

光纤陀螺振动和变温条件下的 DAVAR 分析

李冀辰 高凤岐 王广龙 高伟伟 朱文杰 汪 明

(军械工程学院纳米技术与微系统实验室, 河北 石家庄 050003)

摘要 为了更好地分析光纤陀螺在动态环境下的性能,提出了采用动态 Allan 方差(DAVAR)的方法全面表征光纤陀螺的动态特性。DAVAR 是一种最新提出来分析非平稳信号的方法,是 Allan 方差法的扩展和完善。针对高精度光纤陀螺进行分析,分别在振动和变温条件下获得实测数据,采用 DAVAR 计算每个样本的 Allan 方差,并求得五个噪声系数的二维表示,用来细化和辨识信号动态特征。实验结果表明,DAVAR 法可以量化地分析光纤陀螺输出信号中各项噪声系数在动态环境下的变化情况,准确地反映陀螺的动态特性。采用 DAVAR 分析光纤陀螺信号,可为之后的噪声滤除提供理论支撑和实验依据。

关键词 测量;动态 Allan 方差;光纤陀螺;振动;温度

中图分类号 TP253 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201340.0908004

Analysis of Dynamic Allan Variance for Fiber Optic Gyro under Vibration and Variable Temperature Conditions

Li Jichen Gao Fengqi Wang Guanglong Gao Weiwei Zhu Wenjie Wang Ming

(*Institute of Nanotechnology and Microsystems, Mechanical Engineering College, Shijiazhuang, Hebei 050003, China*)

Abstract Allan variance method is an effective tool for the analysis of the fiber optic gyro (FOG) static noise, but it only applies to stationary signals and can't reflect the dynamic characteristics of FOG. In order to comprehensively study on FOG random error, dynamic Allan variance (DAVAR) is used to analyse the high precision FOG. The mathematical foundations of the DAVAR are presented and discussed, and the measured data under vibration and variable temperature conditions are obtained respectively, and the noise of which is calculated through DAVAR, its effectiveness is shown by performing extensive numerical analyses on simulated and experimental data. Experimental results show that the DAVAR analysis method can not only determine the proportion of the various noise factors, but also identify and refine the FOG noise in mutation environment, and the Allan variances are visually reflected in a 3D graph. The results prove the validity and the effectiveness of the proposed new tool.

Key words measurement; dynamic Allan variance; fiber optic gyro; vibration; temperature

OCIS codes 060.2370; 060.2800; 120.7280; 120.6780

1 引 言

稳定跟踪平台能够隔离载体(飞机、导弹、舰船、战车)扰动,不断测量平台姿态变化,精确保持动态姿态基准,广泛应用于现代武器系统中。陀螺是稳定平台中的重要环节,在测量过程中陀螺噪声影响系统稳定精度,同时限制系统的频带宽度,影响系统快速性。光纤陀螺(FOG)具有精度高、耐冲击能力强、抗震性强和测量范围大等优点,常用于稳定平台

中,但是光纤陀螺存在较大的随机误差,如何辨识并滤除光纤陀螺输出信息中的随机误差,是提高系统精度的关键问题^[1-3]。

Allan 方差(DAVAR)法是测量和评价光纤陀螺各类误差和噪声特性的一种重要手段,但其只能分析平稳信号^[4-6]。实际的误差信号,即使在极短时间内,也表现出不稳定性,况且在长时间内,被测信号易受温湿度、振动干扰、突然故障等因素影

收稿日期: 2013-03-28; 收到修改稿日期: 2013-05-03

作者简介: 李冀辰(1988—),男,硕士研究生,主要从事光纤陀螺惯性导航系统方面的研究。E-mail: hitbyfeeling@126.com

导师简介: 高凤岐(1970—),男,副教授,硕士生导师,主要从事测试性分析和故障诊断等方面的研究。

E-mail: 846414097@qq.com

响^[7-9],因此 Allan 方差法有很大局限性。为了评价光纤陀螺动态特性,采用动态 DAVAR 跟踪和描述光纤陀螺噪声。DAVAR 是由 Galleani 等^[10-12]在 2003 年提出的一种全新的稳定性测试方法,DAVAR 是 Allan 方差法的扩展和完善,本质是分别计算信号在不同时段内的 Allan 方差,并将 Allan 方差的集合画在一张三维(3D)图中。文献[13]系统地介绍了 DAVAR 原理,分析了原子钟实测数据,和经典 Allan 方差法相比可以更直观地跟踪和描述信号随时间变化的稳定性和确定各种随机漂移的系数。文献[14]将 DAVAR 用于高精度激光陀螺实测数据的分析,结果表明 DAVAR 可以准确地反映动态误差里的突变,清晰地辨识隐藏在动态误差里的信息。

