研究自适应光学非等晕性的统一方法

陈京元 周 钰 常 翔 熊耀恒

（中国科学院国家天文台 云南天文台，云南 昆明 650011）

摘要 利用横向谱滤波方法，给出研究自适应光学非等晕性的一般关系式。在特殊场合，对这些一般关系式进行解析求解，获得与经典理论一致的结果。进一步定义了与自适应光学系统非等晕性有关的一些特征量。在一般应用场合，这些一般关系式只能求得数值解。以激光测月自适应光学系统为例，说明了所述一般关系式在研究自适应光学非等晕性问题方面的应用。

关键词 大气光学；自适应光学；大气湍流；非等晕性；横向功率谱方法

中图分类号 O43 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/CJL201340.0413001

Unified Method for Anisoplanatism of Adaptive Optical Systems

Chen Jingyuan Zhou Yu Chang Xiang Xiong Yaoheng

(*National Astronomical Observatories/Yunnan Observatories, Chinese Academy of Sciences, Kunming, Yunnan* 650011, *China*)

Abstract The general formularies to study the anisoplanatism of adaptive optical systems are constructed by the transverse spectral filtering method. At some peculiar situation, these formularies can be expressed to explicit form, and the classical scalar law and the relevant characteristic scale can be obtained and generalized. While in general, only numerical values can be obtained. As an example, the lunar laser ranging system with an adaptive optics (AO) to correct the uplink beam is used to explain the use of these formularies to study the anisoplanatism of AO systems.

Key words atmospheric optics; adaptive optics; atmospheric turbulence; anisoplanatism; transverse spectral filtering method

OCIS codes 010.1290; 010.1330; 110.0115; 110.1080

1 引 言

自适应光学[1]（AO）是为了缓解大气湍流的光学效应而发展的一种新兴技术。其基本原理是相位共轭补偿，即通过实时探测出光束通过大气湍流传播过程中产生的波前相位扰动，在此基础上对扰动波前施加与探测值等值反向的相位，从而抵消光束波前畸变获得光束或光学系统成像品质的改善。显然，其中的关键要素之一即是对大气湍流产生的随机波前相位扰动的实时探测。目前，人们一般通过探测位于目标附近某一特定光源（称为信标或导星）的相位扰动来获得所需校正相位。

然而，由于信标光与目标光的性质和状态差异，以及所通过的大气湍流未必相同，这样它们各自所导致的波前相位扰动也未必相同。这种差异会给校正带来误差，这就是AO系统的非等晕误差[2]。等晕性或非等晕性表征的是光场相干性或者相干性的丧失，在AO系统的分析和设计过程中，它们给出系统性能的一种最基本的限制，值得重点关注。

在各种具体应用场合，信标有各不相同的形态和性状，AO系统的非等晕性表现也各不相同。例如，应用AO系统进行天文观测时，在一些极其稀少的场合，观测目标有足够亮度可以直接作为信标使用；这时AO系统可以获得较好的补偿效果，可认为非等晕误差为零，即校正是等晕的。但对于天文学家一般感兴趣的较暗天体，为了使用AO技术观测，此时需要在目标附近寻找适当的信标[所谓自然导星（NGS）]以检测大气扰动；由于信标光与目标光传播方向不同，这将导致所谓的角度非等晕误差[3]。在更普遍的应用场合，很难找到满足基本要求的NGS，必须在地球大气圈底层人工制造适当信标[4][如钠信标、瑞利信标等激光导星（LGS）]后，使用AO系统进行观测才有可能；此时由于目标与信标海拔高度不同，将会

收稿日期： 2012-08-12；**收到修改稿日期：** 2012-11-19

基金项目： 国家自然科学基金（11103070）资助课题。

作者简介： 陈京元（1976—），男，博士，副研究员，主要从事自适应光学的天文应用方面的研究。

E-mail: chenjingyuan@ynao.ac.cn

导致通常所谓的聚焦非等晕误差[5]。此外,天文观测目标通常可近似为点源,当使用具有一定扩展尺度的信标时,也将导致某种程度的非等晕误差[6]等等。

除了上述由信标和目标的各自不同具体性态而导致的非等晕外,AO 系统的非等晕性有更广泛的含义。目前,许多由 AO 系统本身所引入的误差也可归入非等晕性概念中。比如,由于大气湍流在不断的变化发展,而波前畸变的探测、重构以及校正指令的实施等过程都需要适当的时间,于是最终的校正相位和探测所得扰动相位间必然存在时间上的差异,这将导致 AO 系统的所谓的时间延迟非等晕性[7~9]。又如,许多系统使用不同的孔径分别实施波前的探测和校正过程,这也将导致所谓的分离孔径非等晕性[10];对于很多特殊的应用,分离孔径系统的研究是必不可少的,比如空载激光 AO 系统,即使波前的探测和校正使用的系统是同一孔径,但由于空载平台本身的运动,系统本质上仍然是分离孔径的。再如,目前成功运行的多数 AO 系统都只在可见光波段进行波前探测(由于背景噪声较大,红外探测相对较难),而在红外波段进行校正或观测(进行可见光波段的校正相对较难),这种波长的差别也会导致所谓的色差(光谱偏移)非等晕性[11]等等。

使问题变得更为复杂的是,在 AO 系统的大多数应用中,各种非等晕效应一般都是同时存在的,而且它们间是高度耦合的。以一颗典型的 LGS 为例进行说明。由于大气湍流的影响,上行激光束显然无法会聚成理想的点源而必将随大气湍流的随机扰动而漂移扩展成面(或体)源,而且激光发射器指向有一定误差,发射激光波长也与校正波长各不相同(如对钠信标,须为 589 nm),于是除了通常考虑的聚焦非等晕外,必然同时存在关于扩展信标不等晕、角度非等晕以及色差非等晕等其他多种形式的非等晕效应。

