

# 分形法模拟大气湍流相位屏性能分析

丁晓娜 蔡冬梅 赵 圆 王 昆 逯培培 韦宏艳

(太原理工大学物理与光电工程学院, 山西 太原 030024)

**摘要** 数值模拟研究大气湍流的核心问题是构造准确且计算量小的大气湍流相位屏,以正确反映折射率的变化特性。根据大气湍流统计特性,采用分形方法数值模拟了方形大气湍流相位屏。对模拟结果进行统计分析,并与结构函数理论值对比,得到符合 Kolmogorov 统计规律的大气湍流相位分布。以此为基础,分析了分形法模拟大气湍流相位屏的性能。结果表明,分形法生成的方形相位屏在统计特性上与理论值基本吻合,从低频、中频到高频部分,由于分形迭代次数的增加,误差累加,相位屏模拟误差增大。随着相位屏采样点数量的增加,相位屏的模拟精度降低,同时所需模拟的相位屏数量增加。随着相位屏数量的增加,不同强度的大气湍流相位屏模拟精度趋于相似。

**关键词** 大气光学; 大气湍流; 随机相位屏; 分形法; 数值模拟

**中图分类号** P427.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201340.s113002

## Performance of Atmospheric Turbulence Phase Screen Simulation Using Fractal Method

Ding Xiaona Cai Dongmei Zhao Yuan Wang Kun Ti Peipei Wei Hongyan

(College of Physics and Optoelectronics, Taiyuan University of Technology,  
Taiyuan, Shanxi 030024, China)

**Abstract** Phase screen can reflect the change of refractive index correctly. Constructing an accurate atmospheric turbulence phase screen with small calculation amount is the key of numerical simulation. According to the statistical characteristics of turbulence, square atmospheric turbulence phase screen is calculated using fractal model. The simulation results complying with Kolmogorov atmospheric turbulence are obtained by analyzing the simulation results and theoretical values of phase structure function. Performance of atmospheric turbulence phase screen simulation based on fractal method is also analyzed. Analysis results show that square atmospheric turbulence phase screen simulation based on fractal method is consistent with the theoretical values in statistical properties. The simulation error of phase screen increases with fractal iterations from the area of low-frequency to the one of high-frequency. With the increasing grid numbers of phase screen, the accuracy of phase screen simulation is reduced. Besides, the number of phase screen needed is increased. As the number of phase screens increases, the simulation accuracies of atmospheric turbulence phase screens with different intensities turn similar.

**Key words** atmospheric optics; atmospheric turbulence; random phase screen; fractal method; numerical simulation

**OCIS codes** 010.1330; 010.1290; 010.1300; 010.3310

## 1 引 言

大气湍流是一种典型的随机过程,表现为大气的折射率随着空间位置、时间随机变化。光波在大气中传播受到大气湍流的影响,光波的振幅和相位随机起伏,造成光强闪烁、波面畸变、到达角起伏以及光束漂移等,影响了地基望远镜系统对天体目标和空间目标的观测、成像和识别。自适应光学技术

可实时测量、校正波前畸变,使成像观测系统保持良好的工作状态。数值计算方法模拟大气湍流是优化自适应光学系统的有效手段,一方面大大减少了实验成本,另一方面由于其可控性和可重复性,能够实现某些无法实际产生的实验场景。

数值模拟方法研究大气湍流的关键问题之一是如何准确地建立大气湍流的数值模型,目前通常采用

**收稿日期**: 2013-06-25; **收到修改稿日期**: 2013-09-03

**基金项目**: 山西省自然科学基金(2013011006-4)、中国科学院自适应光学重点实验室基金(LADF201301)

**作者简介**: 丁晓娜(1989—),女,硕士研究生,主要从事大气湍流相位屏仿真方面的研究。E-mail: dxn2007@126.com

**导师简介**: 蔡冬梅(1974—),女,博士,副教授,主要从事大气湍流特性、自适应光学波前测量等方面的研究。

E-mail: dm\_cai@163.com(通信联系人)