本文系统分析了 DAVAR 算法原理,并用该算法对光纤陀螺在振动和变温条件下的输出信号进行处理,选取适当的窗函数,细化了在整个时间域内 Allan 方差的分析,详细表征和对比了陀螺动态特性,证明了 DAVAR 对于非平稳信号处理的有效性。

2 理论分析

光纤陀螺的随机误差因素很多,根据 Allan 方差能有效分离的随机误差参数包括量化噪声 Q 、角度随机游走 N 、偏置稳定性 B 、角速率随机游走 K 及漂移角速率斜坡 R 。假设各种误差源统计独立,那么 Allan 方差可以表示为一种或几种误差源方差的平方和。 $\sigma_x^2(\tau)$ 表示为^[15]

$$\sigma_x^2(\tau) = \sigma_Q^2(\tau) + \sigma_N^2(\tau) + \sigma_B^2(\tau) + \sigma_K^2(\tau) + \sigma_R^2(\tau) = \frac{3Q^2}{\tau^2} + \frac{B^2}{\tau} + \frac{2\ln 2}{\pi}(\delta\theta)^2 + \frac{K^2\tau}{3} + \frac{R^2\tau^2}{2}. \quad (1)$$

Allan 方差的模型可以表示为

$$\sigma_x^2(\tau) = \sum_{n=-2}^2 A_n \tau^n. \quad (2)$$

实测的 Allan 方差 $\sigma_x^2(\tau)$ 单位为 $(^\circ)/h$, τ 的单位为 s , 通过曲线拟合,可以求得各项噪声系数的参数估计值,式中

$$Q = \frac{10^6 \pi \sqrt{A_{-2}}}{180 \times 3600 \times \sqrt{3}}, \quad N = \frac{\sqrt{A_{-1}}}{60},$$

$$B = \frac{\sqrt{A_0}}{0.6643}, \quad K = 60 \sqrt{3A_1},$$

$$R = 3600 \sqrt{2A_2}, \quad (3)$$

其中 Q, N, B, K, R 的单位分别为 μrad 、 $(^\circ)/\sqrt{h}$ 、 $(^\circ)/h$ 、 $(^\circ)/h^{3/2}$ 、 $(^\circ)/h^2$ 。

Allan 方差 $\sigma_x^2(\tau)$ 是在整个时间域内给定观察间隔 τ , 针对被测量稳定性的一种二维表示法。DAVAR 求得的 $\sigma_x^2(t, \tau)$ 是 Allan 方差的扩展, 当给定时间 t 和观察间隔 τ , 反复计算 Allan 方差, 把获得的全体 Allan 方差的集合画在一张三维图上, 这样就能看出信号噪声的统计特性随时间的变化趋势。

求取 DAVAR 的具体步骤如下^[16]:

- 1) 固定一个分析时间点 $t = t_1$ 。
- 2) 用中心点在 t_1 长度为 W 的窗函数截断随机信号 $x(t)$ 。
- 3) 计算 Allan 方差 $\sigma_x^2(t_1, \tau)$ 。
- 4) 选择另一个分析时间点, 比如 $t = t_2$ (选择的时间点 t_2 应使截断数据与前一时间点 t_1 的截断数据交叠), 重复步骤 2)。

得到 Allan 方差的集合 $\sigma_x^2(t_1, \tau), \dots, \sigma_x^2(t_m, \tau)$, 对应于不同的分析时间点 t_k 和不同的观测间隔 τ , 表征了随机信号 $x(t)$ 实时测量的稳定性^[17-19]。设 $x(t)$ 为光纤陀螺的输出信号, 采用窗口长度为 W 的矩形窗对信号在时间轴上进行截断, t' 为窗口中心, 满足

$$t - W/2 \leq t' \leq t + W/2, \quad (4)$$

那么得到的截断信号

$$x_w(t, t') = x(t')P_W(t - t'), \quad (5)$$

将截断信号同 Allan 窗 $h_\tau(t')$ 做卷积得到增量过程 $\Delta(t, t', \tau)$:

$$\Delta(t, t', \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_\tau(t' - t'')x_w(t, t'')dt'', \quad (6)$$

式中 $t - (W/2 - \tau) \leq t' \leq t + (W/2 - \tau)$, $0 < \tau \leq \tau_{\max}$ 。由于窗函数的引入, 必然引起频谱泄露, 造成分析结果精度下降, 可信度降低, τ_{\max} 是数据在窗宽为 W 的窗函数下 Allan 方差可被估计的最大观察间隔, 可以选 $\tau_{\max} = W/3$ 。那么定义 DAVAR 为

$$\sigma_x^2(t, \tau) = \frac{1}{2}E[\langle \Delta^2(t, t', \tau) \rangle], \quad (7)$$