AO 领域对各种形式的非等晕效应进行过长期大量的研究,并获得了影响它们的主要因素以及相应的标度律[2~12]。然而,当考虑系统总体非等晕效应时,一般都是先验地假设各种非等晕效应是相互独立的,总体效应则为各单独效应的简单相加。显然,这种经典理论体系有很大的局限性,无法获得 AO 系统非等晕性的准确描述。

虽然已有多位学者对各种非等晕效应的关联作用及其总体效果进行了大量的研究[13,14],但基本上仍然局限于两三种非等晕效应的讨论之中,方法也很凌乱。本文将进一步推广文献[15]中所述研究非等晕性的一般方法,使其包含更多非等晕性的场合。通过进一步推广,这一方法将可以给出 AO 系统中大多数重要非等晕效应的统一描述,并实质上给出各非等晕效应间统计关联和总体非等晕效应的一种与经典理论不同的自洽的描述方式。

2　一般几何位置关系及横向功率谱方法

图 1 示出双孔系统的一般位置关系[9]。图中两中心位置坐标分别为 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{s}}$,$\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}$,相距 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{s}}$ 的两分离孔径分别表示波前补偿孔径(与发射型系统对应,则为光束发射孔径)和波前探测孔径;两个光源分别代表观测目标(与发射型系统对应,则为光束会聚点)和信标光源,位于坐标 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{t}}$,$\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}}$,与视场中心偏离角度分别为 $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{t}}$ 和 $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{b}}$;高度 z 处示出的是大气湍流层。容易求出两孔径中心分别与两个光源连线在大气湍流层上的投影间距离矢量为

$$\boldsymbol{s}_z=\gamma_z\boldsymbol{d}+(\gamma_z-\alpha_z)\boldsymbol{r}_{\mathrm{s}}+A_{\mathrm{tc}z}\boldsymbol{r}_t-A_{\mathrm{bs}z}\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}},\tag{1}$$

式中 $A_{\mathrm{bs}z}=[z-(\boldsymbol{r}_{\mathrm{s}}\cdot\hat{z})]/[(\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{s}})\cdot\hat{z}]$,$A_{\mathrm{tc}z}=[z-(\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}\cdot\hat{z})]/[(\boldsymbol{r}_{\mathrm{t}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}})\cdot\hat{z}]$,而 α_z 和 γ_z 为与发射光源和信标光源相应的传播参数。它们间关系为 $\alpha_z=1-A_{\mathrm{bs}z}$,$\gamma_z=1-A_{\mathrm{tc}z}$。

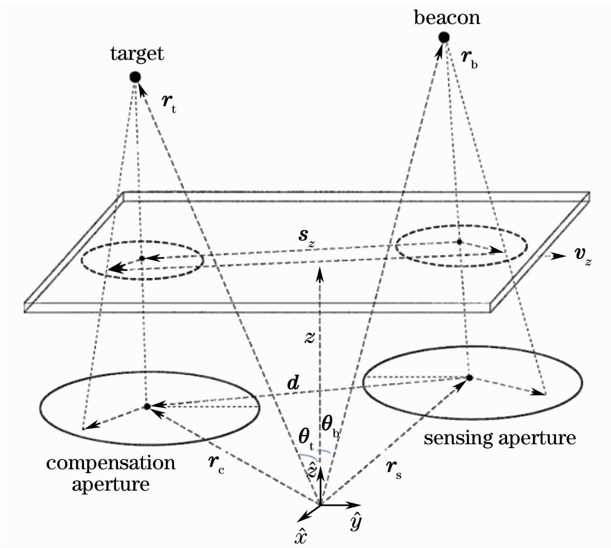

图 1　一般几何位置关系图

Fig. 1　General geometry of adaptive optical system

(1)式为最一般的 AO 系统几何位置关系。在特殊情形,可以进一步简化。非等晕问题研究中,两光源偏离视场中心一般都很小。假设双孔共水平面,若选择波前探测孔径位置为坐标原点,目标和信标海拔高度分别为 L 与 H(假设 $H<L$),则(1)式简化为

$$\boldsymbol{s}_z=\gamma_z\boldsymbol{d}+z\boldsymbol{\theta},\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{t}}-\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{b}}$ 为目标和信标角间距,而传播因子

简化为 $\gamma_z=1-z/L$，$\alpha_z=1-z/H$。

进一步考虑校正时间延迟，则有

$$\boldsymbol{s}_z=\gamma_z\boldsymbol{d}+z\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{v}_z\tau,\tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{v}_z$ 表示横向风速度，而 τ 为校正时间延迟。

Sasiele 等[16,17]发展的横向滤波技术，是处理湍流中光传播问题非常有效的方法。按照这一方法，当忽略衍射时，光波在湍流中传播距离为 L，有关物理量的方差可以写为

$$\sigma^2=2\pi k_0^2\int_0^L\mathrm{d}z\left[\int\Phi(\boldsymbol{\kappa},z)f(\boldsymbol{\kappa},z)\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\right],\tag{4}$$

式中 k_0 为波数；$\Phi(\boldsymbol{\kappa},z)$ 为湍流折射率功率谱；$f(\boldsymbol{\kappa},z)$ 即为有关物理量的横向功率谱滤波函数，其具体形式与所求解的物理量及相应物理过程有关。

