

# 基于 Hadamard 模式扰动梯度下降算法的无波前探测自适应光学

陈 波<sup>1</sup> 黄林海<sup>2</sup> 李新阳<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> 河北联合大学电气工程学院, 河北 唐山 063009; <sup>2</sup> 中国科学院光电技术研究所自适应光学研究室, 四川 成都 610209)

**摘要** 对于无波前探测自适应光学(AO)而言,闭环控制算法的效率至关重要。提出一种以 Hadamard 模式为扰动向量的梯度下降算法,介绍了基于该算法的自适应光学闭环工作原理。通过与顺序(扰动)梯度下降算法和近年来最常用的随机并行梯度下降算法对比,分析了该算法的特点和可行性。建立了基于该算法的自适应光学仿真模型,并通过对随机像差进行闭环校正仿真,分析了算法的闭环精度和收敛速度。结果表明,以 Hadamard 模式为扰动向量的梯度下降算法能够用于无波前探测自适应光学,而且闭环精度很高;与随机并行梯度下降(SPGD)算法相比,该算法不但实施更加容易,而且收敛速度更快、效率更高。

**关键词** 自适应光学; 无波前探测; Hadamard 矩阵; 梯度下降算法

**中图分类号** TP273.2 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/CJL201340.s113001

## Wavefront Sensorless Adaptive Optics Based on the Gradient Descent Algorithm with Hadamard Model

Chen Bo<sup>1</sup> Huang Linhai<sup>2</sup> Li Xinyang<sup>2</sup>

<sup>1</sup> School of Electrical Engineering, Hebei United University, Tangshan, Hebei 063009, China

<sup>2</sup> Laboratory on Adaptive Optics, Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China

**Abstract** For wavefront sensorless adaptive optics (AO) systems, the efficiency of close-loop control methods is of great importance. In this paper, a gradient descent algorithm with Hadamard model is proposed. The working principle of AO close-loop based on the algorithm is introduced. The working process and feasibility of this method are analyzed by comparing with the serial gradient descent algorithm and stochastic parallel gradient descent algorithm. The numerical simulation model with this method is setup, and the close-loop corrections with random generated aberrations are performed to verify its precision and convergence speed. The results show the gradient descent algorithm with Hadamard model can be used in wavefrontless adaptive optics, and compared with the stochastic parallel gradient descent algorithm, it is not only easier to be implemented but also more efficient.

**Key words** adaptive optics; wavefront sensorless; Hadamard matrix; gradient descent algorithm

**OCIS codes** 010.1080; 010.1330; 010.3310; 120.4820

## 1 引 言

在波前校正、光通信、显微成像等领域,无波前探测自适应光学设备由于具有结构简单、体积小等优点,因而有其独特的应用价值<sup>[1-3]</sup>。

目前在无波前探测自适应光学中主要用到两类优化算法,一类是无模式优化算法,如随机并行梯度下降(SPGD)算法、爬山法(可看作是串行扰动梯度下

降算法)等;另一类是模式型优化算法,如基于L<sub>Z</sub>模式(以及 Zernike 模式)算法和基于任意模式优化算法<sup>[4-8]</sup>。对于无模式优化算法,通常需要多次迭代完成像差的校正,以效率较高的 SPGD 算法为例<sup>[4]</sup>,随着校正器单元数目  $N$  的增加,算法收敛所需迭代次数至少以  $\sqrt{N}$  的速率增加,而且每次迭代至少需要测量 1 次远场信息。对于模式型算法,研究表明,如果

收稿日期: 2013-06-20; 收到修改稿日期: 2013-09-06

基金项目: 河北省自然科学基金(F2013209149)

作者简介: 陈 波(1984—),男,博士,讲师,主要从事自适应光学技术和优化控制技术等方面的研究。

E-mail: chenbo182001@163.com

在像差校正过程中只利用  $N$  个模式(可看作校正器单元数),那么只需要测量  $N+1$  次远场信息就可以完成像差校正,因此效率比无模式优化算法高<sup>[6-8]</sup>。然而,这类算法完成一次控制信号更新需要  $N+1$  次测量,而无模式优化算法每测量 1~2 次就完成一次校正信号更新<sup>[4-5]</sup>,因此前者的时间延时更长,可能不利于实时校正。此外,该类型优化算法还需要事先测量或计算一些系统信息<sup>[1,7-8]</sup>。在无模式优化算法中,SPGD 算法是近年来关注度高的算法之一,而且也是效率高的算法之一<sup>[4]</sup>,其主要缺点就是需要多次迭代完成像差校正,而且还需要一个伪随机序列发生器以实时产生随机扰动信号<sup>[4,9]</sup>。