大气湍流相位屏近似的方法。湍流相位屏可以利用计算机产生的满足一定随机分布的伪随机数进行模拟,在一定精度内,这种遵循湍流统计特性的随机数能够代替实际的随机湍流相位分布。由于湍流特性用数理统计的方法进行描述,相位屏的数量要满足一定的要求。相位屏数量太大,计算负担重,工作效率低,反之数量过少,获得的模拟结果不能正确描述湍流特性。目前有几种不同的方法生成相位屏,最先提出也是最常用的统计学方法有功率谱反演法<sup>[1-2]</sup>,数学方法如多项式展开法<sup>[3-6]</sup>、分形法<sup>[7-8]</sup>和随机数据元扩张法<sup>[9]</sup>等。功率谱反演法在低频部分存在严重不足,通过次谐波补偿可改善其低频不足的问题,但计算量大大幅度增加,而多项式展开法则严重缺少高频部分。分形法是 Lane 等<sup>[10]</sup>基于畸变相位波前的分形特征,与分形理论结合,利用随机中点位移法产生大气湍流相位屏。目前对于分形模拟相位屏<sup>[7-8]</sup>的讨论主要集中在方形相位屏的产生和特性研究上,获得的方形屏的仿真结果与 Kolmogorov 谱<sup>[11-12]</sup>比较符合,表明分形法可以产生湍流相位屏。本文利用分形法产生了符合 Kolmogorov 统计的相位屏,并研究了相位屏尺度、采样点距离、大气湍流强度对结果的影响以及正确描述大气湍流统计特性所需要的相位屏数量,分析了分形法产生的相位屏的相位结构函数的统计值与相位结构函数理论值的相对误差,讨论了分形法模拟大气湍流的效果。

## 2 大气湍流随机相位屏的分形原理

分形布朗运动(FBM)由 Mandelbrot 和 Van Ness 在 1968 年首先提出,用于模拟各种具有分形特征的噪声。

根据 Kolmogorov 理论,大气湍流分布通常是局部均匀各向同性,因此通过湍流大气的光束相位是一

个均匀、各向同性的高斯随机过程,其结构函数为

$$D_{\varphi}(r) = \langle \varphi_{R+r} - \varphi_R \rangle^2 = 6.88 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{5/3}, \quad (1)$$

式中  $\varphi_{R+r}$ 、 $\varphi_R$  分别为大气湍流相位屏  $R+r$ 、 $R$  处的相位值, $r$  为两点间距离, $r_0$  为大气相干长度。

波前相位的功率谱  $P_{\varphi}(k)$  与空间频率  $k$  的关系满足

$$P_{\varphi}(k) \propto k^{-11/3}. \quad (2)$$

二维分形布朗运动的结构函数(增量的方差)为

$$E[(p_x - p_y)^2] = cr^{2H}, \quad (3)$$

式中  $c$  是标度常数, $H$  为 Hurst 参数, $p_x$ 、 $p_y$  为  $x$ 、 $y$  处的随机数。

分形布朗运动的功率谱满足

$$P_B(k) \propto k^{-(2H+F)}, \quad (4)$$

式中  $F$  为生成表面的标准拓扑维, $H$  为 Hurst 参数, $0 < H < 1$ 。

比较分形布朗运动和大气湍流相位屏的结构函数(1)式、(3)式和功率谱函数(2)式、(4)式可知,畸变波前相位(在惯性区域内)是一个 Hurst 参数  $H=5/6$ ,分形维数  $F=11/6$  的分形布朗运动,因此,模拟湍流相位屏的问题就转化为对特定的分形布朗运动( $H=5/6$ , $F=11/6$ )的模拟问题。

随机中点位移算法是分形的标准算法<sup>[9]</sup>,它利用细分过程,在两个点或多个点之间插值,具有自适应递归性。由于随机中点位移法的计算量小,计算速度快,因此本文选择该算法来实现大气湍流相位屏的模拟。

## 3 大气湍流随机相位屏仿真结果及分析

设入射光波长为  $1.55 \mu\text{m}$ ,大气湍流结构常数  $C_n^2$  为  $1.0 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$ ,湍流外尺度  $L_0$  为  $20 \text{ m}$ ,两相邻相位屏间隔为  $200 \text{ mm}$ 。

