动态光散射混合非负截断奇异值反演

窦震海[1,2] 王雅静[1*] 申 晋[1] 刘 伟[1] 高珊珊[1]

([1] 山东理工大学电气与电子工程学院，山东 淄博 255049
[2] 中国农业大学信息与电气工程学院，北京 100081)

摘要 为了提高动态光散射(DLS)粒径反演精度，考虑到粒径分布(PSD)的非负性及截断奇异值反演(TSVD)法的抗干扰性，比较了信赖域法(Trust)及内点牛顿法(IPN)非负约束的 TSVD 反演的特性，并结合两者特性，提出了一种 Trust 与 IPN 相结合的截断奇异值(Trust-IPN-TSVD)粒径反演方法。该方法继承了 Trust-TSVD 及 IPN-TSVD 方法的优点。通过模拟 200～500 nm 单峰、100～700 nm 双峰分布颗粒 Trust、IPN 及 Trust-IPN 三种 TSVD 方法的反演结果可以看出：相对于 Trust-TSVD，Trust-IPN-TSVD 最多分别可改善单峰、双峰分布颗粒反演 PSD 峰值误差、相对误差为 1.68%、0.2461，1.41%、0.0587，且它的 PSD 更平滑；相对于 IPN-TSVD，Trust-IPN-TSVD 最多可改善单、双峰分布颗粒反演 PSD 峰值误差、相对误差为 4.52%、3.710，9.47%、0.4229，且它的 PSD 明显变窄。因此，Trust-IPN-TSVD 法的反演 PSD 具有较高的精度及较好的平滑性，更符合理论分布。最后实测颗粒的反演结果证实了该结论。

关键词 测量；动态光散射；粒径反演；截断奇异值分解；信赖域；内点牛顿法

中图分类号 TN911.74 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/CJL201340.0608001

A Hybrid Non-Negative Inversion of Dynamic Light Scattering Based on Truncated Singular Value Decomposition

Dou Zhenhai[1,2] Wang Yajing[1] Shen Jin[1] Liu Wei[1] Gao Shanshan[1]

([1] *College of Electrical and Electronic Engineering, Shandong University of Technology, Zibo, Shandong* 255049, *China*
[2] *College of Information and Electrical Engineering, China Agricultural University, Beijing* 100081, *China*)

Abstract In order to improve particle size inversion accuracy of the dynamic light scattering (DLS), considering non-negative characteristic of the particle size distribution (PSD) and strong anti-noise characteristic of truncated singular value decomposition (TSVD) method, TSVD inversion methods of the trust-region (Trust) and interior point Newton (IPN) non-negative constraints are compared in this paper. Combining characteristics of two methods, a particle size inversion method based on Trust-IPN and TSVD (Trust-IPN-TSVD) is proposed. This method inherits the advantages of the Trust-TSVD and IPN-TSVD methods. The inversion of Trust-TSVD, IPN-TSVD and Trust-IPN-TSVD method for 200～500 nm unimodal distribution particles and 100～700 nm bimodal distribution particles is simulated. Results show that compared with the Trust-TSVD, for unimodal and bimodal distribution particles, Trust-IPN-TSVD can improve the peak value error and the relative error of inversion PSD by 1.68%, 0.2461 and 1.41%, 0.0587, respectively, and its PSD is smoother. Compared IPN-TSVD, for unimodal and bimodal distribution particles, Trust-IPN-TSVD can improve the peak value error and the relative error of inversion PSD by 4.52%, 3.710 and 9.47%, 0.4229, respectively, and its PSD is significantly narrower. Therefore, the inversion PSD of Trust-IPN-TSVD method has higher accuracy and better smoothness, and is more consistent with the theoretical distribution. Finally, the inversion of experimental particles confirms this conclusion.

