

任意厚度随机相位屏激光大气传输特性仿真模型

王锐^{1,2} 王挺峰^{1,2} 孙涛^{1,2}

(¹ 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033)
(² 激光与物质相互作用国家重点实验室, 吉林 长春 130033)

摘要 为了分析高斯光束的大气传输特性,根据随机相位屏数值仿真方法,利用 Rytov 弱起伏理论,在薄相位屏模型的基础上,详细分析了各个统计量。建立了基于 Kolmogorov 谱条件下的高斯光束经任意厚度相位屏传输统计量的数学模型,并且给出了易于处理的解析表达式。同时对闪烁指数、Rytov 方差等统计量进行了分析,结果表明任意厚度相位屏模型比薄相位屏适用范围更广,且对于统计量的描述更为准确。

关键词 大气光学; 随机相位屏; 闪烁指数; Rytov 理论; 高斯光束

中图分类号 TN929.12 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201340.0813001

Simulation Model of Laser Atmospheric Transmission Characteristics Using Arbitrary Thickness Random Phase Screen

Wang Rui^{1,2} Wang Tingfeng^{1,2} Sun Tao^{1,2}

(¹ Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun, Jilin 130033, China)
(² State Key Laboratory of Laser Interaction with Matter, Changchun, Jilin 130033, China)

Abstract In order to analysis the Gaussian beam transmission characteristics, according to the numerical simulation method of random phase screen, the Rytov weak turbulence theory is used to analyze each statistical quantity. The numerical model of Gaussian beam propagation through an arbitrary thickness phase screen is established, based on the Kolmogorov spectrum, and the analytic expression which is easy to be treated is also given. Meantime, the scintillation index and Rytov variance are analyzed. The results indicate that the application range of arbitrary thickness phase screen model is wider than the thin phase screen, and the statistic describing is more accurate.

Key words atmospheric; random phase screen; scintillation index; Rytov theory; Gaussian beam

OCIS codes 010.1290; 010.1300; 010.1330; 010.1080

1 引言

从世界上第一台激光器问世以来,激光因其良好的相干性、方向性及能量集中性等特点在各个领域得到了广泛应用,发展突飞猛进,使光学以及整个现代科学的面貌焕然一新。随着激光应用技术的不断推进,人们逐渐意识到大气湍流对于激光传输特性影响的重要性。人类活动和太阳辐照变化等因素使大气微小温度随机变化,导致大气风速随机变化,从而形成大气的湍流运动。激光在大气中远距离传输时,因受到大气湍流效应的影响而产生一系列现象,如大气闪烁、相位面的扰动、到达角的起伏、光束整体漂移、光束湍流扩展等。

为了在实验室内研究高斯光束在随机介质中的传输特性,对室内仿真自适应光学及激光通信等应用起到理论指导作用,通常将随机相位屏置于光源和接收器之间模拟湍流随机介质,进而研究高斯光束在随机相位屏中的传输统计特性。Booker 等^[1]给出了平面波经过和随机湍流介质具有相同折射率波动功率谱的随机相位屏后的近似数学表达。Andrews 等^[2]应用交叉结合传输理论,对高斯光束在薄随机相位屏中的传输统计特性进行了详细分析。Mantravadi 等^[3]在实验室内利用相位屏模拟随机湍流介质,并且给出了随机相位屏所能实现的湍流强度和光学系统的关系。很多学者也利用数学

收稿日期: 2013-01-23; 收到修改稿日期: 2013-04-01

基金项目: 吉林省重大科技专项(20126015)

作者简介: 王锐(1982—),男,博士,副研究员,主要从事激光探测方面的研究。E-mail: darui9999@yahoo.com.cn

方法产生随机相位屏,通过数值仿真研究了湍流介质中光束传输问题^[4]。

本文将对高斯光束经任意厚度随机相位屏的传输统计特性进行详细分析。依据 Rytov 弱起伏湍流理论,在 Andrews 等^[5]薄相位屏模型的基础上,深入讨论任意厚度随机相位屏的各种统计量,得到能够更加准确描述高斯光束经相位屏传输的数学模型,并与薄相位屏近似下的统计量进行对比分析,给出薄相位屏近似理论的适用范围。

