circ)/\text{h}^{1/2}]}$	$\frac{\sqrt{A_{-1}}}{60}$	$\widehat{Theo1}$	$\widehat{Theo1} \text{ dev}$
Bias instability	$\frac{B}{[(^\circ)/\text{h}]}$	$\frac{\sqrt{A_0}}{0.6643}$	$0.17 \widehat{Theo1}$	$0.31 \widehat{Theo1} \text{ dev}$
Rate random walk	$\frac{K}{[(^\circ)/\text{h}^{3/2}]}$	$60 \sqrt{3A_1}$	$2.24 \widehat{Theo1}$	$1.5 \widehat{Theo1} \text{ dev}$
Drift rate ramp	$\frac{R}{[(^\circ)/\text{h}^2]}$	$3600 \sqrt{2A_2}$	$3.24 \widehat{Theo1}$	$1.8 \widehat{Theo1} \text{ dev}$

标准差的比率。 $\widehat{Theo1}$ 表示 #1 理论方差,  $\widehat{Theo1} \text{ dev}$ 表示 #1 理论标准差。

考虑到表 1 中 #1 理论方差与 Allan 方差之间的偏差,同时假设各噪声源相对独立,得到各噪声类型的总的 #1 理论方差为

$$\sigma_{\text{Theo1}}^{\text{all}} = a_{-2}\tau^{-2} + a_{-1}\tau^{-1} + a_0\tau^0 + a_1\tau^1 + a_2\tau^2 = \frac{1}{0.4}A_{-2}\tau^{-2} + A_{-1}\tau^{-1} + \frac{1}{1.7}A_0\tau^0 + \frac{1}{2.24}A_1\tau^1 + \frac{1}{3.24}A_2\tau^2, \quad (9)$$

式中  $a_n$  为 #1 理论方差的各噪声项方差的拟合系数,而  $A_n$  为 Allan 方差的噪声参数。通过计算光学陀螺输出数据的 #1 理论方差,得到整个相关时间上完整的 #1 理论方差  $\tau \sim \sigma^2$  曲线,由曲线上各段斜率的变化便可以分离出数据中存在的各项随机误差类型,再通过最小二乘算法对 #1 理论方差曲线进行拟合,由拟合系数进而可求得各项随机误差大小。

在进行频率稳定度估计时必须给出此估计值的

置信度(依赖于自由度)。对于非整数值的自由度,通常将其以等效自由度(EDF)的形式给出。相对于 Allan 方差, #1 理论方差估计置信度更高,Howe<sup>[15]</sup>以 10% 的拟合精度给出了 5 种噪声:调频白噪声(WHFM)、调频闪烁噪声(FLFM)、调频随机游走(RWFM)、调相白噪声(WHPM)和调相闪烁噪声(FLPM),它们的等效自由度的计算公式分别为

$$\left\{ \begin{aligned} f_{\text{WHFM}} &= \left( \frac{4.1N_x + 0.8}{\tau_s} - \frac{3.1N_x + 6.5}{N_x} \right) \left( \frac{\tau_s^{3/2}}{\tau_s^{3/2} + 5.2} \right) \\ f_{\text{FLFM}} &= \left( \frac{2N_x^2 - 1.3N_x\tau_s - 3.5\tau_s}{N_x\tau_s} \right) \left( \frac{\tau_s^3}{\tau_s^3 + 2.3} \right) \\ f_{\text{RWFM}} &= \left( \frac{4.4N_x - 2}{2.9\tau_s} \right) \left[ \frac{(4.4N_x - 1)^2 - 8.6\tau_s(4.4N_x - 1) + 11.4\tau_s^2}{(4.4N_x - 3)^2} \right]. \\ f_{\text{WHPM}} &= \left[ \frac{0.86(N_x + 1)(N_x - 4/3\tau_s)}{N_x - \tau_s} \right] \left( \frac{\tau_s}{\tau_s + 1.14} \right) \\ f_{\text{FLPM}} &= \left[ \frac{4.798N_x^2 - 6.374N_x\tau_s + 12.387\tau_s}{(\tau_s + 36.6)^{1/2}(N_x - \tau_s)} \right] \left( \frac{\tau_s}{\tau_s + 0.3} \right) \end{aligned} \right. \quad (10)$$

可以看到, #1 理论方差的等效自由度取决于两个因素:相关时间和采样总时间。传统 Allan 方差估计的自由度很小,因此估计值波动较大;而 #1 理论方差自由度较大,可以给出更高的估计置信度,就能够替代 Allan 方差对光学陀螺进行长时间的性能评

