

基于三角模型的计算全息快速算法

张亚萍 张建强 陈伟 王鹏 吴上 李俊昌

(昆明理工大学理学院, 云南 昆明 650500)

摘要 提出了一种新的基于三角网格结构的计算全息快速算法, 此算法利用几何中的仿射变换原理, 用解析表达式表示出三角网格的二维傅里叶频谱信息, 不需要对物体中的每一个三角网格进行傅里叶变换, 从而大大减少了计算量, 提高了运算效率。实验结果证明, 此算法简洁、快速, 且能够取得较好的全息重建像, 是一种提高计算全息运算速度的有效方法。

关键词 全息; 傅里叶频谱; 三角网格; 计算全息; 仿射变换

中图分类号 O438 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201340.0709001

Fast Computer Generated Hologram Algorithm of Triangle Mesh Models

Zhang Yaping Zhang Jianqiang Chen Wei Wang Peng Wu Shang Li Junchang

(School of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming, Yunnan 650500, China)

Abstract To improve the computational efficiency of computer generated hologram (CGH) and achieve the real-time nature of CGH, a novel fast CGH algorithm of triangle mesh models is put forward. In the algorithm, the Fourier spectral information of the triangle mesh is expressed as an analytic function by using affine transform theory and a Fourier transform does not need doing for per triangle mesh of the object. This algorithm reduces the amount of computation and improves the computational efficiency. The experimental results show that the new algorithm is simple and fast, which also can obtain the reconstruction image well. It is an effective method to improve the speed of CGH.

Key words holography; Fourier spectrum; triangle mesh; computer generated hologram; affine transform

OCIS codes 090.1760; 090.1995; 090.2870

1 引 言

随着数字计算机与计算技术的迅速发展, 人们广泛地使用计算机来模拟、运算、处理各种光学过程^[1-6]。计算全息 (CGH) 是在数字计算与现代光学的基础上建立起来的, 它与传统的光学全息术^[7]和现在比较热门的数字全息术相比, 具有操作灵活、低噪声、对实现环境要求低等优点。因此, 计算全息在科学研究领域也越来越得到人们的重视。随着对其研究的不断深入, 新的计算全息算法和编码方法不断出现, 但在面对复杂面形物体时效率都很低, 因为对于复杂物体的计算全息来说, 它具有数据量大, 对计算机存储量、硬件要求高的缺点, 这些阻碍最终使得复杂物体的实时再现受到了很大限制。故目前

最为迫切的问题是复杂形体全息图的计算以及通过尝试新的优化算法以提高再现像的质量并抑制噪声, 复杂三维物体的算法改进与实现具有重要的价值和意义。

在 1966 年随着 Waters^[8] 提出将物体看做许多独立发光点的组合体的设想后, 很多学者采用引入快速傅里叶变换算法、简化全息图的编码过程、压缩全息图带宽、利用“差分法”快速求解菲涅耳全息图等等多种提高计算效率的方法, 因为计算需要对每个发光点的球面波进行模拟, 致使物体采样点过多, 计算量过大, 对计算机硬件要求过高^[9]。但是, 当全息面尺寸过大 (或近场纪录) 时, 由于近似算法引入的相位误差增大, 易导致再现像扭曲和变形, 故如何

收稿日期: 2013-01-06; **收到修改稿日期**: 2013-03-06

基金项目: 国家自然科学基金 (61007061, 11172116)、云南省自然科学基金 (2010CD034)

作者简介: 张亚萍 (1978-), 女, 博士, 副教授, 主要从事计算全息及三维显示等方面的研究。

E-mail: yapin.zhang@gmail.com

提高计算效率仍然是最根本的问题。

三角网格是进行曲面构造及其重建的一种重要方法。利用三角形网格来描述物体具有很多优点。然而现有的传统方法在对基于三角网格的物体进行菲涅耳衍射时,需要对物体上的每个三角网格进行二维傅里叶变换以得到各个三角网格的二维傅里叶频谱信息。在对三角网格表示的图形数据结构光学计算处理研究的基础上,本文提出了一种新的基于三角网格结构仿射变换而获得复杂图形的计算全息快速算法,和传统算法相比,此算法利用几何中的仿射变换原理,不需要对物体的每一个三角形进行二维傅里叶变换,从而大大减少了计算量,提高了计算全息的计算效率。实验结果证明,此算法相比于传统算法简洁、快速,且能取得较好的全息重建像,是一种提高计算全息运算速度的有效方法。