2 基本理论

2.1 高斯光束参数

对于自由空间传播的基模高斯光束 TEM₀₀,假设其沿 z 轴传播,入射面位于 z=0 处,入射面光束半径为 W₀,取落在振幅最大值 1/e 时径向距离为光斑半径。入射面等相位面曲率半径为 F₀,通常 F₀ = ∞ 对应准直光束,F₀ > 0 和 F₀ < 0,分别对应着会聚光束和发散光束。z = 0 处光场分布函数为

$$U_0(r,0) = A_0 \exp\left(-\frac{r}{W_0} - \frac{ikr^2}{2F_0}\right) = A_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_0 kr^2\right), \quad (1)$$

式中 r = (x² + y²)/2,代表靶光斑任意一点到光轴的距离,α₀ = 2/(kW₀²) + i/F₀,A₀ 为振幅,k 为光波数。根据傍轴近似原理,自由空间高斯基模传播至 z = L 处的光场分布函数为

$$U_0(r,L) = \frac{A_0}{p(L)} \exp\left[ikL - \frac{1}{2} \frac{\alpha_0 kr^2}{p(L)}\right], \quad (2)$$

式中传输参数 p(L) = 1 + iα₀L。

图 1 给出了高斯光束经相位屏传输的示意图。入射面和出射面固定,即传输路径 L 为定值,其中 L₁ 代表入射面到相位屏前面距离,L₂ 代表相位屏厚度,L₃ 代表相位屏后表面到出射距离。L₁ + L₂ + L₃ = L,实现对出射面光场的调制。对传输光路模

型包含 F₀ = ∞, F₀ > 0 和 F₀ < 0 三种情况进行讨论发现,束腰位置出现在光路中心位置附近。

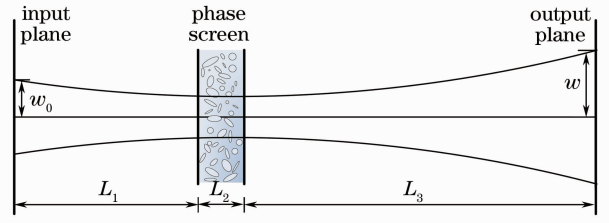


图 1 高斯光束经相位屏传输模型

Fig. 1 Propagation model of Gaussian beam through a random phase screen

经推导在接收平面 L 处光场的传输参数 p(L) 可表示为

$$\frac{1}{p(L)} = \Theta - i\Lambda = \prod_{i=1}^3 (\Theta_i - i\Lambda_i), \quad (3)$$

式中 Θ_i = 1 - L_i/F_i, Λ_i = 2L_i/(kW₀²)。

2.2 Rytov 方法

针对图 1 给出的高斯光束经过随机相位屏传输的模型,通常情况下,单片随机相位屏只能实现光强的弱起伏,所以以光波弱起伏理论模型为基础,分析高斯光束经相位屏传输的统计特性。依据经典 Rytov 方法,在弱起伏湍流条件下,光束传输距离为 L,光场分布可以表示为

$$U(r,L) = U_0(r,L) \exp[\Psi(r,L)] = U_0(r,L) \exp[\psi_1(r,L) + \psi_2(r,L) + \dots], \quad (4)$$

式中 U₀(r,L) 为(2)式给出的自由空间传输的高斯光束,Ψ(r,L) 为传输路径上由随机介质引起的复相位扰动总和,ψ₁(r,L) 和 ψ₂(r,L) 为一阶和二阶复相位微扰。一阶和二阶复相位微扰对光场的长时间统计特性起到了决定性作用,如四阶矩闪烁指数,所以这里只考虑一阶和二阶复相位微扰。依据 Rytov 理论,对各向同性湍流介质,Andrews 和 Miller 证明,光波在弱起伏条件下的所有统计特性都可以通过(5)~(7)式 3 个二阶矩的线性组合得到