Key words measurement; dynamic light scattering; particle size inversion; truncated singular value decomposition; trust-region; interior point Newton method

OCIS codes 290.3200; 290.3700; 290.5820; 290.5850; 300.6170

收稿日期： 2013-01-08；**收到修改稿日期：** 2013-03-02

基金项目： 山东省自然科学基金(ZR2010FM005，ZR2012EEM028)和山东省高等学校科技计划(J12LJ53)资助课题。

作者简介： 窦震海(1970—)，男，博士，讲师，主要从事光电检测技术方面的研究。E-mail: douzhenhai1105@126.com

* **通信联系人。** E-mail: wangyajing0725@126.com

1 引　　言

动态光散射(DLS)技术是一种有效的测量布朗运动颗粒粒径的光学技术[1~3]。该技术通过测量悬浮液中布朗运动粒子散射光强的自相关函数,并对其反演来获取颗粒的粒径分布(PSD)信息。但粒径反演问题需要求解第一类 Fredholm 积分方程,该方程是个严重的病态方程。测量数据的微小扰动都会引起解的很大偏差或出现不稳定现象。因此,寻求近似真实的粒径分布成为 DLS 技术的难点。针对该问题,目前已提出了多种反演算法,如累积法[4]、CONTIN 法[5]、双指数法[6]、指数采样法[7]、NNLS 法[8]、极大似然法[9]和神经网络法[10]等。然而这些算法都有一定的局限性,普遍存在测量精度不高的问题。因此,反演问题仍然是目前的研究热点。

在反演问题求解中,正则化法是一种有效的方法。对于 DLS 反演,CONTIN 算法就采用 Tikhonov 正则化方法对粒径进行反演。该算法具有一定的抗噪声能力,但它存在程序复杂、先验信息需求量多、多峰分辨能力差等缺点。与 Tikhonov 方法相比,截断奇异值(TSVD)正则化法具有更强的抗噪能力。因此,为了提高反演算法的精度及抗干扰能力,本文采用 TSVD 对粒径进行反演。同时,考虑 PSD 的非负性,在反演算法中对解附加一个非负约束条件,使解限制在一个比较小的范围内,可以进一步提高反演精度[11]。非负约束方法有多种,其中,信赖域(Trust)非负约束方法[12]是目前工程领域广泛应用的方法。该方法用于 DLS 反演时,求解出的 PSD 误差较小,但经常会出现不平滑的现象[13]。内点牛顿法(IPN)[14]也是一种非负约束方法,该方法用于 DLS 反演时,具有较好的平滑性,但反演 PSD 偏差较大。本文结合两种方法的特性,将其用于动态光散射 TSVD 反演,并由此提出了一种 Trust 法及 IPN 法相结合的非负约束截断奇异值动态光散射反演方法。该方法具有较高的精度和较强的抗干扰能力。

2 动态光散射 TSVD 反演原理

激光器发出的光经透镜聚焦后,照射到样品池内布朗运动的粒子上,光电探测器接收到散射光强信号,光强信号通过相关器进行相关运算并送入计算机,由计算机对相关函数进行反演运算。反演运算的归一化自相关函数为

$$g(\tau)=\int_0^{\infty}G(\Gamma)\exp(-2\Gamma\tau)\mathrm{d}\Gamma,\quad \int_0^{\infty}G(\Gamma)\mathrm{d}\Gamma=1,\tag{1}$$

式中 Γ 为衰减线宽,$G(\Gamma)$ 为衰减线宽分布函数,τ 为延迟时间。衰减线宽与粒径的关系为

$$\Gamma=Dq^2,\quad q=\frac{4\pi n}{\lambda_0}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),\quad D=\frac{k_\mathrm{B}T}{3\pi\eta d},\tag{2}$$

式中 q 为散射波矢量,D 为平移扩散系数,λ_0 为激光在真空中的波长,θ 为散射角,n 为溶液的折射率,k_B 为 Boltzman 常数,T 为绝对温度,η 为溶液黏性系数,d 为球型颗粒的直径。

(1)式离散化后可表示为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{b}$ 的值分别为 $g(\tau_j)$,$G(\Gamma_i)$,$\exp(-2\Gamma_i\tau_j)$。

对(3)式进行求解得 $G(\Gamma_i)$,即相应的粒径分布。

对于(3)式,其最小二乘解可表示为[15]

$$\min\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|_2^2=\boldsymbol{x}_\mathrm{LS}.\tag{4}$$

假设矩阵 $\boldsymbol{A}\in R^{m\times n}(m\geqslant n)$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U\Sigma V}^\mathrm{T}=\sum_{i=1}^{n}u_i\sigma_i\boldsymbol{v}_i^\mathrm{T},\tag{5}$$