图 1 所示采样点数为  $256 \times 256$ ,相邻采样点间

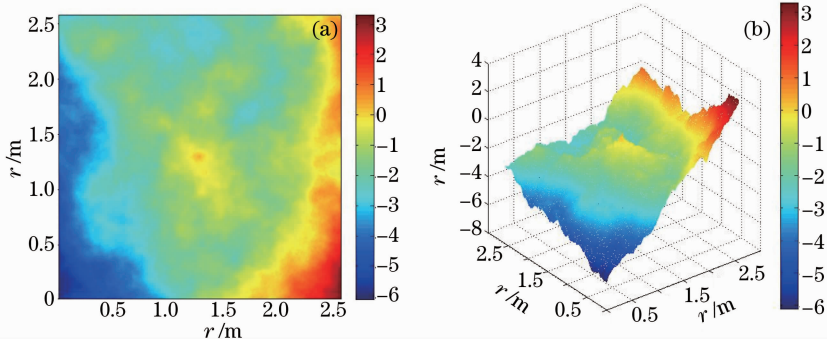


图 1 分形法产生的大气湍流相位屏。(a) 二维分布; (b) 三维分布

Fig. 1 Atmospheric turbulence phase screen produced by fractal method. (a) Two-dimensional distribution; (b) three-dimensional distribution

距为 0.01 m, 湍流特征强度  $D/r_0=4$  时的一幅相位屏, 图 1(a)、(b) 分别是其二维与三维相位分布图。图 1 中, 模拟的相位屏除了有充足的低频成分外, 还包含有明显的高频分量。

图 2 为理想情况下的相位结构函数曲线, 根据 (1) 式, 模拟相位结构函数曲线设为 20000 幅相位屏的相位结构函数的统计均值。图 2 中, 分形法产生 Kolmogorov 湍流相位屏结构函数曲线与理论值非常接近。然而, 由于分形法中基于插值的 4 个角点并不能严格满足结构函数方程; 且随机中点位移法在插值过程中, 各个增量之间具有非平稳的结构函数, 会影响到相位屏的模拟精度, 模拟的结构函数曲线与理论值仍有一定的差值。

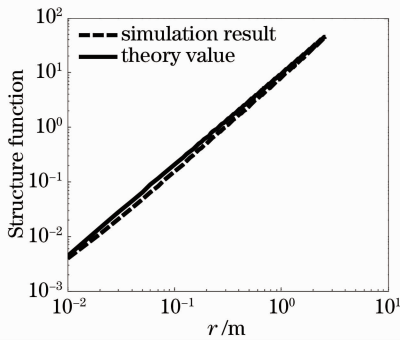


图 2 分形法产生的相位结构函数曲线与理论曲线

Fig. 2 Comparison of phase structure function simulated curves and the theoretical curves

定义模拟相位屏的结构函数相对理论波前结构函数的相对误差  $\Delta D$  为

$$\Delta D = [1 - D_{\varphi}^{\text{sim}} / D_{\varphi}^{\text{theory}}] \times 100\%, \quad (5)$$

式中  $D_{\varphi}^{\text{(sim)}}$  为模拟波前结构函数,  $D_{\varphi}^{\text{theory}}$  为理论波前结构函数。

图 3 为相位结构函数模拟值与理论值的相对误差曲线。图 3 中, 随着两点间距离  $r$  的增加, 模拟相位屏的结构函数相对理论值的误差降低。说明模拟

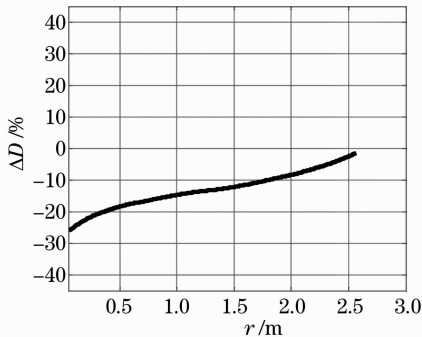


图 3 相位结构函数模拟值与理论值相对误差

Fig. 3 Relative error between the simulated values of phase structure functions and the theoretical values