估,同时可以评价随机建模与仿真以及滤波效果,尤其是很好地解决了长期的测试过程中频率稳定的问题。在计算方差置信区间时,采用  $\chi^2$  分布函数,而百分比误差与置信度的关系可以由经验公式<sup>[15]</sup>给出。

$$\eta_{\text{Theor}} = \frac{100}{\sqrt{2(f+6.6)}}, \quad (11)$$

式中  $f \geq 1$ , 由(10)式计算所得; 这意味着给出近似置信度后, (11)式可以给出 90% 置信区间内的

表 2 #1 理论方差下几种噪声等效自由度以及百分比误差

Table 2 Equivalent degree of freedom with theoretical variance #1 of noises and percentage errors

$m$	WHFM		FLFM		RWFM	
	$f(m)$	Percentage error	$f(m)$	Percentage error	$f(m)$	Percentage error
16	240.09	6.37	126.75	8.66	94.29	9.96
32	124.66	8.73	62.75	12.01	45.68	13.836
64	61.94	12.08	30.73	16.37	21.40	18.90
128	29.63	16.61	14.71	21.66	9.30	25.08
256	13.30	22.42	6.70	27.42	3.33	31.73
512	5.10	29.232	2.70	32.79		

## 5 实验结果及讨论

类似于 Allan 方差, #1 理论方差能够很好地给出原子钟的长期频率稳定性。更为一般地, 对于随机过程以及光学陀螺中的各种噪声, #1 理论方差可以通过分析双对数图中对应的曲线斜率检验噪声类型以及辨识噪声参数。下面实验设计将首先利用静态和动态白噪声, 通过与 Allan 方差对比来验证 #1 理论方差的优越性; 然后测试光纤陀螺数据, 通过数据拟合得到陀螺仪随机误差中的各项噪声系数。

1) 仿真验证。对比白噪声的短期和长期的 Allan 方差和 #1 理论方差特性, 高斯白噪声的模型采用文献[16]所述。通过改变与白噪声方差(标准差)相关的参数, 可以得到方差时变的各种噪声, 例如, 随机游走频率噪声通过将白噪声方差随时间线性变化即可得到。结果如图 3~8 所示。

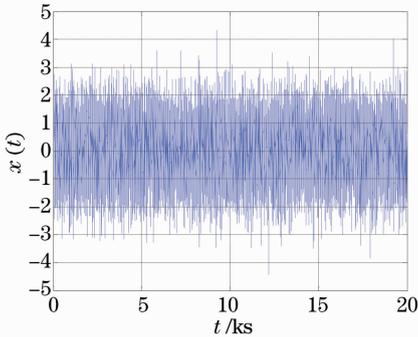


图 3 静态高斯白噪声

Fig. 3 Stationary white Gaussian

可以看到, 在分析纯白噪声和方差时变噪声的长期频率稳定性时, Allan 无法完全表征噪声特性, 尤其在相关时间较大时, Allan 方差具有较大的波动和不稳定性, 此特点在图 4、图 5 以及图 8 中均有

$\eta_{\text{Theor}}(0.75 m\tau_0)$  的不确定度。表 2 给出了几种噪声的 #1 理论方差的等效自由度以及百分比误差, 其中, 数据点数同样选取  $N=20000$  时, 设定  $10 \leq m \leq N_x - 1$ 。

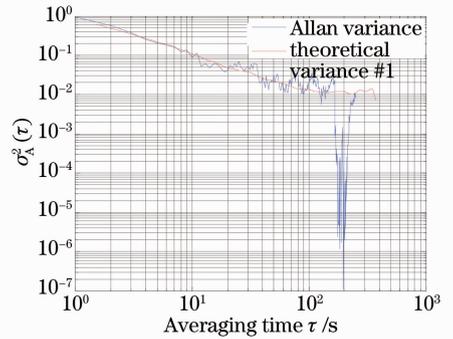


图 4 静态高斯噪声的短期 Allan 方差和 #1 理论方差(双对数)

Fig. 4 Allan variance and theoretical variance #1 of stationary white Gaussian with short term (log-log)