$$E_1(0,0) = \langle \psi_2(\mathbf{r},L) + \frac{1}{2}\psi_1^2(\mathbf{r},L) \rangle = -2\pi^2 k^2 \int_0^L dz \int_0^\infty d\kappa \Phi_n(\kappa,z) d\kappa, \quad (5)$$

$$E_2(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \langle \psi_1(\mathbf{r}_1,L)\psi_1^*(\mathbf{r}_2,L) \rangle = 4\pi^2 k^2 \int_0^L dz \int_0^\infty d\kappa \kappa \Phi_n(\kappa,z) \exp\left[-\frac{\Delta L \kappa^2 (1-Z/L)^2}{k}\right] \times J_0\left\{\kappa \left[1 - \bar{\Theta}\left(1 - \frac{Z}{L}\right)\right] \mathbf{p} - 2i\Lambda\left(1 - \frac{Z}{L}\right) \mathbf{r}\right\}, \quad (6)$$

$$E_3(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \langle \psi_1(\mathbf{r}_1,L)\psi_1^*(\mathbf{r}_2,L) \rangle = -4\pi^2 k^2 \int_0^L dz \int_0^\infty d\kappa \kappa \Phi_n(\kappa,z) \exp\left\{-\frac{i\kappa^2 \gamma L}{k} \left(1 - \frac{Z}{L}\right) \left[1 - \bar{\Theta}\left(1 - \frac{Z}{L}\right)\right]\right\} \times$$

$$\exp\left[-\frac{\Delta L \kappa^2 (1 - Z/L)^2}{k}\right] J_0\left\{\kappa \rho \left[1 - (\bar{\Theta} + i\Lambda) \left(1 - \frac{Z}{L}\right)\right]\right\}, \quad (7)$$

式中 γ 代表出射面振幅与传输路径上 z 处的振幅比值, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, $\mathbf{p} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $r = |\mathbf{r}|$, $\rho = |\mathbf{p}|$, κ 表示空间波数, $\bar{\Theta} = 1 - \Theta$, $J_0(x)$ 为第一类零阶贝塞尔函数, $\Phi_n(\kappa, z)$ 为折射率起伏的功率谱密度, “ $\langle \rangle$ ”表示集平均, “ $*$ ”表示复共轭。

3 任意厚度相位屏模型

在此基础上,推导任意厚度相位屏模型,高斯光束经厚度为 L_2 的相位屏传输模型如图 1 所示,随机介质只分布在 $L_1 \leq z \leq L_1 + L_2$ 的范围内,所以对原

积分式进行简化,令变换积分变量及积分区间为

$$1 - \frac{z}{L} = \xi, 0 \leq z \leq L, \frac{L_3}{L} \leq \xi \leq \frac{(L_2 + L_3)}{L}. \quad (8)$$

取 $\Phi_n(\kappa, z)$ 为 Kolmogorov 功率谱,且假设功率谱与光束传输路径无关,即 $\Phi_n(\kappa, z) = \Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3}$, C_n^2 为大气折射率结构常数,由于随机介质只存在于 $L_1 \leq z \leq L_1 + L_2$ 的范围内,所以有

$$\Phi_n(\kappa) = \begin{cases} 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3}, & L_1 \leq z \leq L_1 + L_2 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (9)$$

式中 \hat{C}_n^2 为随机相位屏折射率结构系数,假设其为常数,“ \sim ”代表相位屏统计量,与大气统计量 C_n^2 进行区别^[6]。根据以上假设和参数,(6)~(8)式可简化为

$$\hat{E}_1(0, 0) = \langle \psi_2(\mathbf{r}, L) + \frac{1}{2} \psi_1^2(\mathbf{r}, L) \rangle = -2\pi^2 k^2 L \int_{L_3/L}^{(L_2+L_3)/L} d\xi \int_0^\infty \kappa \Phi_n(\kappa) d\kappa, \quad (10)$$