相位屏具有丰富的低频成分, 在低频区的模拟精度最高。随着距离  $r$  的减小, 从低频过渡到中频和高频区, 相对误差曲线升高, 模拟精度降低。

保持相位屏大小 2.56 m, 湍流特征强度  $D/r_0=4$  不变, 改变相位屏采样点的数量, 相应的相位结构函数与理论值的对比曲线如图 4 所示。图 4 中分别是采样点数为  $64 \times 64$ 、 $128 \times 128$ 、 $512 \times 512$  的 10000 幅相位屏的统计结果。随着采样点数的增多, 结构函数的模拟结果相对理论值的偏离量增大。计算图 4 中各条模拟相位结构函数曲线的相对误差  $\Delta D$ , 结果如图 5 所示。这种模拟精度随着采样点的增多而降低是与随机中点位移方法有关。

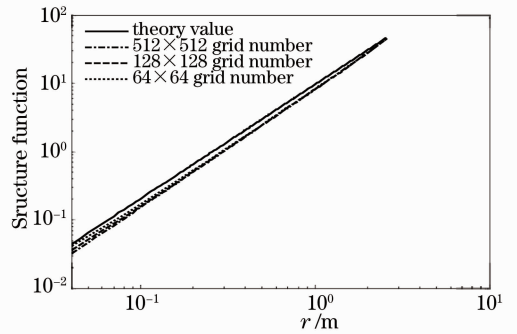


图 4 不同采样点数目相位屏对应的结构函数曲线对比

Fig. 4 Comparison of phase structure functions corresponding to phase screen with different grid numbers

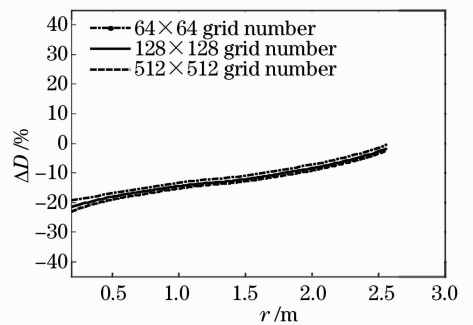


图 5 不同采样点数目相位屏的结构函数相对误差

Fig. 5 Relative error of phase structure function corresponding to phase screen with different grid numbers

随机中点位移法是通过插值迭代求出下一个中点的相位值, 迭代次数越多, 累计误差越多, 相位结构函数相对理论值的误差就越大。从低频、中频到高频, 随着迭代次数的增加, 采样点的间隔越来越小, 相对误差逐渐增大, 模拟精度降低。例如, 对于相对距离均为 2 m 的采样点,  $64 \times 64$ 、 $128 \times 128$ 、 $512 \times 512$  的相位屏分别要做 5、6、8 次迭代。

相位屏模拟光波在湍流介质中的传输时,需要选取适当的相位屏数量<sup>[13]</sup>。相位屏的数量要足够多,以满足统计规律;然而过多的相位屏数量会增加计算负担。下面对相位屏的采样点数目、湍流强度与所需产生的随机位相屏的数量进行讨论。

图 6(a)、(b)分别为采样点数为  $64 \times 64$  和  $128 \times 128$ ,大气湍流强度特征参数  $D/r_0 = 4$  时,模拟相位屏

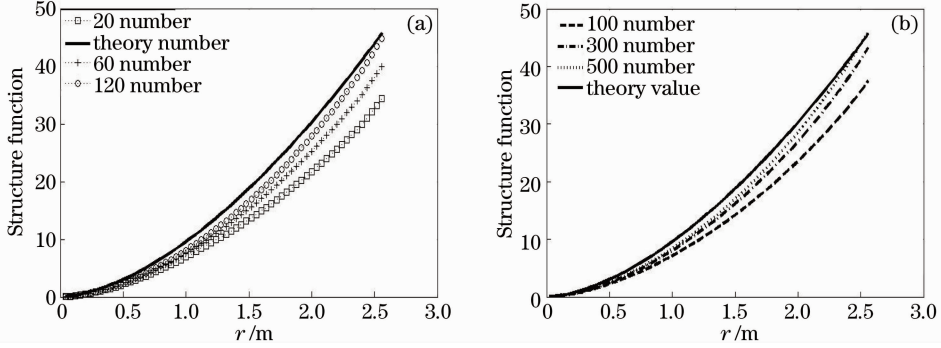


图 6 湍流强度  $D/r_0 = 4$  时,不同采样点数的相位屏结构函数。

(a) 采样点数为  $64 \times 64$ ; (b) 采样点数为  $128 \times 128$

Fig. 6 Phase structure functions with different simulate numbers when turbulence intensity  $D/r_0$  is 4.