对一般大气湍流，湍流折射率功率谱一般可以写为(假设各向同性)

$$\Phi(\boldsymbol{\kappa},z)=0.033C_n^2(z)g(\kappa)\kappa^{-11/3},\tag{5}$$

式中波矢量 $\boldsymbol{\kappa}=(\kappa,\varphi)$，$C_n^2(z)$ 为高度 z 处折射率结构常数，$g(\kappa)$ 为湍谱修正因子。若 $g(\kappa)=1$，则不考虑修正，此即 K41 湍谱。常用的湍谱修正有 Von-Karman，Tartaski，以及指数间歇性修正等类型。例如，Tartaski 引入的修正因子为

$$g(\kappa)=[1+(\kappa_o/\kappa)^2]^{-11/6}\exp[-(\kappa/\kappa_i)^2],\tag{6}$$

其中 κ_o，κ_i 分别表征与湍流内外尺度相对应的波数。

由(4)式和(5)式并对波矢量 $\boldsymbol{\kappa}$ 及 z 传播方向积分，可得

$$\sigma^2=0.4146\pi k_0^2\int_0^L\mathrm{d}zC_n^2(z)I_{\mathrm{F}}(z),\tag{7}$$

其中对波矢量径向和角分量的积分分别为

$$I_{\mathrm{F}}(z)=\int_0^\infty F(\kappa,z)g(\kappa)\kappa^{-8/3}\mathrm{d}\kappa,\tag{8}$$

$$F(\kappa,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\kappa,z)\mathrm{d}\varphi.\tag{9}$$

显然，当 $z\geqslant H$ 时，有

$$f(\kappa,z)=|G(\gamma_z\kappa)|^2,\tag{10}$$

而 $z<H$ 时，则有

$$f(\kappa,z)=|G(\gamma_z\kappa)\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{s}_z)-G(\alpha_z\kappa)G_{\mathrm{s}}(\kappa,z)|^2.\tag{11}$$

(10)式和(11)式中 γ_z 和 α_z 分别为目标和信标光波传播因子；$G_{\mathrm{s}}(\kappa,z)$ 为由于信标具有一定空间扩展尺度而引入的滤波函数；$G(\kappa)$ 为所求解量的滤波函数。这里将各种物理系统或过程用简单的线性理论描述，因此总的滤波谱算符表述为一系列具体过程各自谱滤波算符之积。对于一般 AO 应用问题的研究，这种假设是合理的。

下面列出本文涉及到的几个滤波函数。由于信标具有一定空间扩展尺度而引入的滤波函数，常用的有均匀圆形面源和高斯源。对角尺度为 θ_{r} 均匀圆形面源，有

$$G_{\mathrm{s}}(\kappa,z)=2\mathrm{J}_1(\kappa\theta_{\mathrm{r}}z)/(\kappa\theta_{\mathrm{r}}z),\tag{12}$$

J_n 表 n 阶贝塞尔函数；而对角尺度为 θ_{r} 的高斯分布源，则有

$$G_{\mathrm{s}}(\kappa,z)=\exp[-(\kappa\theta_{\mathrm{r}}z)^2/2].\tag{13}$$

对点源，有

$$G_{\mathrm{s}}(\kappa,z)=1.\tag{14}$$

若所求物理量为光场总相位，则滤波函数为

$$G_\phi(\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\rho})=\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}),\tag{15}$$

式中 $\boldsymbol{\rho}$ 为目标光束与大气湍流层的相交位置矢量，其实际上就是波矢量 $\boldsymbol{\kappa}$ 的共轭矢量。

径向和轴向级次分别为 n,m 的相位 Zernike 分量滤波函数的具体表达式形式与轴向级次有关。若 $m=0$，可以写为

$$G_{n,0}(\kappa)=(-1)^{n/2}N_n(\kappa).\tag{16}$$

若 $m\neq0$，则有

$$\left.\begin{matrix}G_{n,m}^x(\kappa)\\G_{n,m}^y(\kappa)\end{matrix}\right\}=\mathrm{i}^m\sqrt{2}(-1)^{(n-m)/2}N_n(\kappa)\left\{\begin{matrix}\cos(m\varphi)\\\sin(m\varphi)\end{matrix}\right.,\tag{17}$$

$$N_n(\kappa)=2\sqrt{n+1}\frac{\mathrm{J}_{n+1}(\kappa D/2)}{(\kappa D/2)},\tag{18}$$

式中 D 为圆孔直径大小。

由上述各有关滤波函数表达式，即可以建立 AO 系统相位扰动及其各阶 Zernike 分量功率谱滤波函数的具体表达式。

对于光场总相位，当 $z<H$ 时，由(11)式与(15)式有

$$F_\phi(\kappa,z)=1-2\mathrm{J}_0(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{s}_z)N_0[\kappa(\gamma_z-\alpha_z)]\times G_{\mathrm{s}}(\kappa,z)+G_{\mathrm{s}}^2(\kappa,z).\tag{19}$$

当 $z\geqslant H$ 时，则由(10)式与(15)式有

$$F_\phi(\kappa,z)=1.\tag{20}$$

类似地，可以求出相位 Zernike 分量功率谱滤波函数。对 $z<H$，Zernike 分量当轴向级次为 0 时谱滤波函数可由(11)式与(16)式求出，结果为

$$F_{n,0}(\kappa,z)=N_n^2(\gamma_z\kappa)+N_n^2(\alpha_z\kappa)G_{\mathrm{s}}^2(\kappa,z)-2N_n(\gamma_z\kappa)N_n(\alpha_z\kappa)G_{\mathrm{s}}(\kappa,z)\mathrm{J}_0(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{s}_z).\tag{21}$$

而当轴向级次不为 0 时，对 Zernike 模式 x,y 两个分量，由(11)式和(17)式分别有

$$F_{n,m}^x(\kappa,z)=N_n^2(\gamma_z\kappa)+N_n^2(\alpha_z\kappa)G_{\mathrm{s}}^2(\kappa,z)-2N_n(\gamma_z\kappa)N_n(\alpha_z\kappa)G_{\mathrm{s}}(\kappa,z)[\mathrm{J}_0(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{s}_z)-(-1)^m\mathrm{J}_{2m}(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{s}_z)],\tag{22}$$