式中 $E[\cdot]$ 指取期望值。

DAVAR 算法对于样本数据结构的处理过程如图 1 所示。

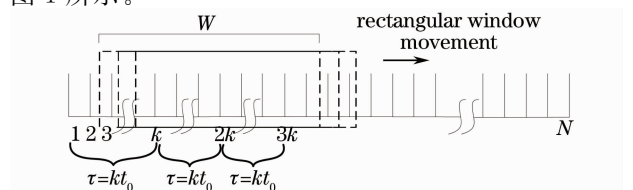


图 1 DAVAR 样本数据结构

Fig. 1 DAVAR sample data structure

3 实验与结果

3.1 振动条件下 DAVAR 对光纤陀螺的分析

将系统放在振动实验台上,振动方向为台体 X 方向、 Y 方向,按图 2 振动谱改变振动强度,以一定的幅度和频率做振动运动,对稳定平台系统中轴指向西的光纤陀螺输出信号进行采集,采样周期为 100 ms,采集时间为 6010.2 s。光纤陀螺的输入角速度根据系统实际的采样时间间隔角速度曲线进行离散化获得,其输出信号可通过数据接收软件获得。图 2 为振动实验台的振动功率谱密度,得到光纤陀螺实测随机误差信号如图 3 所示。

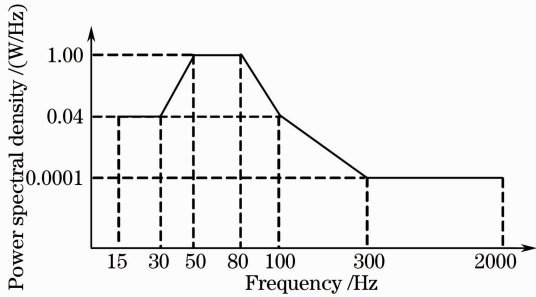


图 2 振动功率谱密度

Fig. 2 Vibration power spectral density

从图 3 中可以看出,由于受到振动实验台的影响,光纤陀螺的输出信号误差响应的变化范围很大,随着振动强度的增加,光纤陀螺输出噪声越大,受到的干扰越严重,稳定性越差。采用 Allan 方差对获得的数据进行分析,结果如图 4 所示。

表 1 光纤陀螺噪声系数对比

Table 1 Comparison of FOG noise factor

Random error terms	$Q / \mu\text{rad}$	$N / [(\text{°})/\sqrt{\text{h}}]$	$B / [(\text{°})/\text{h}]$	$K / [(\text{°})/\text{h}^{3/2}]$	$R / [(\text{°})/\text{h}^2]$
Static state	5.49020943	0.01657046	0.13814101	0.31584771	0.24861667
Vibration	26.64958412	0.06608111	0.60139612	12.82382525	11.67531768

从对比的结果上来看,振动条件下量化噪声 Q 、角速率随机游走系数 K 与漂移角速率斜坡系数 R 的计算值相比其他系数变化较大。然而在振动条件下用传统的 Allan 分析只能求得一组噪声系数,光纤陀螺的各种噪声却不是一个恒值,它们是随时间变化的,在整个观测过程中振动情况相差很大,传统分析方法并不能反映整个时间域内的系数值,可信度低,无法辨识出环境的突变信息,隐藏了非平稳信号的部分信息。