2 三角网格模型及算法推导

利用仿射变换原理,通过矩阵变换将一个单位基元三角形与任意三角形联系起来,并由此根据单位基元三角形的二维傅里叶频谱的解析表达形式,推导出了任意三角形的二维傅里叶频谱的解析表达形式。

2.1 仿射变换的原理与计算

仿射变换是一种实现几何变换的公式,它可以按比例放大或缩小图形,使图形旋转或位移。仿射变换的定义:若变换 $S: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, S(x) = T(x) + \mathbf{a}$, T 是非奇异线性变换, $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, 则变换 S 称为仿射变换。二维欧氏空间上的仿射变换为: $S(\mathbf{X}) = \mathbf{TX} + \mathbf{A}$, 其中, $\mathbf{X} = [x, y]'$, $\mathbf{T} = [ab, cd]'$, $\mathbf{A} = [e, f]'$, a, b, c, d, e, f 皆为实数。

仿射变换的一般形式为

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases} \quad (1)$$

且 $\Delta = ad - bc \neq 0$ 。也可以将(1)式写成矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中 a, b, c, d, e, f 为实数。通过改变参数 $a \sim f$ 的值,能够实现对原物体的平移、比例、反射、旋转、错切等常用操作。这里将利用(1)、(2)式,推导出组成物体的任意三角面元与单位三角面元之间的仿射变换关系。

2.2 角谱衍射理论的计算

角谱衍射理论是衍射现象在频域的准确描述,

这里将利用角谱理论对菲涅耳衍射过程进行分析,菲涅耳衍射过程由角谱衍射理论可以表示为

$$U(f_x, f_y) = U_0(f_x, f_y)H(f_x, f_y), \quad (3)$$

式中

$$H(f_x, f_y) = \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}\right]$$

为衍射在频域的传递函数。(3)式表示光波场从衍射屏传播到相距为 z 的观察屏的频谱变化关系^[7]。

由上面理论得知,如果已知输入物光场分布为 $U_0(x, y)$, 则全息面上的物光场分布为

$$U(x, y) = F^{-1}\{F[U_0(x, y)]H(f_x, f_y)\}, \quad (4)$$

式中 x, y 为全息面上的坐标分布。加入参考光 $R(x, y)$ 与物光干涉生成计算全息图,则全息面上的光场复振幅分布为

$$I(x, y) = U(x, y) + R(x, y), \quad (5)$$

由全息原理得知,如果用光波 $C(x, y)$ 照射全息图进行重建,重建面上的再现光场复振幅分布为

$$U_R(x_i, y_i) = F^{-1}[F(C \cdot I) \cdot H], \quad (6)$$

式中 I 为全息面上的物光场分布, x_i, y_i 为重建面上的坐标分布。

3 基于三角网格结构的计算全息快速算法

三角网格是进行曲面构造及其重建的一种重要方法。利用三角形网格来描述物体具有很多优点,如三角形的拓扑结构比较简单,利用三角形描述物体难度相对较低,而且足够的三角形能够较为精确地逼近复杂物体;进行物体重建时,三角形的数据结构便于处理;三角形的特征不会因为投影变化而发生改变,具有比较稳定的优点。然而现有的传统方法在对基于三角网格的物体进行菲涅耳衍射,需要对物体上的每个三角网格进行二维傅里变换以得到各个三角网格的二维傅里叶频谱信息。这里提出了一种新的基于三角网格结构的计算全息快速算法,通过仿射变换原理推导出用解析表达式表示出物体上各个三角网格的二维傅里叶频谱信息,从而在对物体进行菲涅耳衍射时,便不需要对每个三角网格进行二维傅里叶变换。下面首先推导分析单位基元三角形的二维傅里叶频谱的解析表达形式。

3.1 单位基元三角形的二维傅里叶频谱的解析表达形式

设有一个单位三角形,其顶点坐标为 $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(1, 1)$, 如图 1 所示。