以及

$$F^{x}_{n,m}(\kappa,z)=N_n^2(\gamma_z\kappa)+N_n^2(\alpha_z\kappa)G_s^2(\kappa,z)-2N_n(\gamma_z\kappa)N_n(\alpha_z\kappa)G_s(\kappa,z)[J_0(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{s}_z)+(-1)^m J_{2m}(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{s}_z)].\tag{23}$$

容易看出,若定义

$$F_{n,m}(\kappa,z)=F^{x}_{n,m}(\kappa,z)+F^{y}_{n,m}(\kappa,z),\tag{24}$$

则上述三式可统一写为

$$F_{n,m}(\kappa,z)=C_m[N_n^2(\gamma_z\kappa)+N_n^2(\alpha_z\kappa)G_s^2(\kappa,z)-2N_n(\gamma_z\kappa)N_n(\alpha_z\kappa)G_s(\kappa,z)J_0(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{s}_z)],\tag{25}$$

其中 C_m 为与轴向阶次有关的常数因子,当 $m=0$ 时,$C_m=1$;否则,$C_m=2$。

同理,可求出 $z\geqslant H$ 时各阶 Zernike 分量功率谱滤波函数,结果为

$$F_{n,m}(\kappa,z)=C_m N_n^2(\gamma_z\kappa).\tag{26}$$

3　可解析求解的特例

上节中建立了研究非等晕的基本表达式。若单独考虑的某种形式的非等晕性,可获得与经典 AO 理论一致的解析结果。这一部分将考虑一些特例。其中关于信标尺度非等晕、聚焦非等晕、角度非等晕等三种类型的非等晕,已进行过分析[15],不再重复。只是对于角度非等晕性,将补充定义几个有关特征量。

先列出这一部分将使用的一些积分表达式。它们是关于一般 Zernike 相位非等晕谱滤波算符

$$F_{n,m}(\kappa,z)=2N_n^2(\gamma_z\kappa)[1-J_0(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{s}_z)].$$

对函数的波矢量积分

$$I_n(z)=\int_0^\infty \mathrm{d}\kappa F_{n,m}(\kappa,z)\kappa^{-8/3}.\tag{27}$$

当 $|s_z|\geqslant\gamma_z D$ 时,具体结果为

$$I_n(z)=(n+1)\Gamma\left(n-\frac{5}{6}\right)(\gamma_z D)^{5/3}\left[\frac{2^{1/3}\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)\Gamma\left(n+\frac{23}{6}\right)}-\frac{{}_3F_2\left(n-\frac{5}{6},n-\frac{5}{6},n+\frac{3}{2};n+2,2n+3;\left|\frac{\gamma_z D}{s_z}\right|^2\right)}{2^{2n+5/3}\Gamma\left(\frac{11}{6}-n\right)\Gamma^2(n+2)\left|\frac{\gamma_z D}{s_z}\right|^{-2n+5/3}}\right].\tag{28}$$

这里 Γ(•)表示 Gamma 函数,$_3\Gamma_2$(•)表示超几何函数。进一步,若有 $|s_z|\gg\gamma_z D$,则按小参数 $\left|\frac{\gamma_z D}{s_z}\right|$ 展开 k 积分到二阶, 可得渐近表达式为

$$I_n(z)=2^{1/3}\frac{(1+n)\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{6}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)\Gamma\left(\frac{23}{6}+n\right)}(\gamma_z D)^{5/3}+\left|\frac{\gamma_z D}{s_z}\right|^{2n}\times\left[-\frac{2^{-2n-5/3}(1+n)\Gamma\left(n-\frac{5}{6}\right)(\gamma_z D)^{5/3}}{\Gamma\left(\frac{11}{6}-n\right)\Gamma(2+n)^2\left|\frac{\gamma_z D}{s_z}\right|^{5/3}}+\frac{(1+n)(2+n)\Gamma\left(\frac{1}{6}+n\right)}{2^{2n-8/3}\Gamma\left(\frac{5}{6}-n\right)\Gamma(3+n)^2}\left|\frac{\gamma_z D}{s_z}\right|^{1/3}(\gamma_z D)^{5/3}+O\left|\frac{\gamma_z D}{s_z}\right|^{7/3}\right].\tag{29}$$

而当 $|s_z|<\gamma_z D$ 时, 具体积分结果则为

$$I_n(z)=2^{1/3}(n+1)(\gamma_z D)^{5/3}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{6}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)\Gamma\left(n+\frac{23}{6}\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{6}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)\Gamma\left(n+\frac{23}{6}\right)}{}_3F_2\left(-\frac{11}{6},-n-\frac{17}{6},n-\frac{5}{6};-\frac{4}{3},1;\left|\frac{s_z}{\gamma_z D}\right|^2\right)-\frac{\Gamma\left(-\frac{7}{3}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{10}{3}\right)}\left|\frac{s_z}{\gamma_z D}\right|^{14/3}{}_3F_2\left(\frac{1}{2},-n-\frac{1}{2},n+\frac{3}{2};\frac{10}{3},\frac{10}{3};\left|\frac{s_z}{\gamma_z D}\right|^2\right)\right].\tag{30}$$

进一步若有 $|s_z|\ll\gamma_z D$,可按小参数 $\left|\frac{s_z}{\gamma_z D}\right|$ 展开到四阶求得渐近解

$$I_n(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)(1+n)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)}\left(\frac{\gamma_z D}{2}\right)^{5/3}\left[\frac{11\Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right)}{2\Gamma\left(n+\frac{17}{6}\right)}\left|\frac{s_z}{\gamma_z D}\right|^2-\frac{55\Gamma\left(n+\frac{7}{6}\right)}{16\Gamma\left(n+\frac{11}{6}\right)}\left|\frac{s_z}{\gamma_z D}\right|^4+O\left|\frac{s_z}{\gamma_z D}\right|^{14/3}\right].\tag{31}$$