式中 σ_i 为奇异值,$\sigma_1>\sigma_2>\cdots>\sigma_n>0$,$\boldsymbol{v}_i$ 为矩阵 $\boldsymbol{V}$ 的列向量,$\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$,$\boldsymbol{U}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in R^{n\times n}$、$\boldsymbol{V}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in R^{m\times n}$ 分别为左、右奇异矩阵。

可虑 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解,则 $\boldsymbol{x}_\mathrm{LS}$ 可表示为

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{LS}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle u_i,b\rangle}{\sigma_i}v_i.\tag{6}$$

由于小奇异值对应噪声分量,从(6)式可看出,如果 σ_i 很小,那么 $\boldsymbol{x}_\mathrm{LS}$ 将会有很大的偏差。为了减小这种偏差,TSVD 是一种很好的方法,它能够把对扰动起放大作用的小奇异值去掉。基于这种原理,去掉小奇异值后,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A}_k=\sum_{i=1}^{k}u_i\sigma_i\boldsymbol{v}_i^\mathrm{T},\tag{7}$$

式中 k 为正则参数,它控制着解稳定度与精度的平衡。

综合(6)式及(7)式,(3)式的求解问题可表示为

$$\min\|\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2^2.\tag{8}$$

选择合适的正则参数,对(8)式进行非负约束求解获得 PSD。L-curve 正则参数选择准则[16]是工程中常用的准则,本文采用该准则。

3 非负约束 TSVD 反演算法

3.1 Trust 非负约束 TSVD 算法(Trust-TSVD)

Trust 法是一种大型非负约束算法,它通过信赖域法解决下面(9)式或(10)式的最小问题:

$$\min_{x>0}\left\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}^\mathrm{T}\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\mathrm{T}\boldsymbol{Hx}:\quad \boldsymbol{l}<\boldsymbol{x}<\boldsymbol{u}\right\},\tag{9}$$

$$\min_{x>0}\{\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|:\quad \boldsymbol{l}<\boldsymbol{x}<\boldsymbol{u}\}. \tag{10}$$

它们两者的关系为 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$。求解原理如下：设 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Hx}+\boldsymbol{c}$，若定义对角矩阵 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$，它的第 i 个对角元素为 $|\boldsymbol{v}_i(x)|^{1/2}$，向量 $\boldsymbol{v}_i$ 定义为

$$\boldsymbol{v}_i=\begin{cases} x_i-u_i & g_i<0 \text{ and } u_i<\infty \\ x_i-l_i & g_i\geqslant 0 \text{ and } l_i>-\infty \\ -1 & g_i<0 \text{ and } u_i=\infty \\ 1 & g_i\geqslant 0 \text{ and } l_i=-\infty \end{cases}. \tag{11}$$

那么，(9)式或(10)式的局部极小值为如下非线性系统的解

$$\boldsymbol{D}^2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=0. \tag{12}$$

在可行域 $\boldsymbol{l}<\boldsymbol{x}<\boldsymbol{u}$ 内，通过对(12)式进行局部极小值求解，并利用二维子空间分解技术，可获得(9)式或(10)式的全局最优解，具体参看文献[12]。

3.2 IPN 非负约束 TSVD 算法(IPN-TSVD)

IPN 法[14]通过搜索满足 KKT(Karush-Kuhn-Tucker)条件的解来求非负约束问题。(10)式中，假定 $\boldsymbol{A}$ 是满秩的，它的解 x^* 满足 KKT 条件

$$x^*\geqslant 0,\quad \boldsymbol{g}(x^*)\geqslant 0,\quad \boldsymbol{g}(x^*)^{\mathrm{T}}x^*=0, \tag{13}$$

式中 $\boldsymbol{g}$ 是目标函数的梯度。

这样 x^* 能够通过寻找公式

$$\boldsymbol{D}(x)\boldsymbol{g}(x)=0 \tag{14}$$

的正解求得：

$$\boldsymbol{D}(x)=\mathrm{diag}[d_1(x),\cdots,d_n(x)],\ x\geqslant 0,$$

$$d_i(x)=\begin{cases} x_i & g_i(x)\geqslant 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