这里通过二维傅里叶变换的定义计算推导得到

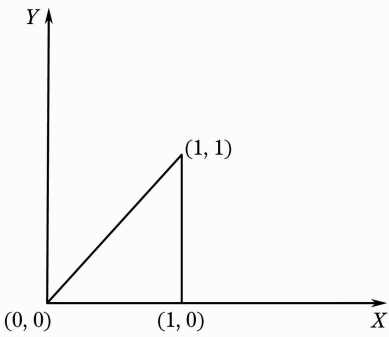


图1 单位三角形
Fig.1 Unit triangle

此基元三角形的傅里叶频谱。由二维傅里叶变换的定义可以得到

$$F_{\Delta}(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f_{\Delta}(x, y) \exp[-2\pi i(xu + yv)] dy dx = \int_0^1 \int_0^x \exp[-2\pi i(xu + yv)] dy dx = \frac{\exp(-2\pi iu) - 1}{(2\pi)^2 uv} + \frac{1 - \exp[-2\pi i(u + v)]}{(2\pi)^2 v(u + v)}. \quad (7)$$

(7)式即为单位基元三角形的二维傅里叶频谱的解析表达式^[3]。

3.2 任意三角形与单位基元三角形的仿射变换公式推导

下面推导任意三角形与上述单位基元三角形之间的仿射变换关系。假设有一个任意三角形 Γ ，它

由三个不共线的三个顶点 (s_1, t_1) 、 (s_2, t_2) 、 (s_3, t_3) 组成，则三角形 Γ 和基元三角形可以由一个仿射变换联系起来

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

如果将两个三角形的顶点两两对应，即 $(0, 0) \rightarrow (s_1, t_1)$ 、 $(1, 0) \rightarrow (s_2, t_2)$ 、 $(1, 1) \rightarrow (s_3, t_3)$ ，则由(2)式可导出各顶点表达式：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} s_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} s_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} s_3 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \end{cases}. \quad (9)$$

由(9)式可以推导出

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 - s_1 & s_3 - s_2 \\ t_2 - t_1 & t_3 - t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 \\ t_1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

(10)式即为由单位三角形到任意三个三角形的仿射变换公式。

3.3 任意三角形二维傅里叶频谱的解析表达式形式

由(10)式得知，可以将任意顶点 (s, t) 表示为 x, y 的函数，即

$$\begin{cases} s = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ t = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases}, \quad (11)$$

式中 $a_1 = s_2 - s_1, b_1 = s_3 - s_2, c_1 = s_1, a_2 = t_2 - t_1, b_2 = t_3 - t_2, c_2 = t_1$ 。则推导任意三角形 $g(s, t)$ 的二维傅里叶频谱为

$$G(u, v) = \iint_{D_{\Delta}} g(s, t) \exp[-2\pi i(us + vt)] ds dt = \iint_D f_{\Delta}(x, y) \exp\{-2\pi i[(a_1 u + a_2 v)x + (b_1 u + b_2 v)y + (c_1 u + c_2 v)]\} D dx dy = \frac{-D}{4\pi^2 m(m+n)} \{\exp[-2\pi i(m+n+p)] - \exp(-2\pi ip)\} + \frac{D}{4\pi^2 mn} \{\exp[-2\pi i(n+p)] - \exp(-2\pi ip)\}, \quad (12)$$

式中 $D = a_1 b_2 - a_2 b_1, m = b_1 u + b_2 v, n = a_1 u + a_2 v, p = c_1 u + c_2 v$ 。(12)式即为任意三角形的二维傅里叶频谱的解析表达式形式。