为此,本文提出一种以 Hadamard 模式作为扰动信号的梯度下降(H\_GD)算法。与模式型优化算法相比,该方法每测量 1~2 次远场信息就能更新波前校正器的校正信号,因此时间延时长短;与目前最为常用的 SPGD 算法相比,该方法的波前扰动模式(信号)是确定的,不需要实时的伪随机序列发生器,因此实施更容易、效率更高。文中通过与顺序梯度下降算法和随机并行梯度下降算法对比,分析了该算法的可行性,然后通过数值仿真对其效率进行了分析和验证。

## 2 H\_GD 算法分析

基于 H\_GD 算法的无波前自适应光学(AO)如图 1 所示。波前校正器校正入射波前相差,光电探测器探测远场光强,性能分析模块计算系统性能指标,H\_GD 控制算法计算校正信号并输出给校正器。

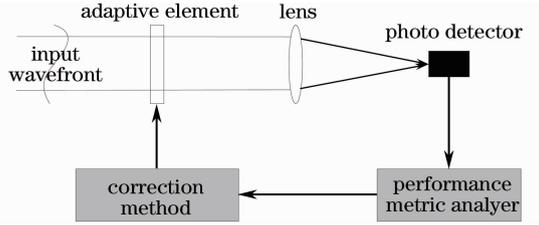


图 1 基于 H\_GD 算法的 AO 示意图

Fig. 1 Scheme of AO based on H\_GD algorithm

H\_GD 的工作流程为:在第  $k+1$  次闭环迭代时,首先利用 Hadamard 矩阵(由 1 和 -1 构成的正交矩阵,1 和 -1 的数量相同)产生一个扰动向量  $\Delta \mathbf{u}^{(k)}$ ,然后类似于 SPGD 算法,按照双边扰动的方式更新校正信号  $\mathbf{u}^{(k+1)}$ <sup>[10]</sup>

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} \pm \gamma \Delta \mathbf{u}^{(k)} \Delta J^{(k)}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

式中  $\gamma$  是步长系数,  $\Delta J$  是由  $\Delta \mathbf{u}^{(k)}$  引起的性能指标扰动量。

扰动向量  $\Delta \mathbf{u}^{(k)}$  的具体生成方法为:对于一个  $N$  单元校正器,如果维数为  $N \times N$  的 Hadamard 矩阵存在,就循环利用其每一个列向量乘以一个扰动幅度作为算法的扰动向量;如果维数为  $N \times N$  的 Hadamard 矩阵不存在,就利用维数略大于  $N \times N$  的 Hadamard 矩阵按照上述方法生成扰动向量。例如对于一个 16 单元校正器,可利用维数为  $16 \times 16$  的 Hadamard 矩阵[如(2)式所示]的列向量乘以扰动幅度  $\sigma$  作为扰动向量;对于一个 19 单元校正器,由于  $19 \times 19$  维的 Hadamard 矩阵不存在,因此利用维数为  $20 \times 20$  的 Hadamard 矩阵的列向量的前 19 个元素乘以一个扰动幅度作为扰动向量。

$$\mathbf{H}_{(16,16)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

可以看出, H\_GD 算法的工作方式与已在自适应光学中成功应用的爬山法(串行扰动梯度下降)<sup>[11]</sup>和 SPGD 算法(随机并行扰动)非常相似, 它们都是通过迭代的方式来计算校正信号  $\mathbf{u}$ 。

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^N u_i F_i(x, y), \quad (3)$$

式中  $\varphi(x, y)$  为入射相位畸变的共轭相位,  $F_i(x, y)$  是校正器第  $i$  个控制通道的影响函数, 矩阵形式可表示为

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F}\mathbf{u}. \quad (4)$$

对于串行(扰动)梯度下降算法而言, 根据其工作原理, 其扰动向量事实上是单位矩阵  $\mathbf{E}$ (对角元素为 1, 其余元素为 0 的正交矩阵) 的列向量乘以一个幅度常数  $\sigma$ <sup>[11]</sup>。因此该方法可以看作是基于单位矩阵模式的梯度下降算法, 通过充分迭代后, 可以得到每个模式的大小  $\mathbf{v}$ , 表示为

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F}\mathbf{E}\mathbf{v}, \quad (5)$$

校正器控制信号通过  $\mathbf{u} = \mathbf{E}\mathbf{v}$  得到。将(5)式中的单位矩阵  $\mathbf{E}$  用  $\mathbf{E} = \mathbf{H}\mathbf{H}^T$  代替, 就可以得到前面所述基于 Hadamard 模式的梯度下降算法, 即 H\_GD 算法, 表示为