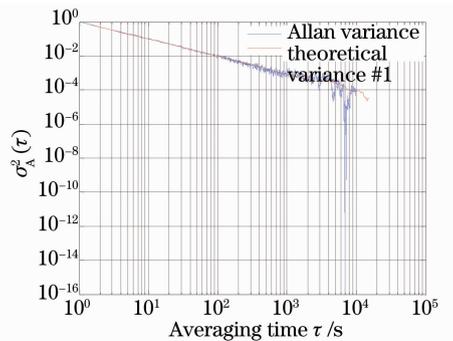


图 5 静态高斯噪声的长期 Allan 方差和 #1 理论方差(双对数)

Fig. 5 Allan variance and theoretical variance #1 of stationary white Gaussian with long term (log-log)

明显体现; 而采用 #1 理论方差无论是在短期(500 个采样点)还是长期(20000 个采样点), 其频率稳定性方面的性能均优越, 尤其是在 Allan 方差在较大的相关时间上无法给出结果的情况下, #1 理论方差依旧能够给出高置信度的结果。在总数据长度为

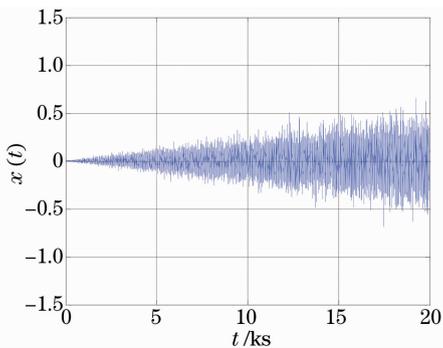


图 6 方差时变噪声

Fig. 6 Noise of the time-varying standard deviation

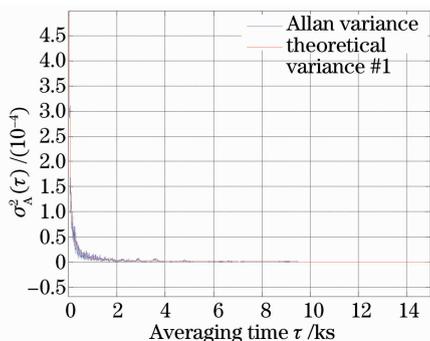


图 7 方差时变噪声的长期 Allan 方差和 #1 理论方差

Fig. 7 Allan variance and theoretical variance #1 of noise with time-varying variance with long term

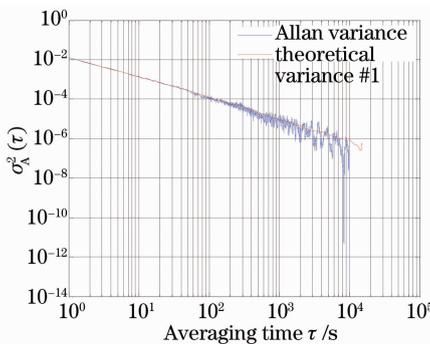


图 8 方差时变噪声的长期 Allan 方差和 #1 理论方差(双对数)

Fig. 8 Allan variance and theoretical variance #1 of noise with time-varying variance with long term(log-log)

20000 的情况下,由于最后一个相关时间为  $\tau_s = 0.75(N_x - 1)\tau_0$ ,即接近总采样时间的  $3/4(15000)$ ,比 Allan 方差中最长的  $\tau(10000)$  值大 50%。所以当采样数据较少时,即短期相关时间内,#1 理论方差和 Allan 方差效果相当;在长相关时间分析上,#1 理论方差的高等效自由度使得结果更精确。

2) 光纤陀螺数据验证。在室温下,将某型号的光纤陀螺固定于转台上,进行 7200 s 的数据采集,采样周期为 1 s(即  $\tau_0 = 1$ ,采样频率为 1 Hz),实际

上,可以加大采样频率(如 50 Hz)以获得更多信息量的数据。首先对采集到的数据进行平滑,然后采用 Allan 方差和 #1 理论方差方法分别对采集数据进行分析,辨识出影响光纤陀螺精度的主要误差类型并估计出相应的误差系数。图 9 为某型号光纤陀螺的实测输出数据曲线,图 10、图 11 分别为光纤陀螺输出数据的 Allan 方差和 #1 理论方差对比图以及两者的双对数图。并对 Allan 方差和 #1 理论方差进行最小二乘拟合,得到各种类型噪声系数如表 3 所示。