采用 DAVAR 分析噪声系数可以得到噪声量值的二维表示,通过噪声与观测长度的关系,得到各种噪声的量值随时间的变化规律,其中 DAVAR 分

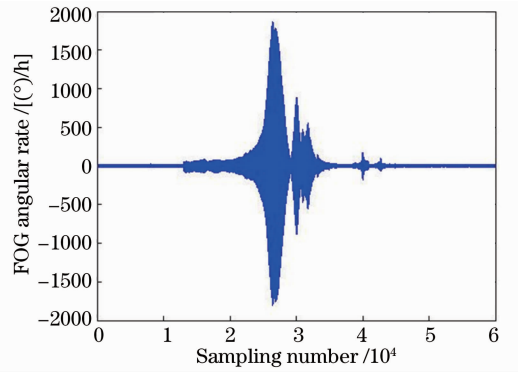


图 3 振动条件下光纤陀螺实测随机误差信号

Fig. 3 FOG random error signal under vibration condition

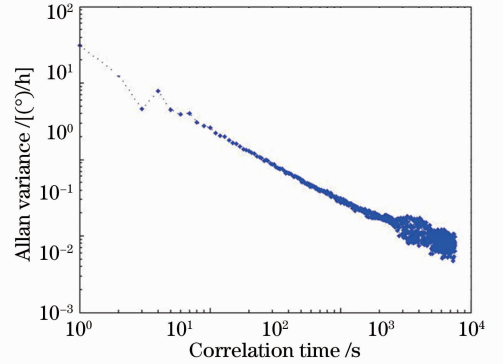


图 4 Allan 方差分析结果

Fig. 4 Allan variance analysis results

对图 4 中曲线进行最小二乘拟合,求出曲线的各个斜率的系数,即得到各项噪声系统,将振动情况下求得的噪声系数和陀螺静态条件下的噪声进行对比,如表 1 所示。

析结果如图 5 所示,进一步计算得到五个噪声项系数具体数值变化曲线如图 6 所示。

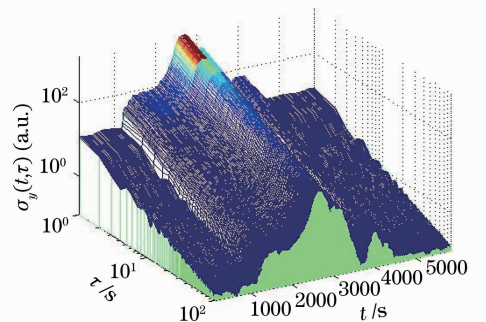


图 5 振动条件下 DAVAR 分析图

Fig. 5 DAVAR analysis under vibration condition

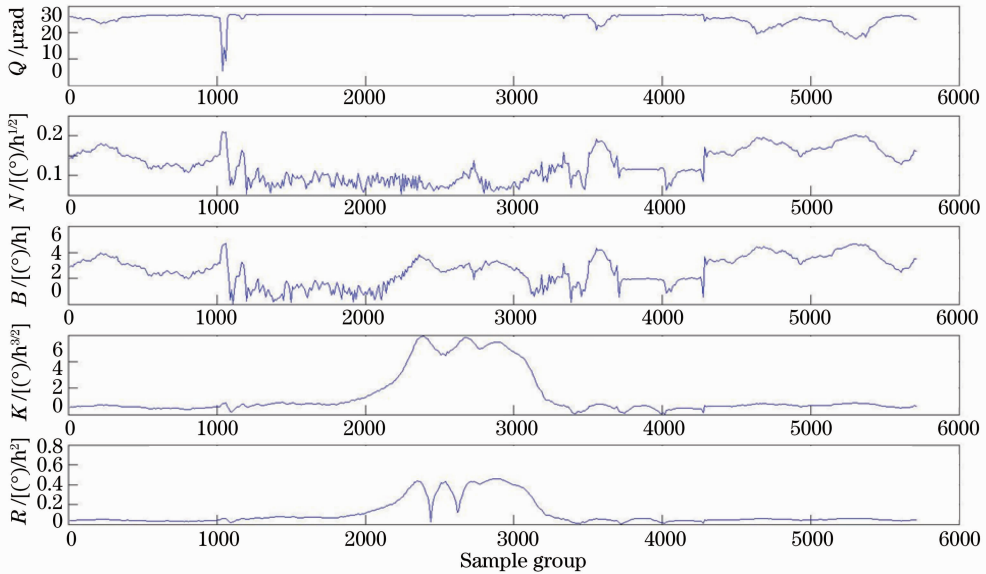


图 6 振动时各噪声系数值变化曲线

Fig. 6 Curves of noise factor under vibration condition

图 6 中可以看到各噪声系数并不是恒定值,而是起伏变化的,并且五个噪声项随外界条件发生的改变是不同的。量化噪声 Q 在整个过程中都比较平稳,变化不是太大,只是在第 1000 个样本组附近发生了突变;角度随机游走 N 和偏置稳定性 B 在振

动发生时候会有频繁的变化;角速率随机游走 K 及漂移角速率斜坡 R 只是在振动强度大的时候会变大,而在其他情况下都维持一个很小的平稳值。具体各项噪声系数的最大和最小值如表 2 所示。

表 2 振动时各项噪声系数极值

Table 2 Extremum of FOG noise factor under vibration condition

Random error terms	$Q / \mu\text{rad}$	$N / [(\text{°})/\sqrt{\text{h}}]$	$B / [(\text{°})/\text{h}]$	$K / [(\text{°})/\text{h}^{3/2}]$	$R / [(\text{°})/\text{h}^2]$
Max	26.84779012	0.15945861	4.68432158	5.89960429	0.45765489
Min	5.53810285	0.00270563	0.02249640	0.04776428	0.00521376