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F}\mathbf{E}\mathbf{v} = \mathbf{F}\mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{v} = \mathbf{F}\mathbf{H}\mathbf{h}. \quad (6)$$

式中  $\mathbf{H}$  是一个  $N \times N$  维的 Hadamard 矩阵,  $\mathbf{H}^T$  其逆矩阵( $\mathbf{H}$  是由 1 和 -1 构成的正交矩阵, 因此  $\mathbf{H}^T$  一定存在)。可以看出, (6) 式所示的方程中, 其扰动向量正是 Hadamard 矩阵的列向量乘以一个常数  $\sigma$ 。类似地, 通过充分迭代, 可以得到每个模式的大小  $\mathbf{h}$ , 而校正器控制信号可以通过  $\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{h}$  得到。因此, H\_GD 算法是可行的, 而且由(2)式可以看出, 其校正信号是并行优化的, 而串行梯度下降算法中, 校正信号是按顺序逐个优化的, 因此作为并行优化算法, H\_GD 算法效率比串行梯度下降算法要高。

对于 SPGD 算法, 根据工作原理以及伪随机序列(通常为 M 序列或 Gold 序列)的有限长特性, 其扰动向量为一个  $N \times L$  的矩阵  $\mathbf{M}$ (由 1 和 -1 构成)的列向量乘以一定幅度  $\sigma$ , 其中  $L$  是伪随机序列的长度,  $N$  是控制单元数(通常  $N \ll L$ )。将  $\mathbf{E} = \mathbf{M}\mathbf{M}^T$  代入(5)式可得

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F}\mathbf{M}\mathbf{M}^T \mathbf{v} = \mathbf{F}\mathbf{M}\mathbf{m}, \quad (7)$$

式中  $\mathbf{M}^T$  是  $\mathbf{M}$  的伪逆矩阵。类似地, SPGD 算法可以看作是基于  $L$  个伪随机模式的梯度下降算法, 通过充分迭代, 可得每个扰动模式的大小  $\mathbf{m}$ , 校正器控制信号可以通过  $\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{m}$  计算出。

与 SPGD 控制算法相比, H\_GD 算法中的扰动

模式是确定的, 而且优化的模式数量明显较少 ( $N \ll L$ ), 因此效率可能更高。同时, 在利用 H\_GD 算法闭环时, 可以事先将 Hadamard 矩阵存储到存储器中, 闭环时直接调用即可, 从而避免了设计伪随机序列发生器以及实时产生随机扰动信号, 因此更容易实现。

需要说明的是, 在 SPGD 算法中, 通常随机扰动模式中各分量相互独立且服从伯努利分布, 即校正器各单元上的扰动信号的幅值固定、符号取正或负的概率相等<sup>[12]</sup>, 以保证算法的收敛速度和精度。在 H\_GD 算法中, 可以看出, 除第一行外, Hadamard 矩阵的行向量中 1 和 -1 的个数相同, 因此校正器各单元上的扰动信号的符号取正或负的概率相等, 与 SPGD 算法的扰动信号特性相同, 这也是采用 Hadamard 矩阵的列向量作为扰动模式的主要原因。

### 3 数值仿真

为了验证 H\_DG 算法的可行性效率, 建立了一个如图 1 所示的无波前探测自适应光学数值仿真模型。以 61 单元连续表面、分立驱动压电变形镜为校正器, 驱动器影响函数为高斯函数, 其排布如图 2 所示; 采用 Roddier<sup>[13]</sup> 提出的方法随机产生入射波前, 以远场光强的平均半径为性能指标  $J$ , 其值向极小值方向进行闭环优化<sup>[8,14]</sup>, 用峰值 Strehl Ratio(SR,  $R_s$ )评价闭环校正效果。

$$J = \frac{\iint \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} I(x, y) dx dy}{\iint I(x, y) dx dy}, \quad (8)$$

$$R_s = \frac{\max[I(x, y)]}{\max[I_0(x, y)]}, \quad (9)$$

式中  $I(x, y)$  表示远场光强分布,  $(x', y')$  是其质心,  $\max[I(x, y)]$  表示远场光强峰值,  $I_0(x, y)$  表示无

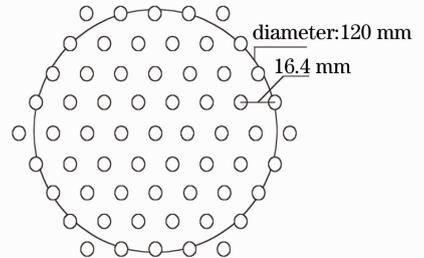


图 2 61 单元变形镜的驱动器排布  
Fig. 2 Actuators distribution of 61-element deformable mirror