3.1 分离孔径非等晕性误差及有关特征尺度

首先考虑探测孔径和校正孔径存在物理分离时的非等晕效应。令(19)式中 $\tau=0,\theta=0$，并考虑 $\gamma_z=\alpha_z=1, G_s(\kappa,z)=1$，这时非等晕误差中将不包含关于时间延迟、角度、高度(聚焦)及信标尺度等方面的不等晕性。将(19)式代入(7)式积分，可得

$$\sigma_\phi^2=(d/d_0)^{5/3}, \tag{32}$$

其中特征尺度

$$d_0=0.314r_0, \tag{33}$$

这里 r_0 即为相干尺度或 Fried 参数，定义为

$$r_0=(0.423k_0^2\mu_0)^{-3/5}, \tag{34}$$

其中 μ_m 为湍流结构函数 m 阶矩。可见分离孔径相位方差与孔径分离距离满足 5/3 幂标度律，特征尺度约为大气相干尺度的 1/3。

一般平移相位误差在成像和 AO 校正系统中并无意义，可以剔除。但一般无法求出去除平移分量的相位方差解析解，只能求出渐近解。为求渐进解，先求出非等晕谱滤波算符的波矢量积分 $I_{\phi\,\mathrm{eff,aniso}}=I_\phi-I_0$ 的渐进解，结果可由 $n=0$ 时上面所列积分渐近表达式获得。

当 $d\gg D$ 时，将积分展开到 (D/d) 的二阶，结果为

$$I_{\phi\,\mathrm{eff,aniso}}\sim\left(\frac{D}{2}\right)^{5/3}\times\left[-\frac{4\Gamma\left(-\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)\Gamma\left(\frac{23}{6}\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{4\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\left(\frac{D}{d}\right)^{1/3}\right]. \tag{35}$$

当 $d\ll D$ 时，将积分 $I_{\phi\,\mathrm{eff,aniso}}$ 展开到 (d/D) 的四阶项，结果为

$$I_{\phi\,\mathrm{eff,aniso}}\sim\left(\frac{D}{2}\right)^{5/3}\left\{-\frac{\Gamma\left(-\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}\left(\frac{d}{D}\right)^{5/3}+\frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{5}{6}\right)\left(\frac{d}{D}\right)^2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)\Gamma\left(\frac{23}{6}\right)}\left[\frac{51425}{41472}\left(\frac{d}{D}\right)^2-\frac{935}{144}\right]\right\}. \tag{36}$$

另一方面，易求出单一波束无平移相位谱滤波函数波矢量积分为

$$I_{\phi\,\mathrm{eff,single}}=-\frac{2\Gamma\left(-\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)\Gamma\left(\frac{23}{6}\right)}\left(\frac{D}{2}\right)^{5/3}. \tag{37}$$

由上面几式容易看出，当孔径分离距离足够远时，方差渐趋于两倍单波无平移相位方差。这是可以预期的，因为孔径分离距离足够远时，两光束统计相关性逐渐丧失，互相独立。同时也可以看出，当孔径分离距离很小时，无平移分量相位方差与孔径分离距离间仍满足(32)式所示的 5/3 幂标度律。

显然，对 AO 系统，如果无平移非等晕误差大于单波无平移误差即

$$\sigma^2_{\phi\,\mathrm{eff,aniso}}\big|_{d\ll D}>\sigma^2_{\phi\,\mathrm{eff,single}}, \tag{38}$$

则 AO 校正系统是无效的(因为校正无法减小误差)，可将满足此式的最小 d 值定义为无效校正间距。可求出其具体值为

$$d_{\mathrm{unc}}=0.828D. \tag{39}$$

另一方面，如果 AO 系统达到较好的性能，必须使校正残余误差足够小。与经典的大气等晕角定义类似，可以定义校正残余误差为 1 时的孔径分离距离为最大等晕距离。由(32)式所示标度律，等晕距离 $d_{\mathrm{iso}}=d_0$。

显然，d_{unc} 和 d_{iso} 分别从不同角度对 AO 系统给出基本的限制，分离孔径 AO 系统的有效校正距离应该由这两个特征尺度的较小者确定，即

$$d_{\mathrm{eff}}=\mathrm{Min}\{d_{\mathrm{iso}},d_{\mathrm{unc}}\}. \tag{40}$$

一般地，总有 $d_{\mathrm{iso}}<d_{\mathrm{unc}}$，这样相位有效校正距离即为

$$d_{\mathrm{eff}}=d_{\mathrm{iso}}=d_0. \tag{41}$$

对一般 Zernike 相位分量，也可进行类似的分析和定义。

由上面所列积分渐近表达式，当 $d\ll D$ 时，积分近似为

$$I_{n,m}(z)=C_m\frac{11\Gamma(7/3)\Gamma(n+1/6)(1+n)}{2^{8/3}\sqrt{\pi}\Gamma(17/6)\Gamma(17/6+n)}\left(\frac{d}{D}\right)^2D^{5/3}, \tag{42}$$

对 z 积分即可得到 Zernike 相位方差的渐近值

$$\sigma^2_{n,m}=0.879C_mk_0^2\frac{(1+n)\Gamma(n+1/6)}{\Gamma(n+17/6)D^{1/3}}\mu_0d^2. \tag{43}$$

若定义 $\sigma^2_{n,m}=1$ 时的 d 值为相应 Zernike 相位最大等晕距离 $d_{n,m;\mathrm{iso}}$，则有

$$\sigma^2_{n,m}=(d/d_{n,m;\mathrm{iso}})^2, \tag{44}$$

可求出其具体大小为

$$d_{n,m;\mathrm{iso}}=\frac{1.067}{k_0\mu_0^{1/2}}\sqrt{\frac{\Gamma(n+17/6)D^{1/3}}{C_m(n+1)\Gamma(n+1/6)}}. \tag{45}$$