3.4 所提算法与传统任意三角形傅里叶频谱计算方法的比较

文献[10]提出将任意三角形经由傅里叶变换的定义来积分计算得到其傅里叶频谱。其将任意三角形沿最长边将其分为两个直角三角形，并让三角形的最长边与坐标系的 X 轴对齐，然后对两个三角形分别进行傅里叶变换，通过相加得到原三角形的傅里叶频谱，假定对三角形面元坐标定义为 $(0, A), (-B, 0), (C, 0)$ ，其计算公式可表示为

$$T_{\Delta}(f_x, f_y) = F[U_1(x, y, 0)] + F[U_2(x, y, 0)] = T_1(f_x, f_y) + T_2(f_x, f_y) = -C_1 \frac{\exp(-j2\pi A_1 f_y)}{2\pi f_y} \frac{\exp[-j2\pi(C_1 f_x - A_1 f_y)] - 1}{2\pi(C_1 f_x - A_1 f_y)} + \frac{\exp(-j2\pi C_1 f_x) - 1}{4\pi^2 f_x f_y} + B_1 \frac{\exp(-j2\pi A_1 f_y)}{2\pi f_y} \frac{1 - \exp[j2\pi(B_1 f_x + A_1 f_y)]}{2\pi(B_1 f_x + A_1 f_y)} + \frac{1 - \exp(-j2\pi B_1 f_x)}{4\pi^2 f_x f_y}. \quad (13)$$

相比所提算法,其算法的主要缺陷有:

1) 此算法任意三角形沿最长边将其分为两个直角三角形,并让三角形的最长边与坐标系的 X 轴对齐,相当于对每个三角形建立了一个自己的局部坐标系,但如果对某个物体的多个三角网格进行计算,需要建立一个统一的全局坐标系,此时如何从每个局部坐标系转换到统一的全局坐标系,将会额外增加算法的复杂性。

2) 对比传统算法(12)式和文献[10]算法(13)式,本文算法公式更加简洁,复杂性远小于传统算法。

3.5 基于三角网格结构的计算全息快速算法

3.5.1 基于三角网格结构的计算全息传统算法

假设一个物体 U 由 m 个三角形网格结构组成,则由叠加定理得知,物体 U 的二维傅里叶频谱的解析表达形式为

$$U_f = \sum_{i=1}^m F(u_i), \quad (14)$$

式中 F 为傅里叶变换, u_i 为物体的第 i 个三角网格,则 $F(u_i)$ 为物体第 i 个三角网格的二维傅里叶频谱。由此可知,一个由 m 个三角形网格结构组成的物体,若要得到物体的二维傅里叶频谱信息,则需要进行 m 次傅里叶变换。

由 2.2 节的角谱衍射理论可以得知,全息面上的物光场分布为

$$U_o = F^{-1}[F(U_f H)], \quad (15)$$

加入参考光(其光场分布为 R) 与物光干涉,则全息面上的光场复振幅分布为

$$I = U_o + R. \quad (16)$$

由全息原理和角谱衍射理论得知,如果用光波 $C(x, y)$ 照射全息图进行重建,重建面上的再现光场复振幅分布为

$$U_R = F^{-1}[F(C \cdot I) \cdot H]. \quad (17)$$

3.5.2 基于三角网格结构的计算全息快速算法

通过(12)式可以求得任意三角形的二维傅里叶频谱的解析表达形式。

假设一个物体 U 由 m 个三角形网格结构组成,由叠加定理得知,整个物体的二维傅里叶频谱的解析表达形式为

$$U_f = \sum_{i=1}^m G_i, \quad (18)$$

式中物体第 i 个三角网格的二维傅里叶频谱 G_i 直接通过代入(12)式的结果得到。则全息面上的物光场分布为

$$U'_o = F^{-1}[F(U'_f H)]. \quad (19)$$

全息面上的光场复振幅分布为

$$I' = U'_o + R. \quad (20)$$

由全息原理和角谱衍射理论得知,如果用光波 $C(x, y)$ 照射全息图进行重建,重建面上的再现光场复振幅分布为

$$U'_R = F^{-1}[F(C \cdot I') \cdot H]. \quad (21)$$

当使用传统算法对基于三角网格结构的物体进行全息计算时,需要对物体中的每一个三角网格进行傅里叶变换,其计算量过大,需要花费大量时间才能生成物体的计算全息图。而使用这里提出的新算法进行计算,如果已知每个三角网格的顶点坐标信息,便不用对物体中的每一个三角网格进行傅里叶变换,直接根据(12)式的结果便能得到各个三角网格的二维傅里叶频谱,从而大大减少了计算量,提高了运算效率。