像差时的远场光强分布,  $\max[I_0(x, y)]$  是其峰值。

根据上面关于 H\_GD 算法工作流程的介绍, 由于变形镜单元数  $N$  为 61, 因此利用维数为  $64 \times 64$  的 Hadamard 矩阵列向量的前 61 个元素乘以扰动幅度  $\sigma$  作为算法的扰动向量。需要注意的是, 由于 Hadamard 矩阵的第一列元素全部为 1, 施加到变形镜上时, 主要产生波前平移, 因此该列向量不作为扰动向量。

按照 Roddier<sup>[13]</sup> 提出的方法, 利用 104 阶 Zernike 模式随机产生 200 帧入射波前像差(不考虑波前倾斜), 用 H\_GD 算法进行闭环仿真。

为了验证算法的有效性, 将闭环仿真结果与利用变形镜影响函数最小二乘拟合(LSF)入射波前像差得到的结果(可认为是系统的最佳校正效果)进行比较, 结果如图 3 所示。从中可以看出, 利用 H\_GD 算法闭环后的远场峰值 SR 与最小二乘法得到的 SR 非常接近, 计算得知二者的 SR 最大绝对偏差只有 0.0169。可以看出 H\_GD 算法闭环精度很高且不易陷入局部极值。

为了验证 H\_GD 算法的效率, 分别利用 H\_GD 算法和 SPGD 算法在相同的扰动幅度  $\sigma$  和步长系数

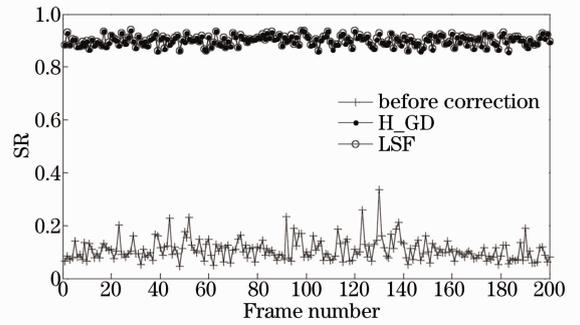


图 3 校正前、利用 H\_GD 算法充分闭环后以及最小二乘拟合后远场 SR 对比

Fig. 3 Comparison of SRs before correction and after fully correction with H\_GD algorithm and the least squares fitting results

$\gamma$  下进行闭环仿真。在仿真过程中, 在远场光强中引入一定大小的高斯噪声, 并对远场数据进行阈值处理。两种算法闭环得到的性能指标  $J$  和远场峰值 SR 的平均迭代曲线如图 4 所示。从中可以看出, 与 SPGD 算法相比, H\_GD 算法闭环时的 SR 收敛速度几乎快一倍。因此, 基于 Hadamard 模式的梯度下降算法是可行的, 而且效率比 SPGD 要高, 实现更为容易。

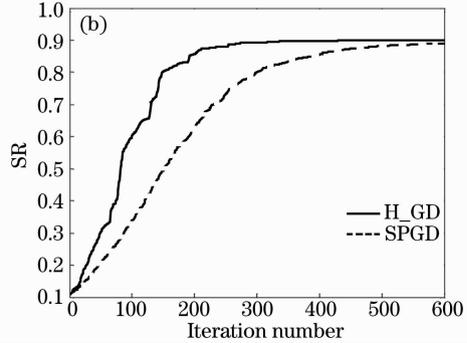
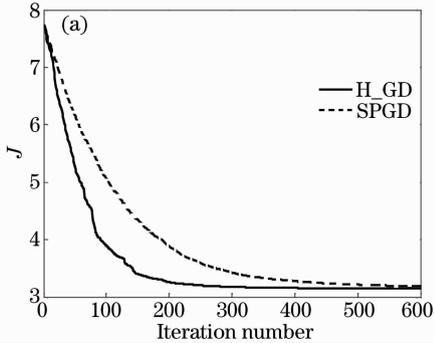


图 4 分别利用 H\_GD 算法和 SPGD 算法得到的平均迭代曲线。(a)  $J$ ; (b) SR

Fig. 4 Averaged iteration curves with H\_GD and SPGD algorithms, respectively. (a)  $J$ ; (b) SR

需要说明的是, 上述结果是 H\_GD 算法和 SPGD 算法在相同的扰动幅度  $\sigma$  和步长系数  $\gamma$  下取得的, 因此具有可比性。但是, 无论是模式型算法还是无模式优化算法, 扰动幅度和搜索步长均对算法的收敛特性有重要影响<sup>[15]</sup>, 因此在具体应用时, 需要结合校正器的特点和远场探测器件的增益进行合理选择。