(a) Grid number is  $64 \times 64$ ; (b) grid number is  $128 \times 128$

定义模拟的相位屏结构函数与理论结构函数的统计方差为

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^N [D_{\varphi}^{\text{sim}} - D_{\varphi}^{\text{theory}}]^2}{N}, \quad (6)$$

式中  $N$  为  $D_{\varphi}^{\text{sim}}$  的维数。图 7 为  $D/r_0 = 4$  时,采样点数分别  $64 \times 64$  和  $128 \times 128$  的相位屏的结构函数的统计方差随相位屏数量的变化关系曲线。当相位屏的取样点数较多时,所生成的相位屏统计相位随着相位屏模拟数量的增加,起伏变化较大;随着模拟相位屏数量的增加,其结构函数统计方差降低,模拟的相位屏的误差降低趋于稳定。

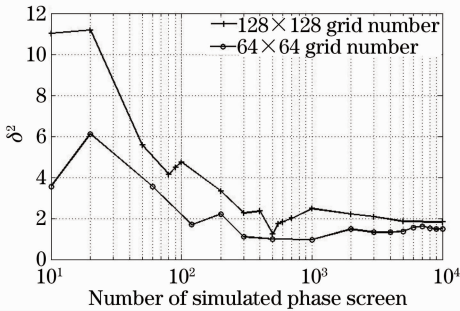


图 7 湍流强度  $D/r_0 = 4$  不同采样点数目相位屏的结构函数与理论值的相对误差理论值的对比

Fig. 7 Statistical variance of phase structure functions corresponding to phase screen with different grid numbers when turbulence intensity  $D/r_0$  is 4

的结构函数与理论值的比较。由图 6 可知,随着模拟相位屏数量的增多,所生成的相位屏的统计规律趋向理论值;相位屏的采样点数目越多,所需要模拟的相位屏数量也越多。例如,采样点数为  $64 \times 64$  和  $128 \times 128$  的相位屏,需要模拟的相位屏数量分别为 120 和 500 时,与相位结构函数的理论值相比,相对误差约为 10%,完全能模拟大气湍流的统计特性。

另外,如图 7 所示,当模拟相位屏数量为 10000 左右时, $128 \times 128$  相位屏的统计方差大于  $64 \times 64$  的相位屏,说明前者的模拟误差大,这一点与前面的结果吻合。因此,在相位屏的数值模拟过程中,需要选择合适的采样点以及相位屏数量以满足大气湍流的统计特性。

图 8 为采样点数为  $128 \times 128$  时,模拟相位屏的结构函数相对理论值的平均相对误差  $\overline{\Delta D}$  随模拟相位屏数量变化关系曲线。定义相位结构函数的平均相对误差为

$$\overline{\Delta D} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta D_i. \quad (7)$$

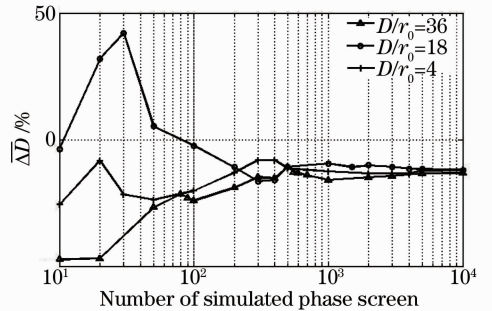


图 8 相位屏结构函数的平均相对误差与  $D/r_0$  的关系  
Fig. 8 Relationship between the average relative error of phase screen structure function and turbulence intensity  $D/r_0$

由图 8 可知,随着相位屏数量的增加,不同湍流强度的相位屏的平均相对误差下降,并逐渐趋于平稳,约为 12%,分形法模拟的大气湍流相位屏统计结构函数的模拟精度与大气湍流强度无直接关系。