从图 10、图 11 中可以看到,在短期相关时间内,#1 理论方差和 Allan 方差之间都保持了良好的线性特性,且 #1 理论方差和 Allan 方差一样具有无偏性;而相关时间较大时,Allan 方差较大波动,估计值变化剧烈,估计误差较大,这是因为当  $\tau = T/2$  时 Allan 方差仅有一个自由度,此时往往会因为数据对称的缘故而使得 Allan 方差处于“崩溃”的境地,而 #1 理论方差通过增加自由度,提高了方差估计的置信度,这就解决了 Allan 方差的不足;且良好的线性度使得 #1 理论方差更容易通过最小二乘拟合得到各噪声项的拟合系数,更精确地刻画了幂律噪声的特征。此时,尽管 #1 理论方差值与 Allan 方差值存在一定偏差,但 #1 理论方差更能简洁有效地描述频率漂移噪声。实际上,该偏差可通过表 1 所给的偏差修正值进行修正。

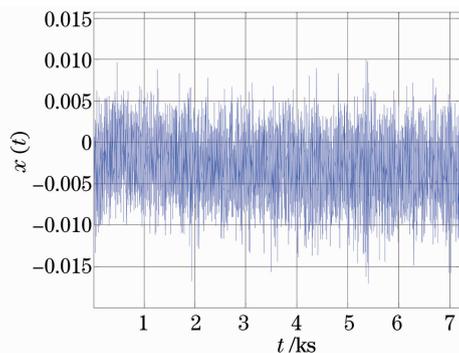


图 9 光纤陀螺原始信号

Fig. 9 Original signal of the FOG

表 3 各种类型噪声系数

Table 3 Each noise coefficients of the FOG

Noise pattern	Parameter
Quantization noise	19.8575
Angle random walk	0.1929
Bias instability	0.5576
Rate random walk	1.1659
Drift rate ramp	1.8399

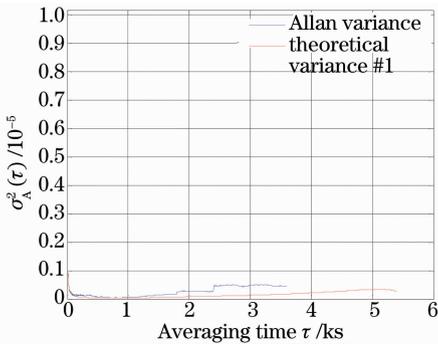


图10 光纤陀螺输出的Allan和#1理论方差

Fig. 10 Allan variance and theoretical variance #1 of FOG's output

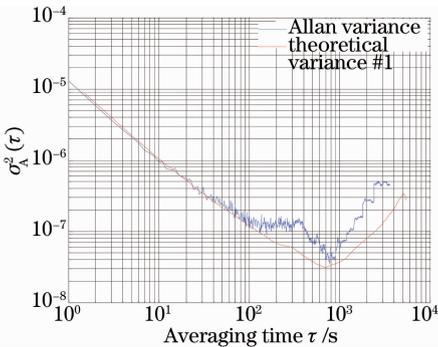


图11 光纤陀螺输出的Allan方差和#1理论方差(双对数图)

Fig. 11 Allan variance and theoretical variance #1 analysis of FOG's output (log-log)

从上述辨识结果可以看出,量化噪声和速率斜坡以及角度随机游走是该型号光纤陀螺的主要误差源,需要采取相应的措施来降低其影响以提高光纤陀螺的性能。从实验结果可以得出: #1理论方差对任意的 $\tau$ 值是有效的,包括3/4的全部数据采样时间,这意味利用该方法可以得到光纤陀螺长期的噪声特性,且比Allan方差有着更高的置信度; #1理论方差在 $\tau \sim \sigma^2$ 双对数图上保持了 $\mu = -\alpha - 1$  ( $\alpha$ 为噪声频率指数)的直线关系,这样幂律噪声更易提取。实际上, #1理论方差方法不仅针对长期的光纤陀螺误差特性进行分析,同样在中等时间长度方面也可替代Allan方差成为一个良好的光学陀螺性能分析工具。

## 6 结 论

针对Allan方差分析方法的不足,提出了采用新的随机误差分析方法——#1理论方差来研究光学陀螺的随机误差特性。对高斯白噪声、时变方差噪声以及光纤陀螺的实际测试数据分别采用常规Allan方差和#1理论方差方法进行分析,结果表明

#1理论方差法具有更高的估计置信度,且能够从时域上更准确地辨识和估计出光纤陀螺随机噪声的类型和噪声水平;对于长相关时间的光学陀螺性能评估、随机建模与仿真以及光学陀螺信号滤波效果评价等方面,#1理论方差可以成为替代Allan方差的良好工具。