从表 2 中可以看出各项噪声系统极值, K 和 R 并未出现表 1 中那种非常大的值,结合图 5 看到用 DAVAR 分析振动条件下陀螺的输出信号,可以直观地反映出在时间轴上噪声的变化信息,得到量化的结果,体现了随机误差随着振动实验台振动而发生的变化趋势,准确地反映出动态误差中各噪声项的变化特征,更加准确地反映陀螺的动态特性。

3.2 变温条件下 DAVAR 对光纤陀螺的分析

光纤陀螺对温度和温度梯度特别敏感,温度是影响光纤陀螺测试精度的重要因素,为了观察光纤陀螺随机误差随温度的变化,进行了恒定变化率的全温测试实验,包括全温升温定点稳定性测试和降温定点稳定性测试两部分。实验时将惯性测量组合放置于温箱内,任意固定好一个位置。升温范围是

$-40\text{ °C} \sim +60\text{ °C}$,温变速率为 $1\text{ °C}/\text{min}$,并且在 $-40\text{ °C} \sim +60\text{ °C}$ 两个温度点各持续 0.5 h ,对系统中各向陀螺输出信号进行采集,采样周期为 100 ms 。图 7 是升温时各向陀螺实测的随机误差信号,图 7 为 DAVAR 对各向陀螺信号的分析。

升温实验中可以看出图 8 中的 DAVAR 分析图与图 7 中各向陀螺输出信号的大小呈对应的关系,随机误差信号大的时候相应的 $\sigma_x^2(t, \tau)$ 也大。同时各向陀螺在低温和高温阶段的 Allan 方差比常温阶段的大,低温阶段这种现象更加明显,说明在低温条件下,该光纤陀螺的输出信号中的各项噪声比较大。三个陀螺进行比较,北向和西向陀螺 DAVAR 分析图相似,而天向陀螺的输出信号误差相比偏小,各噪声变化也相对平稳。

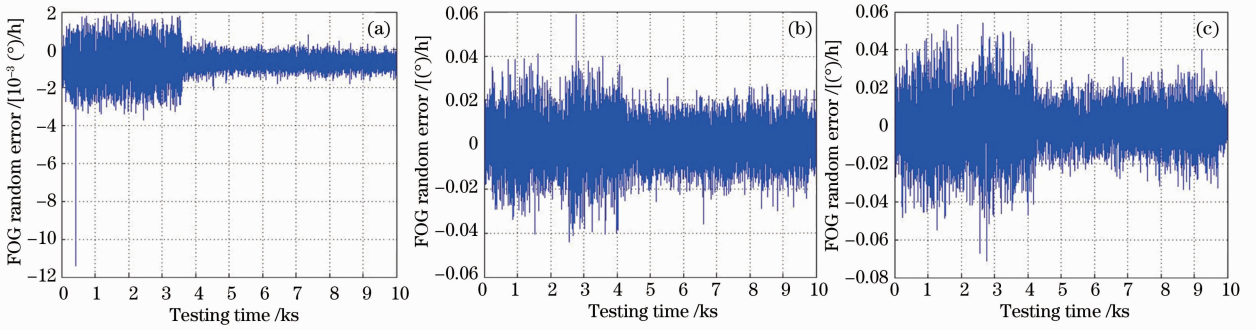


图 7 升温时光纤陀螺实测随机误差信号。(a) 天向；(b) 北向；(c) 西向

Fig. 7 FOG random error signal under warming condition. (a) Sky; (b) north; (c) west