对单一波束($n\geqslant1$)时

$$I_{n,m;\mathrm{single}}(z)=C_m\frac{\Gamma(7/3)\Gamma(n-5/6)(1+n)}{2^{2/3}\sqrt{\pi}\Gamma(17/6)\Gamma(n+23/6)}D^{5/3}. \tag{46}$$

显然当非等晕方差大于相应单波方差时，校正是无效果的。可求出满足此式的最小间距为

$$d_{n,m;\mathrm{unc}}=\frac{12D}{\sqrt{11(6n-5)(6n+17)}}.\qquad(47)$$

将最大等晕间距与最小无效校正间距中的小者定义为有效校正间距

$$d_{n;\mathrm{eff}}=\underset{m}{\mathrm{Min}}(d_{n,m;\mathrm{iso}},d_{n,m;\mathrm{unc}}),\qquad(48)$$

其大小是能进行有效大气湍流校正的最大孔径间距。这里求最小算符求值范围遍及所有满足条件的 m 值，所以按此定义的特征量已不再依赖于 m 值。

3.2　时间延迟和角度非等晕性及其有关的特征量

类似于上述对分离孔径非等晕的分析，可以获得时间延迟非等晕的特征量。容易求出，忽略其他非等晕性时，总相位非等晕误差满足标度律

$$\sigma_{\phi}^{2}=(\tau/\tau_{0})^{5/3},\qquad(49)$$

其中 τ_0 即为通常定义的大气相干时间，其大小为

$$\tau_{0}=(2.913k_{0}^{2}\nu_{5/3})^{-3/5},\qquad(50)$$

式中 ν_n 表大气湍流 n 阶速度矩。Fried 指出[8]，τ_0 与大气 Greenwood 频率 $f_0=(0.103k_0^2\nu_{5/3})^{3/5}$ 有近似关系

$$\tau_{0}=0.134/f_{0},\qquad(51)$$

容易验证这一近似关系。

类似地，可求出剔除平移分量后的相位有效校正时间

$$\tau_{\mathrm{eff}}=\tau_{0},\qquad(52)$$

以及 n 阶 Zernike 相位分量的有效校正时间

$$\tau_{n;\mathrm{eff}}=\underset{m}{\mathrm{Min}}(\tau_{n,m;\mathrm{iso}},\tau_{n,m;\mathrm{unc}}).\qquad(53)$$

其中，容易求出

$$\tau_{n,m;\mathrm{unc}}=\frac{12D\sqrt{\mu_{0}/\nu_{2}}}{\sqrt{11(6n-5)(6n+17)}},\qquad(54)$$

而 $\tau_{n,m;\mathrm{iso}}$ 的具体表达式也可类似求出。由上面所列积分渐进表达式，当 $v_z\tau\ll D$ 时，对 z 积分即可得到 Zernike 相位方差的渐近值，其大小为

$$\sigma_{n,m}^{2}=0.879\frac{(1+n)\Gamma(n+1/6)}{\Gamma(n+17/6)}C_{m}k_{0}^{2}D^{-1/3}\nu_{2}\tau^{2}.\qquad(55)$$

若定义 $\sigma_{n,m}^2=1$ 时的 τ 值为相应 Zernike 相位的最大等晕延迟时间 $\tau_{n,m;\mathrm{iso}}$，则有标度律

$$\sigma_{n,m}^{2}=(\tau/\tau_{n,m;\mathrm{iso}})^{2},\qquad(56)$$

于是得到最大等晕延迟时间的具体表达式为

$$\tau_{n,m;\mathrm{iso}}=\frac{1.067}{k_{0}\nu_{2}^{1/2}}\sqrt{\frac{\Gamma(n+17/6)D^{1/3}}{C_{m}(n+1)\Gamma(n+1/6)}}.\qquad(57)$$

套用 Fried 关于大气相干时间和 Greenwood 频率间关系式(51)式，进一步定义与 Zernike 相位相关的特征频率

$$f_{n,m;\mathrm{iso}}=0.127k_{0}\nu_{2}^{1/2}\sqrt{\frac{C_{m}(n+1)\Gamma(n+1/6)}{\Gamma(n+17/6)D^{1/3}}}.\qquad(58)$$

当 $n=1,m=1$ 时，即得与倾斜分量相应的特征频率

$$f_{1,1;\mathrm{iso}}=0.486\lambda^{-1}\nu_{2}^{1/2}D^{-1/6}.\qquad(59)$$

需要说明，这一结果与文献中广泛使用的 Tyler 频率[9]略有不同。Tyler 频率一般定义为

$$f_{\mathrm{T}}=K_{\mathrm{T}}\lambda^{-1}\nu_{2}^{1/2}D^{-1/6},\qquad(60)$$

其中对于 G 倾斜，$K_{\mathrm{T}}=0.331$，而对于 Z 倾斜 $K_{\mathrm{T}}=0.368$。实际上，Tyler 频率是根据单个轴向分量定义的，而这里的定义则对两轴向分量进行了求和，如(24)式所示。如果只考虑一个方向(假设两方向互相独立且方差大小相等)，则结果应为 $K_{\mathrm{T}}=0.3439$，与 Tyler 频率基本一致。

类似地，对角度非等晕性，也可以定义类似的特征量。对任意 n 阶 Zernike 相位模式分量，有效校正间距可定义为

$$\theta_{n;\mathrm{eff}}=\underset{m}{\mathrm{Min}}(\theta_{n,m;\mathrm{iso}},\theta_{n,m;\mathrm{unc}}),\qquad(61)$$

其值表征能进行有效大气校正的信标与目标最大偏角。容易求出，最小无效校正角

$$\theta_{n,m;\mathrm{unc}}=\frac{12D\sqrt{\mu_{0}/\mu_{2}}}{\sqrt{11(6n-5)(6n+17)}},\qquad(62)$$