## 参 考 文 献

- 1 Wang Zhiguo, Long Xingwu, Wang Fei. Overview of four-mode differential laser gyros[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2012, 49(4): 040005.  
汪之国, 龙兴武, 王飞. 四频差动激光陀螺综述[J]. 激光与光电子学进展, 2012, 49(4): 040005.
- 2 Liu Jieyu, Yu Zhiyong, Ma Xuewen. Modeling and compensation of static temperature error synthetically for fiber optic gyroscope [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(8): 0823005.  
刘洁瑜, 余志勇, 马学文. 光纤陀螺静态温度综合误差建模及补偿[J]. 光学学报, 2012, 32(8): 0823005.
- 3 Tang Xiaqing, Cheng Xuwei, Guo Libin, et al.. Error modeling and compensating of fiber optic gyro based on wavelet analysis and grey neural network[J]. Chinese J Lasers, 2012, 39(10): 1008003.  
汤霞清, 程旭维, 郭理彬, 等. 小波分析和灰色神经网络融合的光纤陀螺误差建模与补偿[J]. 中国激光, 2012, 39(10): 1008003.
- 4 IEEE Std. IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros[S]. 1998.
- 5 Wang Xinlong, Du Yu, Ding Yangbin. Investigation of random error model for fiber optic gyroscope [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006, 32(7): 769-772.  
王新龙, 杜宇, 丁杨斌. 光纤陀螺随机误差模型分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2006, 32(7): 769-772.
- 6 Han Junliang, Ge Shengmin, Shen Yi. Research on the random error properties of optic gyro based on total variance[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2007, 39(5): 708-711.  
韩军良, 葛升民, 沈毅. 基于总方差方法的光纤陀螺随机误差特性研究[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2007, 39(5): 708-711.
- 7 Zhang Huijun, Li Xiaohui, Bian Yujing. The estimation of frequency stability by total variance[J]. Journal of Time and Frequency, 2003, 26(1): 48-53.  
张慧君, 李孝辉, 边玉敬. 用总方差进行频率稳定度的估计[J]. 时间频率学报, 2003, 26(1): 48-53.
- 8 Gao Yukai, Deng Zhenglong. Investigation on random error properties of optic gyro based on wavelet variance[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2004, 12(5): 65-70.  
高玉凯, 邓正隆. 基于小波方差的光学陀螺随机误差特性研究[J]. 中国惯性技术学报, 2004, 12(5): 65-70.
- 9 Li Jichen, Gao Fengqi, Wang Guanglong, et al.. Analysis of dynamic Allan variance for fiber optic gyro under vibration and variable temperature conditions[J]. Chinese J Lasers, 2013, 40(9): 0908004.  
李冀辰, 高凤岐, 王广龙, 等. 光纤陀螺振动和变温条件下的DAVAR分析[J]. 中国激光, 2013, 40(9): 0908004.
- 10 Howe D A. Method of improving the estimation of long-term frequency variance [C]. 1997 European Frequency and Time Forum, 1997. 91-99.
- 11 Howe D A, Pepler T K. Very long-term frequency stability: estimation using a special-purpose statistic [C]. Proceedings of the 2003 IEEE International Frequency Control Symposium and

- PDA Exhibition, 2003. 233—238.
- 12 Zhao Sihao, Lu Mingquan, Feng Zhenming. Allan variance analysis on error coefficients of MEMS inertial components[J]. Scientific Sinica Physica, Mechanica & Astronomica, 2010, 40(5): 672—675.  
赵思浩, 陆明泉, 冯振明. MEMS 惯性器件误差系数的 Allan 方差分析方法[J]. 中国科学: 物理学力学天文学, 2010, 40(5): 672—675.
- 13 Tasset T N, Howe D A, Percival D B. Theol confidence intervals[C]. 2004 IEEE Int. Freq. Control Symp. (Canada), 2004. 725—728.
- 14 Naser El-Sheimy, Hou Haiying, Niu Xiaoji. Analysis and modeling of inertial sensors using Allan variance [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2008, 57(1): 140—149.
- 15 Howe D A. TheoH: a hybrid, high-confidence statistic that improves on the Allan deviation[J]. Metrologia, 2006, 43(4): S322—S331.
- 16 Lorenzo G, Patrizia T. The dynamic Allan variance[J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2009, 56(3): 450—464.

栏目编辑: 王晓球