4 计算机模拟验证

4.1 二维平面图像的模拟验证

首先对(12)式进行计算机模拟验证。取一任意三角形 A ,其顶点坐标为(1,1)、(3,2)、(3,5)。图 2(a)分别为 A 在平面直角坐标系的图像,图 2(b)为利用(12)式求得的逆傅里叶变换结果,图 2(c)为对 A 进行菲涅耳衍射并加入参考光干涉取得的计算全息图,图 2(d)为重建结果。由于 Matlab 软件图像坐标的特殊性,这里在显示重建图像时,都对重建图像进行了坐标旋转变换。

由图 2 的结果可以看出,逆傅里叶变换和重建的全息图像,大小、形状、位置都与理论结果完全一致,从而验证了算法的正确性。

接下来对一个较为复杂的三角网格模型进行模拟验证,如图 3(a)所示,“昆明”被剖分为 54 个三角网格,图 3(b)同样为利用(12)式得到的逆傅里叶变

换结果,图 3(c)为生成的计算全息图,图 3(d)为重建得到的“—1”级再现像。

角网格的顶点信息,便能够利用所提算法进行全息重建,且能够取得准确、清晰的再现结果。

由图 3 的实验结果得知,只要已知物体各个三

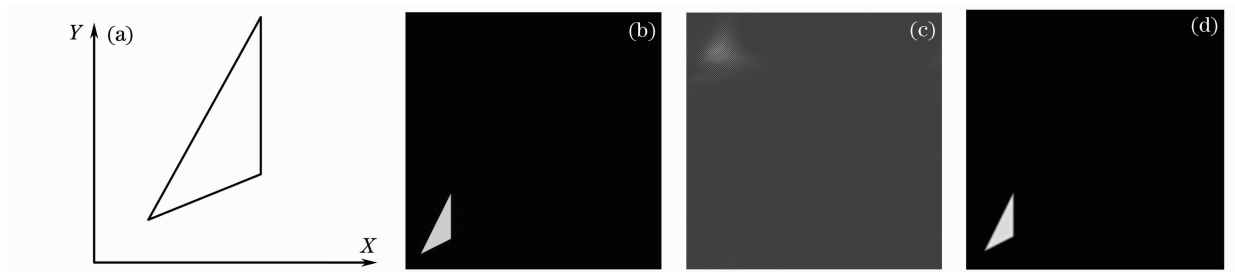


图 2 单个三角形的模拟验证。(a)任意一个三角形;(b)逆傅里叶变换结果;(c)计算全息图;(d)重建结果

Fig. 2 Simulation verification of a single random triangle. (a) A random triangle; (b) inverse Fourier transform result; (c) computer generated hologram; (d) reconstruction result

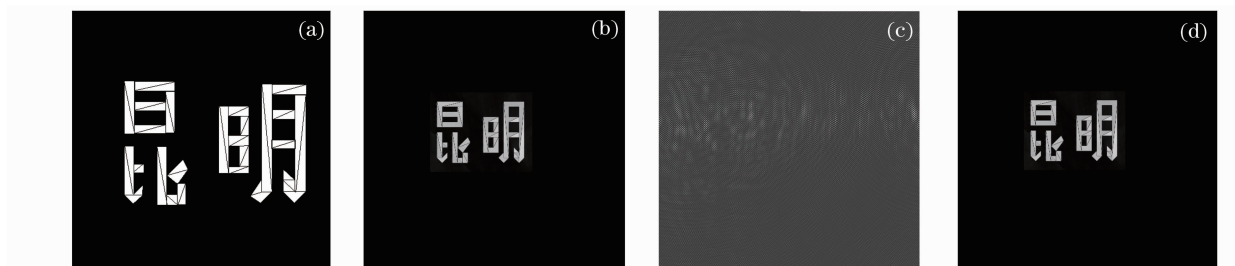


图 3 “昆明”模型的模拟验证。(a)“昆明”模型;(b)逆傅里叶变换结果;(c)计算全息图;(d)重建结果

Fig. 3 Simulation verification of a ‘Kunming’ model. (a) A ‘Kunming’ model; (b) inverse Fourier transform result; (c) computer generated hologram; (d) reconstruction result