通过相应的变换，在可行域内采用牛顿迭代法对(14)式进行迭代，可得到(10)式的非负解。

为了验证上述两种方法的效果，分别采用两种方法，对噪声水平为 0.005 的模拟双峰分布颗粒相关函数进行反演。模拟初始分布为 Johnson's S_B[17] 函数，相应参数分别为：$u_1=3.4$；$\sigma_1=2.1$；$u_2=-3.2$；$\sigma_2=2.8$；$\alpha_{\max}=900$ nm；$\alpha_{\min}=100$ nm。模拟实验参数为：入射光波长 632.8 nm，分散介质(水)折射率 1.331，散射角 90°，测量温度 25 ℃，波尔兹曼常数 1.3807×10^{-23} J•K^{-1}，水的黏度系数 0.89×10^{-3} N•s•m^{-2}。在反演范围 [1,1000](单位 nm)内，当反演间隔数、反演初值分别为 50 和 0 时，对上述颗粒进行反演，反演结果如图 1、2 和表 1 所示。该双峰分布颗粒的理论峰值分别为 200.8 nm，700.3 nm。表 1 中，相对误差为 $\dfrac{\|x-x_{\text{theory}}\|_2}{\|x_{\text{theory}}\|_2}$。

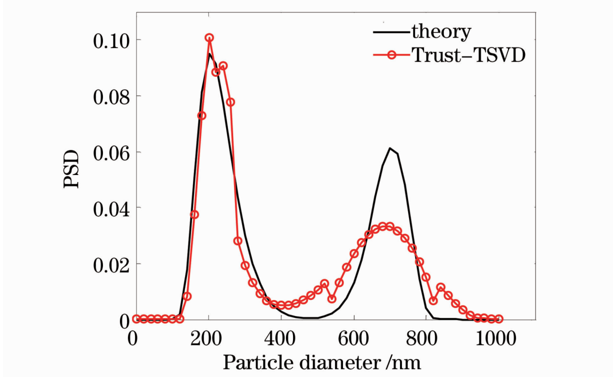

图 1 Trust-TSVD 法的反演粒径分布

Fig. 1 Inversion PSD of Trust-TSVD

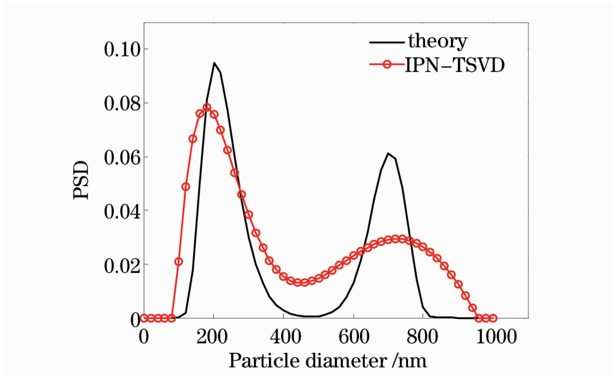

图 2 IPN-TSVD 法的反演粒径分布

Fig. 2 Inversion PSD of IPN-TSVD

表 1 Trust-TSVD 和 IPN-TSVD 方法的反演数据

Table 1 Inversion data of Trust-TSVD and IPN-TSVD

Method	Peak value /nm	Peak value error /%	Relative error
Trust-TSVD	200.80, 680.32	0, 2.85	0.2956
IPN-TSVD	180.82, 720.28	9.95,2.85	0.5371

从图 1 和表 1 能够看出，采用 Trust 法进行非负约束时，反演出的 PSD 平滑性较差。但是该方法反演 PSD 的峰值误差、相对误差都比较小，更接近理论分布，尤其第一个峰与理论分布吻合很好。当采用 IPN 法进行非负约束时，从图 2 和表 1 看出，相对于 Trust-TSVD 方法，IPN-TSVD 方法的反演 PSD 光滑性很好，但它两个峰与理论分布相差都比较大，展宽比较严重，并且反演 PSD 峰值误差、相对误差也比较大。

3.3 Trust 与 IPN 相结合的反演算法(Trust-IPN-TSVD)

对于 DLS 反演，反演 PSD 应该具有较高的精度、较好的光滑性。从上述分析得出，Trust 非负约束法具有较高的精度，但平滑性差，而 IPN 方法有很好的平滑性，但是精度比较差。因此，为了得到较