$$\hat{E}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \psi_1(\mathbf{r}_1, L) \psi_1^*(\mathbf{r}_2, L) \rangle = 4\pi^2 k^2 L \int_{L_3/L}^{(L_2+L_3)/L} d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa \Phi_n(\kappa) \exp\left(-\frac{\Delta L \kappa^2 \xi^2}{k}\right) \times J_0[\kappa |(1 - \bar{\Theta}\xi) \mathbf{p} - 2i\Lambda \xi \mathbf{r}|], \quad (11)$$

$$\hat{E}_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \psi_1(\mathbf{r}_1, L) \psi_1^*(\mathbf{r}_2, L) \rangle = -4\pi^2 k^2 L \int_{L_3/L}^{(L_2+L_3)/L} d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa \Phi_n(\kappa) \exp\left[-\frac{i\kappa^2 \gamma L}{k} \xi (1 - \bar{\Theta}\xi)\right] \times \exp\left(-\frac{\Delta L \kappa^2 \xi^2}{k}\right) J_0\{\kappa \rho [1 - (\bar{\Theta} + i\Lambda)\xi]\}. \quad (12)$$

(10)~(12)式对于准确描述光波在任意厚度相位屏中的传输统计特性十分有用,如互相干函数(MCF)和四阶矩 MCF 等,都可以通过(10)~(12)式的线性组合得到。

4 统计量分析

利用所推导出的任意厚度相位屏模型,对高斯光束经相位屏传输后的各统计量变化情况进行了详细分析,主要针对以下三种统计量进行讨论,包括相位屏 Rytov 方差、光强均值及闪烁指数等。

4.1 相位屏 Rytov 方差

为分析方便,引入平面波入射相位屏形成的 Rytov 方差。在大气中对于分布在整个传输路径 L_A 上的随机介质,Rytov 方差^[7]定义为

$$\sigma_R^2 = 8\pi^2 k^2 \int_0^{L_A} dz \int_0^\infty d\kappa \kappa \Phi_n(\kappa) \left\{1 - \cos\left[\frac{\kappa^2 (L_A - z)}{k}\right]\right\} = 1.23 C_n^2 k^{7/6} L_A^{11/6}. \quad (13)$$

经推导,并取得 $\kappa_0 \rightarrow 0^+$, $\kappa_m \rightarrow \infty$, $\kappa_0/\kappa_m \rightarrow 0^+$ 近似,得到平面波经任意厚度相位屏传输的 Rytov 方差

$$\sigma_R^2 \cong 1.63 \hat{C}_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \operatorname{Re}\left\{i^{5/6} \left[\left(\frac{L_2 + L_3}{L}\right)^{8/3} - \left(\frac{L_3}{L}\right)^{8/3}\right]\right\} = 0.42 \hat{C}_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \left[\left(\frac{L_2 + L_3}{L}\right)^{8/3} - \left(\frac{L_3}{L}\right)^{8/3}\right]. \quad (14)$$

式中“ \cong ”表示利用近似求解方法。如果令(13)式和(14)式相等,可以得到大气折射率结构常数和相位屏折射率结构常数的关系为

$$C_n^2 = 0.34\hat{C}_n^2 \left[\left(\frac{L_2 + L_3}{L} \right)^{8/3} - \left(\frac{L_3}{L} \right)^{8/3} \right]. \quad (15)$$

可见相位屏等效大气特性与相位屏的厚度和相位屏之后到接收系统的距离有关。但是这样的比较并不是很实际,因为利用相位屏模拟大气通常在室内进行,两种情况的传输距离 L 相等,则相位屏就失去了其等效大气的意义。通常情况下的相位屏模型如图 1 所示,光路利用(6)式对比两种情况的折射率结构常数更具意义:

$$C_n^2 L_A^{11/6} = 0.34\hat{C}_n^2 L^{11/6} \left[\left(\frac{L_2 + L_3}{L} \right)^{8/3} - \left(\frac{L_3}{L} \right)^{8/3} \right], \quad (16)$$

式中 L_A 为光波在大气中的传输距离, L 为相位屏模型中光波的传输距离。(16)式左边代表一定的湍流强度和传输距离对光波在大气中传输所引起的湍流效果,而等式右边则代表利用相位屏实现等式左边的湍流效果。