## 4 结 论

针对现有模拟大气湍流相位屏方法的局限性,根据大气湍流的统计特性,建立了大气湍流波前相位屏的分形模型,并采用分形法生成了满足 Kolmogorov 大气湍流统计特性的畸变波前相位屏。详细讨论了方形大气湍流相位屏的模拟精度与采样点数、不同湍流强度以及相位屏模拟数量的关系。结果表明,分形法模拟的大气湍流相位屏低频、中频、高频在统计特性上与理论值基本吻合。随着模拟相位屏维数的增加,相位屏统计相对误差增大。当模拟相位屏数量增加到一定程度,相位屏的模拟精度逐步趋于稳定。分形法的模拟精度与大气湍流强度无直接关系。分形法在一定程度上克服了谱反演法具有的低频成分不足以及 Zernike 多项式法高频成分不足的优点,并且具有较高运算效率。然而,由于分形法的不稳定性,产生的大气湍流相位屏结构函数曲线与理论值并不完全一致,还需要进一步对算法进行优化。

## 参 考 文 献

- 1 J A Viecelli. Functional representation of power law random fields and times series[J]. J Comp Phys, 1991, 95(1): 29-39
- 2 B L McGlamery. Restoration of turbulence-degraded images[J]. J Opt Soc Am, 1996, 57(3): 293-297.
- 3 J N Robert. Zernike polynomial and atmospheric turbulence[J]. J Opt Soc Am, 1976, 66(3): 207-211.
- 4 R Nicoles. Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials[J]. Opt Eng, 1990, 29(10): 1174-1180.
- 5 Ye Hongwei, Li Xinyang, Xian Hao, *et al.*. Relationship

- between Zernike wavefront errors and beam quality factor  $\beta$  for optics system[J]. Chinese J Lasers, 2009, 36(6): 1420-1427.
- 叶红卫, 李新阳, 鲜浩, 等. 光学系统的 Zernike 像差与光束质量  $\beta$  因子的关系[J]. 中国激光, 2009, 36(6): 1420-1427.
- 6 Chen Bo, Li Xinyang, Jiang Wenhan. Optimization of stochastic parallel gradient descent algorithm for adaptive optics in atmospheric turbulence[J]. Chinese J Lasers, 2010, 37(4): 959-964.
  - 陈波, 李新阳, 姜文汉. 大气湍流自适应光学随机并行梯度下降算法的优化[J]. 中国激光, 2010, 37(4): 959-964.
  - 7 Li Hongping, Yan Chuangzhong, Hua Zhili. Numerical simulation of phase screen distorted by atmospheric turbulence based on fractal theory [J]. Journal of Atmospheric and Environmental Optics, 2009, 4(3): 171-178.
  - 李洪平, 闫传忠, 华志励. 基于分形的大气湍流随机相位屏数值模拟[J]. 大气与环境光学学报, 2009, 4(3): 171-178.
  - 8 Wu Hanling, Yan Haixing, Li Xinyang, *et al.*. Generation of rectangular turbulence phase screens based on fractal characteristics of distorted wavefront [J]. Acta Optica Sinica, 2009, 29(1): 114-119.
  - 吴晗玲, 严海星, 李新阳, 等. 基于畸变相位波前分形特征产生矩形湍流相位屏[J]. 光学学报, 2009, 29(1): 114-119.
  - 9 Hua Zhili, Li Hongping. Atmospheric turbulence phase screen simulation based on random unit expansion [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(5): 0501001.
  - 华志励, 李洪平. 基于随机数据元扩张的大气湍流相位屏数值模拟[J]. 光学学报, 2012, 32(5): 0501001.
  - 10 R G Lane, A Glindemann, J C Dainty. Simulation of a Kolmogorov phase screen[J]. Waves in Random Media, 1992, 2(3): 209-224.
  - 11 V Sriram, D Kearney. An ultra fast Kolmogorov phase screen generator suitable for parallel implementation[J]. Opt Express, 2007, 15(21): 13709-13714.
  - 12 Chen Feinan, Chen Jingjing, Zhao Qi, *et al.*. Properties of high order Bessel Gaussian beam propagation in non-Kolmogorov atmosphere turbulence[J]. Chinese J Lasers, 2012, 39(9): 0913001.
  - 陈斐楠, 陈晶晶, 赵琦, 等. 高阶贝塞尔高斯光束在非柯尔莫哥诺夫大气中的传输特性[J]. 中国激光, 2012, 39(9): 0913001.
  - 13 Zhiling Jiang, Yang Dai, Faquan Li, *et al.*. Numerical simulation of Shack-Hartmann wavefront sensor to characterize turbulence phase statistics[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2005, 44(5): 466-478.

栏目编辑:王晓琰