好的反演 PSD，希望把两者的优点进行结合。为此，本文将 Trust 和 IPN 方法结合，构成了一种混合 TSVD 算法（Trust-IPN-TSVD）。该算法先用 IPN-TSVD 法进行反演得到计算结果，然后，将该计算结果作为初值 x_0 用于 Trust-TSVD 法进行反演。这样相当于 Trust-TSVD 法的反演是在最优值附近进行寻优，比较容易得到较平滑的最优解。

为了验证该方法的反演效果，分别采用 Trust-TSVD、IPN-TSVD、Trust-IPN-TSVD 三种方法对模拟产生的 200～500 nm 单峰、100～700 nm 双峰分布颗粒的噪声相关函数进行反演，噪声水平分别为 0.001，0.005，0.01。其中，单峰颗粒模拟分布函数的参数分别为 $u=0.7$；$\sigma=1.4$；$\alpha_{\max}=500$ nm；$\alpha_{\min}=200$ nm。双峰模拟分布函数的参数分别为 $u_1=3.8$；$\sigma_1=2.1$；$u_2=-2.4$；$\sigma_2=2.0$；$\alpha_{\max}=700$ nm；$\alpha_{\min}=100$ nm。模拟实验参数同上。反演中，单峰、双峰分布颗粒的反演范围分别为[150,600]，[1,800]（单位 nm），两种颗粒的反演间隔数、反演初值均为 100、0。上述三种方法的颗粒反演结果及数据分别如图 3、4 及表 2、3 所示。

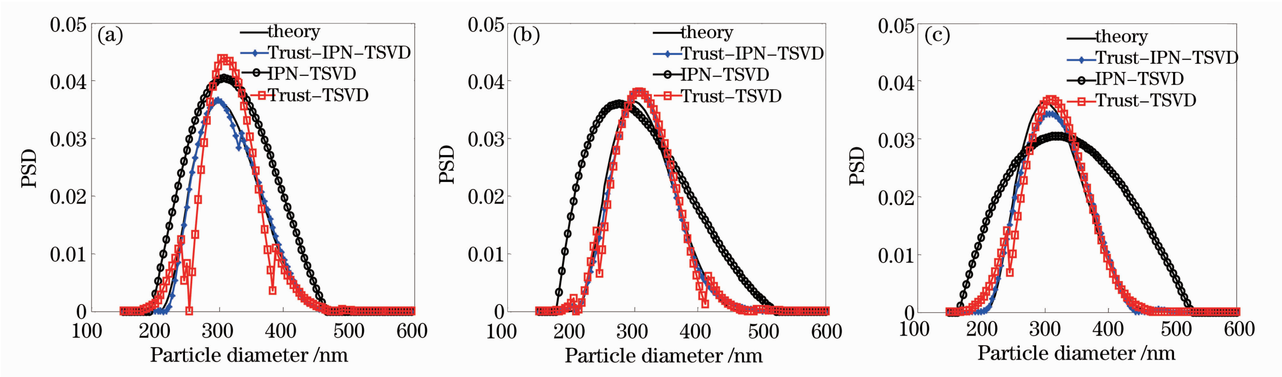

图 3　不同噪声水平下单峰分布颗粒的反演粒径分布。(a) 0.001；(b) 0.005；(c) 0.01

Fig. 3　Inversion PSD of unimodal particles at different noise levels. (a) 0.001; (b) 0.005; (c) 0.01