4.2 光强均值

二阶矩 MCF 在弱起伏条件下定义为

$$\Gamma_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L) = \langle U(\mathbf{r}_1, L)U^*(\mathbf{r}_2, L) \rangle = U_0(\mathbf{r}_1, L)U_0^*(\mathbf{r}_2, L)\exp[2E_1(0,0) + E_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] = \Gamma_2^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L)\exp[2E_1(0,0) + E_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)], \quad (17)$$

$\Gamma_2^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L)$ 为自由空间 MCF:

$$\Gamma_2^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L) = U_0(\mathbf{r}_1, L)U_0^*(\mathbf{r}_2, L) = \frac{W_0^2}{W} \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2} - \frac{\sigma^2}{2W^2} - i\frac{k}{F}\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right). \quad (18)$$

通常情况下并不直接计算 $2E_1(0,0) + E_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ 的值,而是通过一系列变化,简化积分过程:

$$\begin{aligned} \Gamma_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L) &= \Gamma_2^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L)\exp[2E_1(0,0) + E_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] = \\ &= \Gamma_2^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L)\exp\left[\sigma_r^2(\mathbf{r}_1, L) + \sigma_r^2(\mathbf{r}_2, L) - T - \frac{1}{2}\Delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L)\right], \end{aligned} \quad (19)$$

式中 $\sigma_r^2(\mathbf{r}_1, L)$ 代表大气传输过程中轴外 \mathbf{r}_1 处 Rytov 方差, $\sigma_r^2(\mathbf{r}_2, L)$ 代表大气传输过程中轴外 \mathbf{r}_2 处的 Rytov 方差, T 代表大气传输过程中轴上的 Rytov 方差, $\Delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L)$ 代表 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 的复相干度。对于厚度为 L_2 相位屏各变量定义如下:

$$\sigma_r^2(\mathbf{r}, L) = \frac{1}{2}[E_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - E_2(0,0)] = 2\pi^2 k^2 L \int_{L_3/L}^{(L_2+L_3)/L} d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa \Phi_n(\kappa) \exp\left(-\frac{\Delta L \kappa^2 \xi^2}{k}\right) [I_0(2\Delta r \xi \kappa) - 1], \quad (20)$$

$$\hat{T} = -2E_1(0,0) - E_2(0,0) = 4\pi^2 k^2 L \int_{L_3/L}^{(L_2+L_3)/L} d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa \Phi_n(\kappa) \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta L \xi^2 \kappa^2}{k}\right)\right], \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, L) &= E_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) + E_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) - 2E_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 4\pi^2 k^2 L \int_{L_3/L}^{(L_2+L_3)/L} d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa \Phi_n(\kappa) \exp\left(-\frac{\Delta L \kappa^2 \xi^2}{k}\right) \times \\ &\quad \{I_0(2\Delta r_1 \xi \kappa) + I_0(2\Delta r_2 \xi \kappa) - 2J_0[|(1 - \bar{\Theta}\xi)\mathbf{p} - 2i\Delta \xi \mathbf{r}| \kappa]\}, \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $I_0(x) = J_0(ix)$ 为第一类修正贝塞尔函数。

如果取观察点 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, 则利用(19)式可以计算出观察点 \mathbf{r} 的平均光强:

$$\langle I(\mathbf{r}, L) \rangle = \Gamma_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}, L) = \frac{W_0^2}{W} \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2}\right) \exp[2\sigma_r^2(\mathbf{r}, L) - \hat{T}]. \quad (23)$$

利用积分(20)式和(21)式计算高斯光束经相位屏后的平均光强。根据修正贝塞尔函数 $I_0(x)$ 的定义和 Gamma 函数 $\Gamma(x)$ 的性质:

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{(n!)^2} \int_0^\infty \exp(-st) t^{n-1} dt = \frac{\Gamma(x)}{s^x}, \text{Re}(x) > 0, \text{Re}(s) > 0, \quad (24)$$