而最大非等晕角[15]则为

$$\theta_{n,m;\mathrm{iso}}=\frac{1.067}{k_{0}\mu_{2}^{1/2}}\sqrt{\frac{\Gamma\left(n+\frac{17}{6}\right)D^{1/3}}{C_{m}(n+1)\Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right)}}=\frac{6.34}{k_{0}\mu_{2}^{1/2}}\sqrt{\frac{D^{1/3}\Gamma\left(n+\frac{23}{6}\right)\Big/\Gamma\left(n-\frac{5}{6}\right)}{C_{m}(1+n)(36n^{2}+72n-85)}},\qquad(63)$$

即为径向和轴向级次分别为 n 与 m 的 Zernike 模式分量的最大等晕角，其物理含义为使此模式分量方差为 1 时信标和目标方位角偏角大小。其中，当 $n=1,m=1$ 时，$\theta_{1,1;\mathrm{iso}}=1.224(k_0^2\mu_2D^{-1/3})^{-1/2}$，此即倾斜等晕角[17]或称等运动角的具体表达式。

4　月球激光测距系统的波前自适应校正

月球激光测距(LLR)的困难之一在于[18]：由于发射光能绝大部分损失在大气传输路径中，回波光子数目极其稀少，因此探测难度极大。可见提高返回光子数是改善 LLR 系统性能的重要举措。大气

通道中损失的能量有多种不同的物理机制，其中由于大气湍流运动而导致的损失(包括光束抖动、扩展和闪烁等效应)是一项很重要的组成部分。为减缓大气湍流导致的能量损失，可以考虑引入自适应光学技术实时校正大气湍流[19]。这一部分考虑双站型(发射孔径与接收孔径不同，即为分离孔径)LLR系统大气校正的非等晕问题，这是本文所述非等晕统一方法具体应用的一个简单例子。

本文主要研究非等晕误差(关于 LLR AO 系统性能更全面的分析，将在另一文中进行[20])。实际上，对双站型 LLR AO 系统，除了双孔径是分离的，可用自然信标(如月球上 Aldrin，Collins 等特征位置)与目标(Apollo 11，Apollo 15 等)也是分离的，因此同时存在多种非等晕效应。在(19)式和(25)式中令 $G_s(\boldsymbol{\kappa},z)=1$，$L=H$，有

$$F_{\phi}(\boldsymbol{\kappa},z) = 2[1-\mathrm{J}_0(s_z\boldsymbol{\kappa})], \tag{64}$$

$$F_{n,m}(\boldsymbol{\kappa},z) = 2C_m N_n^2(\gamma_z\boldsymbol{\kappa})[1-\mathrm{J}_0(s_z\boldsymbol{\kappa})], \tag{65}$$

其中 $s_z = \gamma_z d + z\theta + v_z\tau, \gamma_z = 1 - z/L$。

将非等晕滤波算符，代入(7)式积分，即可获得总非等晕误差的大小。

下面给出一些数值计算结果。本文的计算中，以云台测距系统为基准[21]，选择系统口径 $D=1.2$ m，$L=3.8\times10^{8}$ m。使用 K41 湍谱，及 Hufnagal-Valley 湍流结构常数剖面模型

$$\begin{aligned} C_n^2(z) =& C_n^2(0)\exp(-z/100) + 2.7\times10^{-16}\times \\ & \exp(-z/1500) + 0.00594(w/27)^2\times \\ & (10^{-5}z)^{10}\exp(-z/1000), \end{aligned} \tag{66}$$

其中 w 为伪风速度大小。大气横向风速度满足 Bufton 风模型

$$v_z = 30\exp\left[-\left(\frac{z-9400}{4800}\right)^2\right]. \tag{67}$$

首先在图 2～图 9 中示出本文定义的一些特征量的典型大小，及其有关影响因素。其中图 2 示出有关孔径分离的几个特征量随 Zernike 径向阶数的变化关系，其中 $n=0$ 时数据表示去除平移分量时的相应特征量。可以看出，等晕距离随 Zernike 径向阶数的增加而增加，而无效校正距离则随轴向阶数的增加而减小。因此，当径向阶次较小时(如进行倾斜，离焦等低阶校正)，有效校正距离由等晕距离决定；而当径向阶数较大时，有效校正距离则由无效校正距离决定。图 3 示出不同湍流强度下有效校正距离随校正阶次的变化。

图 4～图 9 示出与三种非等晕(孔径分离 $d_{n,\mathrm{eff}}$，时间延迟 $t_{n,\mathrm{eff}}$ 以及信标偏角 $\theta_{n,\mathrm{eff}}$)有关的特征尺度

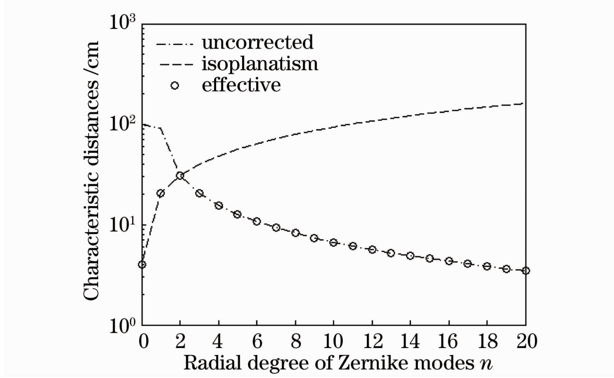

图 2 分离孔径非等晕性的三种特征尺度间关系
(532 nm，$r_0=10$ cm)

Fig. 2 Relationship among three characteristic lengths for anisoplanatism of separated apertures