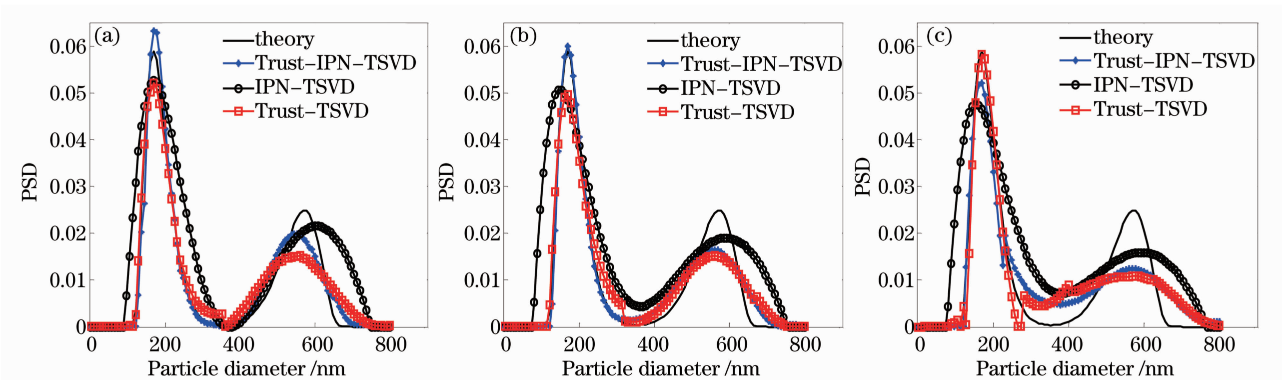

图 4　不同噪声水平下双峰分布颗粒的反演粒径分布。(a) 0.001；(b) 0.005；(c) 0.01

Fig. 4　Inversion PSD of bimodal particles at different noise levels. (a) 0.001; (b) 0.005; (c) 0.01

表 2　不同噪声水平下单峰分布颗粒的反演数据

Table 2　Inversion data of unimodal particles at different noise levels

Noise level	Trust-TSVD			IPN-TSVD			Trust-IPN-TSVD		
	Peak value /nm	Peak value error /%	Relative error	Peak value /nm	Peak value error /%	Relative error	Peak value /nm	Peak value error /%	Relative error
0.001	303.5	1.68	0.2920	307.5	3.02	0.3995	298.5	0	0.0459
0.005	307.5	3.02	0.1367	276.0	7.54	0.5401	307.5	3.02	0.0838
0.01	312.0	4.52	0.1539	316.5	6.03	0.5945	307.5	3.02	0.0826

表 3 不同噪声水平下双峰分布颗粒的反演数据

Table 3 Inversion data of bimodal particles at different noise levels

Noise levels	Trust-TSVD			IPN-TSVD			Trust-IPN-TSVD		
	Peak value /nm	Peak value error /%	Relative error	Peak value /nm	Peak value error /%	Relative error	Peak value /nm	Peak value error /%	Relative error
0.001	168.79 560.30	0 1.41	0.2169	168.79 600.25	0 5.62	0.5069	168.79 560.30	0 1.41	0.1623
0.005	168.79 560.30	0 1.41	0.2278	152.81 592.26	9.47 4.22	0.5920	168.79 560.30	0 1.41	0.1691
0.01	168.79 576.28	0 1.41	0.3061	152.81 584.27	9.47 2.81	0.5899	168.79 568.29	0 0	0.2893

从图 3、4 及表 2、3 可以看出，相对于 Trust-TSVD 法，Trust-IPN-TSVD 法的反演 PSD 峰值误差、相对误差都不同程度地减小，200～500 nm 单峰、100～700 nm 双峰分布颗粒最多可分别改善峰值误差、相对误差为 1.68%、0.2461，1.41%、0.0587，且 Trust-IPN-TSVD 法的反演 PSD 与理论 PSD 吻合更好，它的平滑性具有明显改善。相对于 IPN-TSVD 法，Trust-IPN-TSVD 法的反演 PSD 峰值误差、相对误差都明显地改善了，200～500 nm 单峰、100～700 nm 双峰分布颗粒最多可以分别改善峰值误差、相对误差为 4.52%、3.710，9.47%、0.4229，Trust-IPN-TSVD 法的 PSD 明显变窄，与理论 PSD 吻合更好。从上述分析可以看出，Trust-IPN-TSVD 法能够结合 Trust-TSVD 法和 IPN-TSVD 法的各自优点进行反演，在噪声水平为 0.001～0.01 时，都可以得到符合理论分布的反演结果，能够用于 DLS 反演。