可以求得(20)式为

$$\begin{aligned} \sigma_r^2(\mathbf{r}, L) &= 0.819\hat{C}_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \Lambda^{5/6} \left[\left(\frac{L_3 + L_2}{L} \right)^{8/3} - \left(\frac{L_3}{L} \right)^{8/3} \right] \left[1 - F_1\left(-\frac{5}{6}; 1; \frac{2r^2}{W^2}\right) \right] = \\ &= 1.93\hat{\sigma}_R^2 \Lambda^{5/6} \left[1 - F_1\left(-\frac{5}{6}; 1; \frac{2r^2}{W^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

式中 $F_1(a; c; x)$ 为超几何函数。对于(21)式,在 Kolmogorov 谱条件下积分并不收敛^[8],但是可以利用 von Kármán 谱求 Kolmogorov 谱的近似解:

$$\hat{T} \cong 1.63 \hat{C}_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \Lambda^{5/6} \left[\left(\frac{L_3 + L_2}{L} \right)^{8/3} - \left(\frac{L_3}{L} \right)^{8/3} \right] = 3.86 \hat{\sigma}_R^2 \Lambda^{5/6}. \quad (26)$$

同样“ \cong ”表示方法近似。所以可得光强均值为

$$\langle I(\mathbf{r}, L) \rangle = \frac{W_0^2}{W} \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2}\right) \exp\left[-3.86 \hat{\sigma}_R^2 \Lambda^{5/6} F_1\left(-\frac{5}{6}; 1; \frac{2r^2}{W^2}\right)\right]. \quad (27)$$

4.3 闪烁指数

对于四阶矩最重要的量就是闪烁指数 $\sigma_I^2(\mathbf{r}, L)$,即光强归一化方差,描述了接收面的光强起伏程度。当光场对数振幅方差 $\sigma_\chi^2 \ll 1$ 时,定义为

$$\sigma_I^2(\mathbf{r}, L) = \exp[4\sigma_\chi^2(\mathbf{r}, L)] - 1 \cong 4\sigma_\chi^2(\mathbf{r}, L) = 2\text{Re}[E_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}) + E_3(\mathbf{r}, \mathbf{r})]. \quad (28)$$

为了求解(28)式方便,对其进行简单的变化,将 $\sigma_I^2(\mathbf{r}, L)$ 分解为径向分量 $\sigma_{I,r}^2(\mathbf{r}, L)$ 和轴向分量 $\sigma_{I,l}^2(L)$ ^[9]:

$$\sigma_I^2(\mathbf{r}, L) = \sigma_{I,r}^2(\mathbf{r}, L) + \sigma_{I,l}^2(L) = 4\sigma_r^2(\mathbf{r}, L) + \sigma_{I,l}^2(L). \quad (29)$$

对于相位屏情况, $\sigma_r^2(\mathbf{r}, L)$ 由(25)式给出,而 $\sigma_{I,l}^2(L)$ 为

$$\sigma_{I,l}^2(L) = 8\pi^2 k^2 L \int_{L_3/L}^{(L_2+L_3)/L} d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa \Phi_n(\kappa) \exp\left(-\frac{\Delta L \xi^2 \kappa^2}{k}\right) \left\{ 1 - \cos\left[\frac{L\kappa^2}{k} \xi(1 - \bar{\Theta}\xi)\right] \right\}. \quad (30)$$

由 Gamma 函数性质^[9],得相位屏闪烁指数轴向分量^[10]:

$$\begin{aligned} \sigma_{I,l}^2(L) = & 4.74 \hat{C}_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \text{Re} \left\{ i^{5/6} \left(\frac{L_3 + L_2}{L} \right)^{11/6} F_1 \left[-\frac{5}{6}, \frac{11}{6}; \frac{17}{6}; (\bar{\Theta} + i\Lambda) \frac{L_3 + L_2}{L} \right] - \right. \\ & \left. i^{5/6} \left(\frac{L_3}{L} \right)^{11/6} F_1 \left[-\frac{5}{6}, \frac{11}{6}; \frac{17}{6}; (\bar{\Theta} + i\Lambda) \frac{L_3}{L} \right] - \frac{11}{16} \Lambda^{5/6} \left[\left(\frac{L_3 + L_2}{L} \right)^{8/3} - \left(\frac{L_3}{L} \right)^{8/3} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