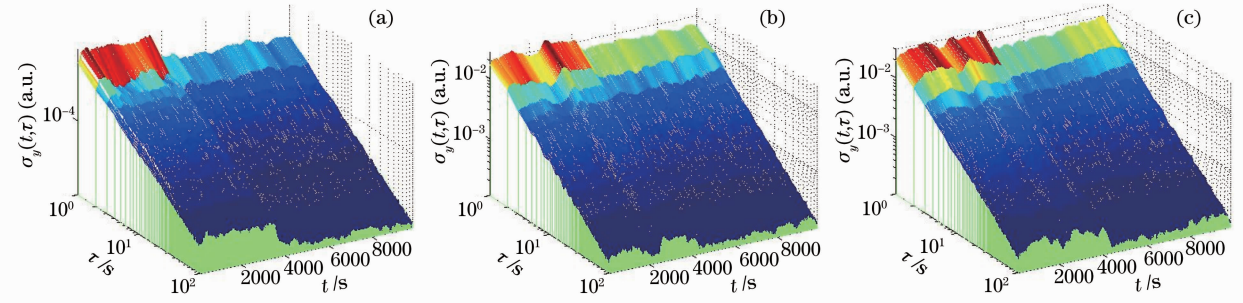


图 8 升温时各向陀螺 DAVAR 分析图。(a) 天向；(b) 北向；(c) 西向

Fig. 8 DAVAR analysis under warming condition. (a) Sky; (b) north; (c) west

降温范围是 $+60\text{ }^{\circ}\text{C} \sim -40\text{ }^{\circ}\text{C}$ ，温变速率和实验过程升温时一致。降温过程得到天北西各向陀螺

的随机误差信号如图 9 所示，对应的 DAVAR 分析结果如图 10 所示。

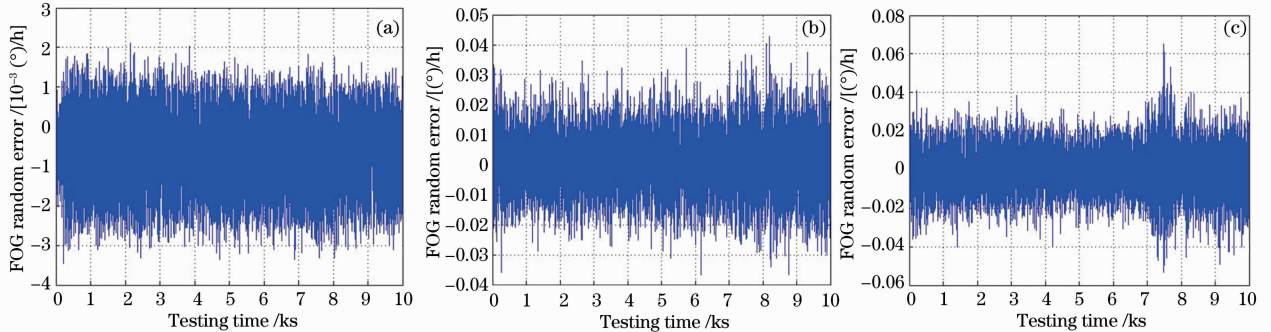


图 9 降温时各向陀螺随机误差信号。(a) 天向；(b) 北向；(c) 西向

Fig. 9 FOG random error signal under cooling condition. (a) Sky; (b) north; (c) west

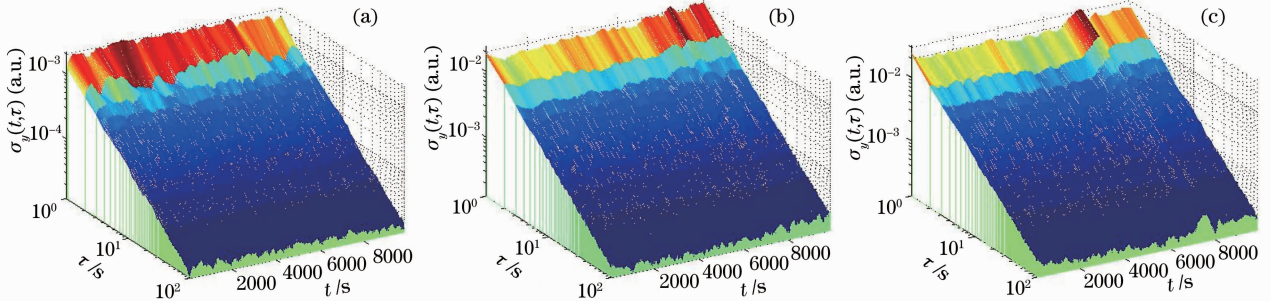


图 10 降温时各向陀螺 DAVAR 分析图。(a) 天向；(b) 北向；(c) 西向

Fig. 10 DAVAR analysis under cooling condition. (a) Sky; (b) north; (c) west

降温实验中,各向陀螺在低温阶段的 Allan 方差比较大,而在其他阶段相对比较平稳,同样说明在低温条件下,该光纤陀螺的输出信号中的各项噪声偏大。三个陀螺进行比较,北向和西向陀螺在低温段信号的噪声比较大,尤其西向陀螺稳定性最差,而