4 实验数据反演

由动态光散射颗粒测量系统[18]获得实测颗粒相关函数，样品颗粒系为 450 nm 的单峰及 60 nm 与 300 nm 的双峰标准聚苯乙烯乳胶颗粒系，散射角为 90°，实验介质为水，实验温度为 25 ℃。分别采用 Trust-TSVD、IPN-TSVD、Trust-IPN-TSVD 三种方法对实验颗粒进行反演，反演结果及反演数据如图 5 及表 4 所示。在反演中，单峰、双峰分布颗粒的反演范围分别为[300,600]、[0,400]（单位 nm），两种颗粒反演间隔数及反演初值均为 80、0。

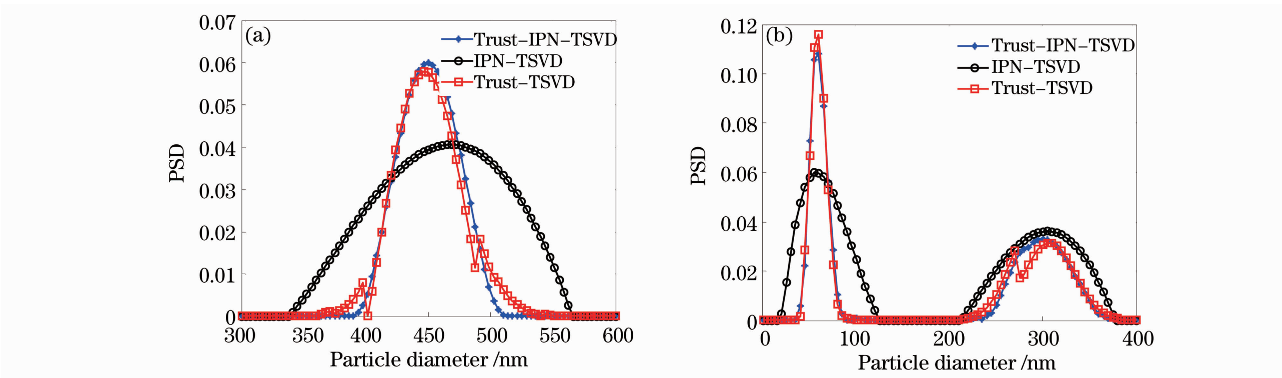

图 5 实测颗粒的反演粒径分布。(a) 450 nm；(b) 60，300 nm

Fig. 5 Inversion PSD of experimental particles. (a) 450 nm; (b) 60, 300 nm

表 4 实测颗粒的反演数据

Table 4 Inversion data of experimental particles

Method	450 nm		60, 300 nm	
	Peak value /nm	Peak value error /%	Peak value /nm	Peak value error /%
Trust-TSVD	450	0	60.85, 305.23	1.42, 1.74
IPN-TSVD	468.75	4.17	55.86, 305.23	6.90, 1.74
Trust-IPN-TSVD	450	0	60.85, 300.25	1.42, 0.08

由图 5 及表 4 可以看出，Trust-TSVD 法及 Trust-IPN-TSVD 法对单峰分布颗粒反演峰值误差均为 0，但 Trust-IPN-TSVD 方法的平滑性明显优于 Trust-TSVD 方法。对于双峰分布颗粒，相对于 Trust-TSVD 方法，Trust-IPN-TSVD 方法的 PSD 平滑性更好、峰值误差可改善 1.66%。对于 IPN-TSVD 方法，它的反演 PSD 更宽，峰值误差较大，而采用了 Trust-IPN-TSVD 方法后，单峰、双峰分布颗粒反演 PSD 的峰值误差分别可改善 4.17%、5.48%。因此，从实测颗粒的分析可以得出与模拟数据一致的结论。

5　结　　论

针对 DLS 的病态反演问题，考虑 PSD 的非负性及截断奇异值法的抗干扰性，比较了 Trust-TSVD 及 IPN-TSVD 非负约束法的特性，并结合两者特性，提出了一种 Trust-IPN-TSVD 反演方法。该方法继承了 Trust 及 IPN 非负约束截断奇异值方法的优点。通过模拟 200～500 nm 单峰、100～700 nm 双峰分布颗粒三种方法的反演结果可以看出，相对于 Trust-TSVD 法，Trust-IPN-TSVD 法的反演 PSD 具有较小的峰值误差、相对误差以及较好的平滑性。相对于 IPN-TSVD 法，Trust-IPN-TSVD 法的反演 PSD 同样具有较小的峰值误差、相对误差，且有较窄的分布宽度。总体而言，Trust-IPN-TSVD 方法的反演 PSD 具有更高的精度及较好的平滑性，更符合理论分布。最后，450 nm 单峰及60 nm与 200 nm 双峰分布实测颗粒的反演证实了该结论。