## 4 结 论

根据以上分析可以得出, 以 Hadamard 模式作为扰动信号的梯度下降算法, 即 H\_GD 算法, 完全可以用作无波前探测自适应光学的优化控制算法。

与目前常用的以随机信号为扰动的 SPGD 算法相比, 从实现的角度而言, 由于 H\_GD 算法不需要设计伪随机序列发生器以及实时产生伪随机序列, 因此实施更加容易; 从优化的模式数量来看, Hadamard 模式远少于 SPGD 算法优化的模式数量(即前面所述的伪随机序列的周期), 因此效率更高。

值得注意的是, 由于 Hadamard 模式是确定的, 因此可以根据待校正像差的特性选择合适的模式, 这将是下一步研究的重点。

## 参 考 文 献

1 Enrico Grisan, Fabio Frassetto, Vania Da Deppo, *et al.*. No

- wavefront sensor adaptive optics system for compensation of primary aberrations by software analysis of a point source image. 1. methods[J]. Appl Opt, 2007, 46(25): 6434-6441.
- 2 L P Murray, J C Dainty, E Daly. Wavefront correction through image sharpness maximization[C]. SPIE, 2005, 5823: 40-47.
- 3 Biru Wang, Martion J Booth. Optimum deformable mirror modes for sensorless adaptive optics[J]. Opt Commun, 2009, 282(23): 4467-4474.
- 4 Mikhail A Vorontsov, Gary W Carhart, Marc Cohen, *et al.*. Adaptive optics based on analog parallel stochastic optimization; analysis and experimental demonstration[J]. J Opt Soc Am A, 2000, 17(8):1440-1453.
- 5 S Zommer, E N Ribak, S G Lipson, *et al.*. Simulated annealing in ocular adaptive optics[J]. Opt Lett, 2006, 31(7): 939-941.
- 6 M J Booth. Wave front sensor-less adaptive optics; a model-based approach using sphere packings[J]. Opt Express, 2006, 14(4): 1339-1352.
- 7 Martin J Booth. Wavefront sensorless adaptive optics for large aberrations[J]. Opt Lett, 2007, 32(1): 5-7.
- 8 Huang Linhai, Rao Changhui. Wavefront sensorless adaptive optics; a general model-based approach[J]. Opt Express, 2011, 19(1): 371-379.
- 9 Zhang Jinbao, Chen Bo, Li Xinyang, *et al.*. FPGA hardware implementation of SPGD control algorithm for adaptive optics system[J]. Opto-Electronic Engineering, 2009, 36(9): 46-51. 张金宝, 陈波, 李新阳, 等. 自适应光学系统 SPGD 控制算法的 FPGA 硬件实现[J]. 光电工程, 2009, 36(9): 46-51.
- 10 Chen Bo, Li Xinyang, Jiang Wenhan. Optimization of stochastic parallel gradient descent algorithm for adaptive optics in atmospheric turbulence[J]. Chinese J Lasers, 2010, 37(4): 959-964. 陈波, 李新阳, 姜文汉. 大气湍流自适应光学随机并行梯度下降算法的优化[J]. 中国激光, 2010, 37(4): 959-964.
- 11 Jiang Wanhan, Huang Shufu, Wu Xubin. Hill-climbing adaptive optics wavefront correction system[J]. Chinese J Lasers, 1988, 15(1): 17-21. 姜文汉, 黄树辅, 吴旭斌. 爬山法自适应光学波前校正系统[J]. 中国激光, 1988, 15(1): 17-21.
- 12 Chen Bo, Li Xinyang. Bandwidth of adaptive optics system based on stochastic parallel gradient descent algorithm[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2013, 50(3): 030101. 陈波, 李新阳. 基于随机并行梯度下降算法的自适应光学系统带宽[J]. 激光与光电子学进展, 2013, 50(3): 030101.
- 13 N Roddier. Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials[J]. Opt Eng, 1990, 29(10): 1174-1180.
- 14 Piotr Piatrou, Michael Roggemann. Beaconless stochastic parallel gradient descent laser beam control; numerical experiments[J]. Appl Opt, 2007, 46(27): 6831-6842.
- 15 Yang Huizhen, Chen Bo, Li Xinyang, *et al.*. Experimental demonstration of stochastic parallel gradient descent control algorithm for adaptive optics system[J]. Acta Optica Sinica, 2008, 28(2): 205-210. 杨慧珍, 陈波, 李新阳, 等. 自适应光学系统随机并行梯度下降控制算法实验研究[J]. 光学学报, 2008, 28(2): 205-210.

栏目编辑: 王晓瑛