天向陀螺的噪声在整个降温过程中都很平稳,变化不大。

由于研究方法一样,以升温实验时西向陀螺 DAVAR 计算的值为参考,计算各项噪声的具体系数值,得到结果如图 11 所示。

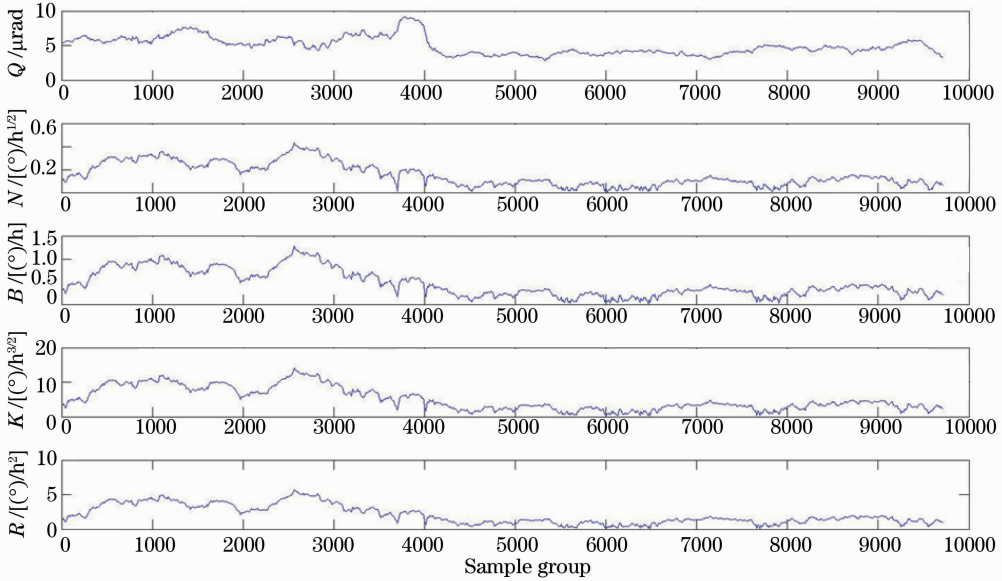


图 11 升温时西向陀螺各噪声系数值

Fig. 11 West gyro noise coefficient under warming condition

分析图 11 中可以得到各噪声系数在低温段的值比较大,其中 N 、 B 、 K 及 R 的变化趋势基本一致,随着温度的升高,噪声系数相应变小,但是温度进一步增高的情况下,各项噪声系数相应会增大。而量化噪声和其他噪声系数变化趋势不同,但是在低温阶段其值仍然偏高。各系数进行比较,可知稳定平台系统光纤陀螺输出信号中,角速率随机游走系数 K 与漂移角速率斜坡系数 R 的计算值相比其他系数较大,光纤陀螺输出信号中,主要噪声为角速率随机游走与漂移角速率斜坡。因此,在之后的信号处理与误差补偿中,可主要考虑这两种随机误差的影响。通过针对性滤波处理,可进一步提高稳平台系统的精度。

4 结 论

1) 研究了 DAVAR 法的理论原理,在振动条件下对稳定平台系统中光纤陀螺输出信号进行采集。实验结果表明 DAVAR 可以分析出 Allan 方差无法辨识的突变信号,求出动态误差中各噪声项的变化特征,更加准确地反映陀螺的动态特性。

2) 在变温条件下,对稳定平台系统中光纤陀螺天向、北向和西向的输出信号分别进行采集,通过 DAVAR 分析,可以直观地看出各向陀螺在升温和

降温情况下随机误差的变化情况,为分析各向陀螺的动态特性提供定量依据。

3) 利用 DAVAR 对光纤陀螺输出数据进行分析,不仅有效分离了陀螺 5 个噪声源系数,并可以根据方差分析信号动态特性。实验表明 DAVAR 可以有效分析非平稳信号,辨识和细化突变环境下的光纤陀螺噪声,全面表征光纤陀螺的随机误差,为进一步的滤波除噪提供实验依据。

参 考 文 献

- Li Jialei, Xu Hualong, He Jing. Modeling of static temperature drift for fiber optic gyroscope based on wavelet network [J]. Chinese J Lasers, 2010, 37(12): 2980-2985.
李家奎, 许化龙, 何 婧. 光纤陀螺静态温度漂移的小波网络建模[J]. 中国激光, 2010, 37(12): 2980-2985.
- Tang Xiaqing, Cheng Xuwei, Guo Libin, et al.. Error modeling and compensating of fiber optic gyro based on wavelet analysis and grey neural network [J]. Chinese J Lasers, 2012, 39(10): 1008003.
汤霞清, 程旭维, 郭理斌, 等. 小波分析和灰色神经网络融合的光纤陀螺误差建模与补偿 [J]. 中国激光, 2012, 39(10): 1008003.
- Rao Guyin, Yuan Haolun, Li Guangzhu. Effect of digital filtering on RLG random error analysis [J]. Journal of Optoelectronics · Laser, 2006, 17(11): 1346-1348.
饶谷音, 袁保伦, 李广柱. 数字滤波对激光陀螺随机误差分析的影响 [J]. 光电子 · 激光, 2006, 17(11): 1346-1348.
- Ni Jingjing, Wang Junpu, Wei Yan, et al.. Allan variance