参　考　文　献

1 U. Kätzel, R. Bedrich, M. Stintz *et al*.. Dynamic light scattering for the characterization of polydisperse fractal systems: I. Simulation of the diffusional behavior [J]. *Part. Part. Syst. Charact.*, 2008, **25**(1): 9～18

2 Cheng Yanting, Shen Jin, Liu Wei *et al*.. Normalization of autocorrelation function for multiple tau photon correlator [J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(2): 444～448
成艳亭，申　晋，刘　伟 等. 多 tau 光子相关器中自相关函数的归一化方法研究[J]. 中国激光，2009，**36**(2)：444～448

3 C. Batz-Sohn. Particle sizes of fumed oxides: a new approach using PCS signals [J]. *Part. Part. Syst. Charact.*, 2003, **20**(6): 370～378

4 D. E. Koppel. Analysis of macromolecular polydispersity in intensity correlation spectroscopy: the method of cumulants [J]. *J. Chem. Phys.*, 1972, **57**(11): 4814～4820

5 S. W. Provencher. CONTIN: a general purpose constrained regularization program for inverting noisy linear algebraic and integral equations [J]. *Comput. Phys. Commun.*, 1982, **27**(3): 229～242

6 B. E. Dahneke. Measurement of Suspended Particles by Quasi-Elastic Light Scattering [M]. New York: Wiley Interscience, 1983

7 J. G. McWhirter, E. R. Pike. On the numerical inversion of the Laplace transform and similar Fredholm integral equations of the first kind [J]. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1978, **11**(9): 1729～1745

8 I. D. Morrison, E. F. Grabowski. Improved techniques for particle size determination by quasi-elastic light scattering [J]. *Langmuir*, 1985, **1**(4): 496～501

9 Yunfei Sun, J. G. Walker. Maximum likelihood data inversion for photon correlation spectroscopy [J]. *Meas. Sci. Technol.*, 2008, **19**(11): 115302

10 L. M. Gugliotta, G. S. Stegmayer, L. A. Clementi *et al*.. A neural network model for estimating the particle size distribution of dilute latex from multiangle dynamic light scattering measurements [J]. *Part. Part. Syst. Charact.*, 2009, **26**(1-2): 41～52

11 A. R. Roig, J. L. Alessandrini. Particle size distributions from static light scattering with regularized non-negative least squares constraints [J]. *Part. Part. Syst. Charact.*, 2006, **23**(6): 431～437

12 T. F. Coleman, Li Yuying. An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds [J]. *SIAM J. Optim.*, 1996, **6**(2): 418～445

13 Wang Yajing, Shen Jin, Zheng Gang *et al*.. A dynamic light scattering inversion method combining Tikhonov regularization method with multi-grid technique [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2012, **20**(5): 963～971
王雅静，申　晋，郑　刚 等. Tikhonov 正则化与多重网格技术相结合的动态光散射反演[J]. 光学 精密工程，2012，**20**(5)：963～971

14 S. Bellavia, M. Macconi, B. Morini. An interior point Newton-like method for nonnegative least-squares problems with degenerate solution [J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2006, **13**(10): 825～846

15 P. C. Hansen. Regularization tools: a Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems [J]. *Numerical Algorithms*, 1994, **6**(1): 1～35

16 P. C. Hansen, D. P. O'Leary. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems [J]. *SIAM J. Sci. Comput.*, 1993, **14**(6): 1487～1503

17 A. B. Yu, N. Standish. A study of particle size distributions [J]. *Power Technol.*, 1990, **62**(2): 101～118

18 Yang Hui, Zheng Gang, Zhang Renjie. Measurement of nanoparticle sizes by variance of temporal coherence of dynamic light scattering [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2011, **19**(7): 1546～1551
杨　晖，郑　刚，张仁杰. 用动态光散射时间相干度法测量纳米颗粒粒径[J]. 光学 精密工程，2011，**19**(7)：1546～1551

栏目编辑：胡　冰