由(25)式和(30)式就可以得到相位屏闪烁指数:

$$\begin{aligned} \sigma_I^2(\mathbf{r}, L) = & 4\hat{\sigma}_r^2(\mathbf{r}, L) + \sigma_{I,l}^2(L) = 7.72 \hat{\sigma}_R^2 \Lambda^{5/6} \left[1 - F_1 \left(-\frac{5}{6}; 1; \frac{2r^2}{W^2} \right) \right] + \\ & 11.23 \hat{\sigma}_R^2 \text{Re} \left\{ \left\{ i^{5/6} \left(\frac{L_3 + L_2}{L} \right)^{11/6} F_1 \left[-\frac{5}{6}, \frac{11}{6}; \frac{17}{6}; (\bar{\Theta} + i\Lambda) \frac{L_3 + L_2}{L} \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. i^{5/6} \left(\frac{L_3}{L} \right)^{11/6} F_1 \left[-\frac{5}{6}, \frac{11}{6}; \frac{17}{6}; (\bar{\Theta} + i\Lambda) \frac{L_3}{L} \right] \right\} \left[\left(\frac{L_3 + L_2}{L} \right)^{8/3} - \left(\frac{L_3}{L} \right)^{8/3} \right]^{-1} - \frac{11}{16} \Lambda^{5/6} \right\}, r \leq W. \end{aligned} \quad (32)$$

而薄相位屏近似下,闪烁指数定义为

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_I'^2(\mathbf{r}, L) = & 6.45 \hat{\sigma}_R'^2 (\Delta d_3)^{5/6} \left(\frac{r^2}{W^2} \right) + \\ & 3.87 \hat{\sigma}_R'^2 \left\{ \left[(\Delta d_3)^2 + (1 - \bar{\Theta} d_3)^2 \right]^{5/12} \cos \left[\frac{5}{6} \arctan \left(\frac{1 - \bar{\Theta} d_3}{\Delta d_3} \right) \right] - (\Delta d_3)^{5/6} \right\}, r \leq W, \end{aligned} \quad (33)$$

式中 $d_3 = L_3/L$ 。

图2为两种方法得到的不同高斯光束经厚度相位屏传输,形成的闪烁指数关于相位屏位置 $[2L_1/(kW_0^2)]$ 的函数。从图中可以看出,即使相位屏的厚度非常薄 ($L_2/L = 10^{-4}$),薄相位屏近似理论得到的结果,(35)式与任意厚度相位屏理论所得结果,(34)式存在明显的偏差,不能够正确描述接收面内光强的起伏变化。

同时,在设定相位屏厚度情况下,在弱湍流情况下,分析结果如表1所示,不同厚度相位屏对应着不同的闪烁指数,进而对应着不同的仿真传输距离。

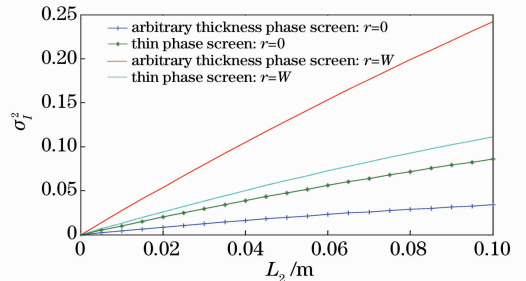


图2 不同厚度相位屏的闪烁指数对比
Fig. 2 Comparison of scintillation indexes with different thickness phase screens

分析结果表明,相位屏厚度增加到原来的 100 倍,所能仿真的大气传输距离增加为原来的 10 倍以上。通过调整相位屏厚度,可实现对不同传输距离的仿

真。这意味着任意厚度相位屏模型所能够仿真的大气环境更加广泛,更实用。

表 1 弱湍流条件下不同厚度相位屏的仿真结果

Table 1 Simulation results with different thickness phase screens under weak turbulence