4.2 三维网格物体的模拟验证

根据文献[10-12]所提供的平面频谱在频率空间的坐标变换公式,可以实现对三维物体的计算全息图的计算。为了减少工作量,不考虑三维物体的消隐工作,对一个由 3Dmax 软件所生成的半球物体

进行模拟验证,图 4(a)为一半球,其由 216 个三维网格构成,图 4(b)使用所示算法得到的计算全息图,图 4(c)为数值重建结果。由实验结果能够看出,使用所示算法取得了较好的三维重建结果。

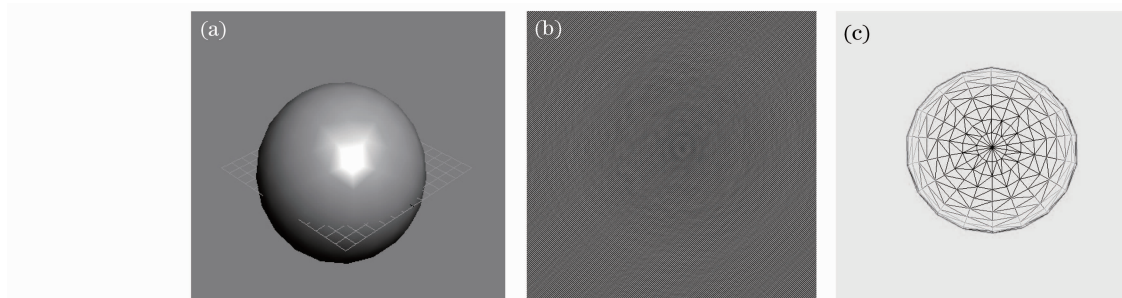


图 4 半球的模拟验证。(a)“半球”模型;(b)计算全息图;(c)重建结果

Fig. 4 Simulation verification of a ‘hemisphere’ model. (a) A ‘hemisphere’ model; (b) computer generated hologram; (c) reconstruction result

4.3 所提算法与传统算法用时对比

下面将对不同模型使用所提算法和传统算法的计算时间进行比较和分析,整个计算时间包括数据的读入、计算全息图的生成以及全息重建三个过程。传统方法在计算基于三角网格结构的物体时,需要对物体上的每个三角网格都进行傅里叶变换以得到

各个三角网格的二维傅里叶频谱信息,由于“昆明”模型由 54 个三角网格组成,因此当对“昆明”模型需要进行 54 次二维傅里叶变换,而所提的算法能够用解析表达式表示出每个三角网格的二维傅里叶频谱信息,则不需要再对物体上的各个三角网格进行二维傅里叶变换,从而大大减少了整个衍射过程的

计算量,具体计算时间如表 1 所示。

表 1 所提方法与传统方法用时比较

Table 1 Comparison of the traditional algorithm and the novel algorithm

Model	A single random triangle	'Kunning' model	'Hemisphere' model
Traditional algorithm /s	1.893	15.954	80.157
Proposed algorithm /s	1.538	7.128	30.142

由表 1 可以看出,所提算法能够提高运算效率,缩短计算时间。当实验模型的三角网格数量逐渐增多时,所提方法的计算时间相比于传统方法缩短的更多。

5 实验验证

光电再现实验中采用 532 nm 半导体激光器作为参考光源,其他设备包括空间滤波器、扩束器、焦距为 30 cm 的准直透镜、观察屏等。反射式数字微镜器件(DMD)作为空间光调制器,其分辨率为 1024 pixel × 768 pixel,像素间距为 13.7 μm。实验光路如图 5 所示。