- analyze of the three-axis integrative FOG [J]. *Optical Instruments*, 2007, 29(1): 57-61.
- 倪静静, 王俊璞, 卫 炎, 等. 三轴一体化光纤陀螺的 Allan 方差分析[J]. *光学仪器*, 2007, 29(1): 57-61.
- 5 L Galleani, P Tavella. Fast computation of the dynamic Allan variance[C]. *IEEE FCS-EFTF*, 2009. 685-687.
- 6 L Galleani, P Tavella. Tracking nonstationarities in clock noises using the dynamic Allan variance[C]. *Joint FCS-PTTI Meeting*, 2005. 392-396.
- 7 Liu Jieyu, Yu Zhiyong, Ma Xuwen. Modeling and compensation of static temperature error synthetically for fiber optic gyroscope [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(8): 0823005.
- 刘洁瑜, 余志勇, 马学文. 光纤陀螺静态温度综合误差建模及补偿[J]. *光学学报*, 2012, 32(8): 0823005.
- 8 Zha Feng, Gao Jingdong, Xu Jiangning, *et al.*. Overview on strapdown inertial system consisted by optical gyros[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2011, 48(7): 072301.
- 查 峰, 高敬东, 许江宁. 光学陀螺捷联惯性系统的发展与展望 [J]. *激光与光电子学进展*, 2011, 48(7): 072301.
- 9 Wang Rudong, Tian Wei, Wang Ping. Analysis of vibration effect to surface figure measurement [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(11): 1112001.
- 王汝冬, 田 伟, 王 平. 振动对面形测量误差的影响分析[J]. *光学学报*, 2012, 32(11): 1112001.
- 10 L Galleani, P Tavella. The dynamic Allan variance III: confidence and detection surfaces [J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2011, 58(8): 1550-1558.
- 11 Fan Zhenfang, Luo Hui, Lu Guangfeng. A new noise injection effectiveness evaluation method for ring laser gyro[J]. *Chinese J Lasers*, 2012, 39(2): 0202006.
- 樊振方, 罗 晖, 卢广锋. 一种新的激光陀螺抖动加噪效果评估方法[J]. *中国激光*, 2012, 39(2): 0202006.
- 12 Zhang Yani. Study on polarization error in depolarized fiber optical gyroscope[J]. *Journal of Optoelectronics · Laser*, 2007, 18(7): 792-795.
- 张亚妮. 消偏型光纤陀螺偏振误差研究[J]. *光电子·激光*, 2007, 18(7): 792-795.
- 13 L Galleani, P Tavella. The dynamic Allan variance[J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2009, 56(3): 450-464.
- 14 Wei Guo, Long Xingwu. Research on stochastic errors of dithered ring laser gyroscope based on dynamic Allan variance [J]. *Chinese J Lasers*, 2010, 37(12): 2976-2979.
- 魏 国, 龙兴武. 基于动态 Allan 方差的机抖激光陀螺随机误差研究[J]. *中国激光*, 2010, 37(12): 2976-2979.
- 15 Zhu Huazheng, Zhou Xiaoyao. Processing of gyro drift for optoelectronic stabilization platform[J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2009, 17(2): 225-230.
- 朱华征, 周晓尧. 光电稳定平台中陀螺随机漂移的处理方法[J]. *中国惯性技术学报*, 2009, 17(2): 225-230.
- 16 Li Xuyou, Zhang Na. Analysis of dynamic characteristics of a fiber optic gyroscope based on dynamic Allan variance[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2011, 32(2): 183-187.
- 李绪友, 张 娜. 基于动态 Allan 方差的光纤陀螺动态特性分析 [J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2011, 32(2): 183-187.
- 17 Li Xuyou, Zhang Na, Gao Wei, *et al.*. Application of wavelet analysis in testing of dynamic characteristics of fiber optic gyroscope[C]. *Changchun: Symposium Gyro Technology 2009*, 2009.
- 18 N E Sheimy, H Hou, X Niu, *et al.*. Analysis and modeling of inertial sensors using Allan variance[J]. *IEEE Trans Instrum Meas*, 2008, 57(1): 140-149.
- 19 L Galleani. The dynamic Allan variance II: a fast computational algorithm[J]. *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2010, 57(1): 182-188.