C_n^2	Phase screen thickness /mm	Scintillation index	Corresponding atmosphere transmitting distance /m
1.00×10^{-15}	0.1	0.0004	350
	10	0.04	4260
1.00×10^{-14}	0.1	0.0004	100
	10	0.04	1200

5 结 论

以 Rytov 湍流理论和 Andrews 等的工作为基础,建立了高斯光束经过任意厚度相位屏传输所涉及各统计量的数学模型,并且得到了易于分析处理的解析表达式。将所得结果与 Andrews 所得薄相位屏近似理论结果进行了对比分析,发现薄相位屏近似理论虽然更加简便,但适用范围有限,而本文所得到的任意相位屏理论结果适用于更一般的情况,特别是对闪烁指数的描述。在弱湍流条件下,所得结果能更加准确地描述接收面光强起伏的强弱情况,且所能仿真的传输距离是薄相位屏模型的 10 倍以上,更能够满足实际工程应用过程中的仿真要求。该分析结果可以对于应用相位屏模拟大气湍流对高斯光束相位随机扰动作用统计规律的研究起到理论指导作用。

参 考 文 献

- 1 H G Booker, J A Ferguson, H O Vats. Comparison between the extended-medium and the phase-screen scintillation theories[J]. *J Atm Terr Phys*, 1985, 47(4): 381-399.
- 2 L C Andrews, R L Phillips. *Laser Beam Propagation through Random Media* (2nd Edition)[M]. Bellingham: SPIE, 2005.
- 3 S V Mantravadi, T A Rhoadarmer, R S Glas. Simple laboratory system for generating well-controlled atmospheric-like turbulence [C]. SPIE, 2004, 5553: 290-300.

- 4 Liu Chao, Hu Lifa, Mu Quanquan, *et al.*. Bandwidth requires of adaptive optical system for horizontal turbulence correction[J]. *Optics & Precision Engineering*, 2010, 18(10): 2137-2142.
- 刘超,胡立发,穆全全,等.校正水平湍流波面的自适应光学系统的带宽要求[J].*光学精密工程*, 2010, 18(10): 2137-2142.
- 5 L C Andrews, R L Phillips, A R Weeks. Propagation of a Gaussian-beam wave through a random phase screen[J]. *Waves in Random and Complex Media*, 1997, 7(2): 229-244.
- 6 Li Rongwang, Chang Xiang, Xiong Yaoheng. Numerical simulation of wander of ranging laser beam[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, 31(11): 1101001.
- 李荣旺,常翔,熊耀恒.测距光束光斑漂移的数值仿真[J].*光学学报*, 2011, 31(11): 1101001.
- 7 Wang Bin, Wang Zongyang, Wang Jianli, *et al.*. Phase-diverse speckle imaging with two cameras [J]. *Optics & Precision Engineering*, 2011, 19(6): 1384-1390.
- 王斌,汪宗洋,王建立,等.双相机相位差异散斑成像技术[J].*光学精密工程*, 2011, 19(6): 1384-1390.
- 8 Shen Baoliang, Sun Jianfeng, Zhou Yu, *et al.*. Influence of time-varying atmospheric turbulence to facular orientation deviation in dynamic process[J]. *Chinese J Lasers*, 2011, 38(8): 0805004.
- 沈宝良,孙剑峰,周煜,等.时变湍流对动态移动光斑定位精度的影响[J].*中国激光*, 2011, 38(8): 0805004.
- 9 X J Gan, J Guo, Y Y Fu. The simulating turbulence method of laser propagation in the inner field [J]. *J Physics: Conference Series*, 2006, 48(1): 907-910.
- 10 Qian Xianmei, Zhu Wenyue, Rao Ruizhong. Phase screen distribution for simulating laser propagation along an inhomogeneous atmospheric path[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(9): 6633-6639.
- 钱仙妹,朱文越,饶瑞中.非均匀湍流路径上传播数值模拟的相位屏分布[J].*物理学报*, 2009, 58(9): 6633-6639.

栏目编辑:王晓琰