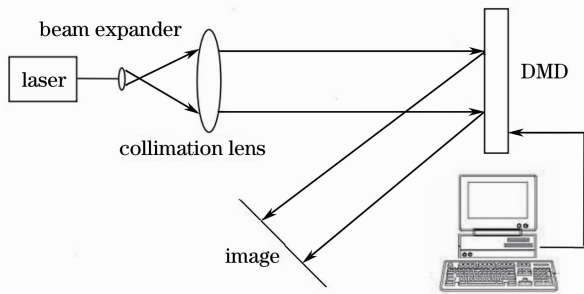


图 5 实验光路

Fig. 5 Experimental optical system

利用图 3(c)的全息图,经计算机输出至 DMD,在相干光波长为 532nm 的激光照射下,采用数码相机接收重建图像,得到重建结果如图 6 所示。

由图 6 得知,光电重建结果与理论结果和计算

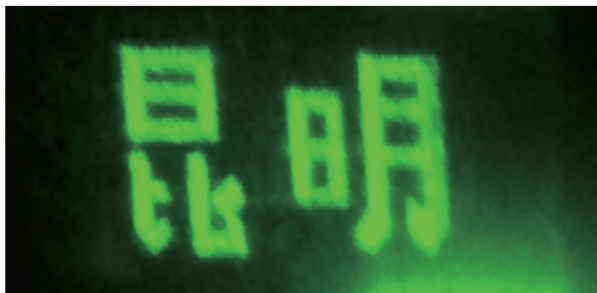


图 6 重建结果

Fig. 6 Reconstruction result

机模拟结果基本一致,从而再次验证上上述理论部分以及计算机模拟部分的正确性。

6 结 论

提出了一种新的基于三角网格结构的计算全息快速算法,该算法直接用解析表达式表示出了三角网格的二维傅里叶频谱信息,不需要对物体中的每一个三角网格进行傅里叶变换,从而大大减少了计算量,提高了运算效率。计算机模拟和实验验证结果表明,该算法完全正确,而且取得了较好的重建结果。接下来将尝试利用三维激光相机进行实际物体数据的采集,实现实际物体的计算全息三维重建和显示。

致谢 感谢美国纽约石溪大学(Stony Brook University)顾险峰教授的讨论与指点。

参 考 文 献

- 1 K Matsushima, S Nakahara. Extremely high-definition full-parallax computer-generated hologram created by the polygon-based method[J]. *Appl Opt*, 2009, 48(34): H54-H63.
- 2 K Yamaguchi, Y Sakamoto. Computer generated hologram with characteristics of reflection; reflectance distributions and reflected images[J]. *Appl Opt*, 2009, 48(34): H203-H211.
- 3 L Ahrenberg, P Benzie, M Magnor. Computer generated holograms from three dimensional meshes using an analytic light transport model[J]. *Appl Opt*, 2008, 47(10): H1567-H1574.
- 4 H Kim, J Hahn, B Lee. Mathematical modeling of triangle-mesh-modeled three-dimensional surface objects for digital holography [J]. *Appl Opt*, 2008, 47(19): D117-D127.
- 5 N Masuda, T Ito, T Tanaka, *et al.*. Computer generated holography using a graphics processing unit[J]. *Opt Express*, 2006, 14(2): 603-608.
- 6 T Ito, N Masuda, K Yoshimura, *et al.*. Special-purpose computer HORN-5 for areal-time electroholography [J]. *Opt Express*, 2005, 13(6): 1923-1932.
- 7 R N Bracewell, K-Y Chang, A K Jha, *et al.*. Affine theorem for two-dimensional Fourier transform [J]. *Electron Lett*, 1993, 29(3): 304-306.
- 8 J P Waters. Holographic image synthesis utilizing theoretical methods[J]. *Appl Phys Lett*, 1996, 9(11): 405-407.
- 9 D H Bailey, P N Swartztrauber. The fractional Fourier transform and applications[J]. *SIAM Rev*, 1991, 33(3): 389-404.
- 10 Li Junchang, Gui Jinbin, Lou Yuli, *et al.*. Study of creation algorithm of computer-generated hologram of diffuse reflection 3D object[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2013, 50(2): 020903.
- 李俊昌, 桂进斌, 楼宇丽, 等. 漫反射三维物体计算全息图算法研究[J]. *激光与光电子学进展*, 2013, 50(2): 020903
- 11 T Tommasi, B Bianco. Frequency analysis of light diffraction between rotated planes[J]. *Opt Lett*, 1992, 17(8): 556-558.
- 12 K Matsushima, H Schimmel, F Wyrowski. Fast calculation method for optical diffraction on tilted planes by use of the angular spectrum of plane waves[J]. *J Opt Soc Am A*, 2003, 20(9): 1755-1762.