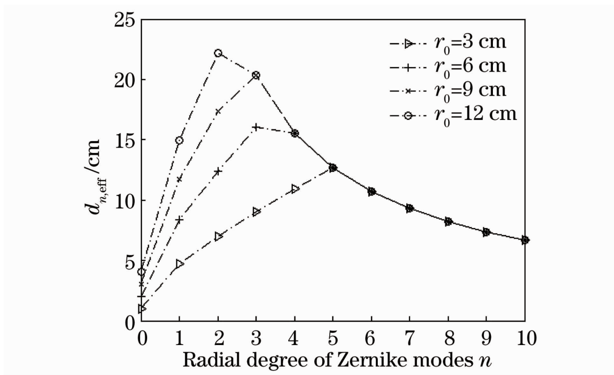

图 3 不同湍流强度下校正有效分离距离大小(532 nm)

Fig. 3 Effective compensational distances at different turbulent intensities at $\lambda=532$ nm

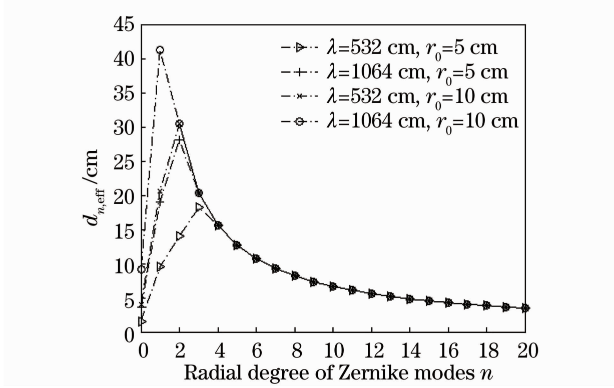

图 4 不同湍流强度和校正波长下，校正有效分离距离大小

Fig. 4 Effective compensational distances at different turbulent intensities and wavelengths

随不同波长(分别为 532 nm 的可见光及 1064 nm 红外)和湍流强度(大气相干尺度分别为 5 和10 cm)的变化关系。其中图 4 和图 5 示出孔径有效分离距离，图 6 和图 7 为校正时间延迟特征量，图 8 和图 9 示出校正有效信标偏角。可以看出，三种非等晕特

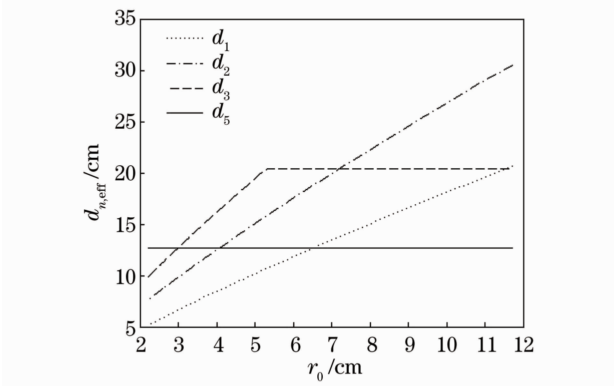

图 5　不同 Zernike 校正阶次下，校正有效分离距离大小随湍流强度的变化(532 nm)

Fig. 5　Relationship between effective compensational distances and turbulence intensities for four different compensational orders at $\lambda=532$ nm

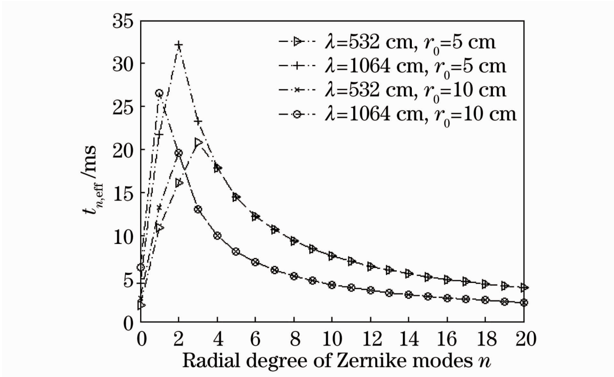

图 6　不同湍流强度和校正波长下，校正有效时间延迟大小

Fig. 6　Effective compensational time-delays at different turbulent intensities and wavelengths

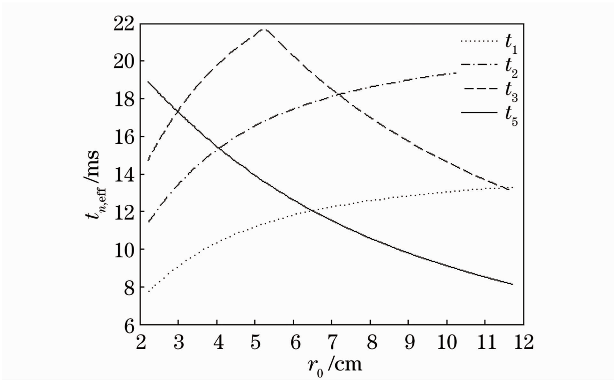

图 7　不同 Zernike 校正阶次下，校正有效分离距离大小随湍流强度的变化(532 nm)

Fig. 7　Effective compensational time-delays versus turbulence intensities for four different compensational orders at $\lambda=532$ nm

征尺度具有类似的性质。一个明显的不同在于，分离孔径的无效校正距离与波长和湍流强度无关，仅由孔径大小决定，如(47)式所示。因此，对于较高阶的 Zernike 模式，有效校正间距也仅由孔径大小决定。同时可以看出，对倾斜、离焦、像散等几个比较低阶的 Zernike 模式，其有效校正距离要大于总相位有效校正距离，因此如果只对这几个低阶模式进行校正，孔径间可以有较大的分离距离。同样的结论对于角度和时间延迟非等晕也是成立的。对于角度非等晕，实际上就正是使用激光信标可以放宽自然信标要求从而部分解决 AO 系统所谓信标难题的主要原因之一。

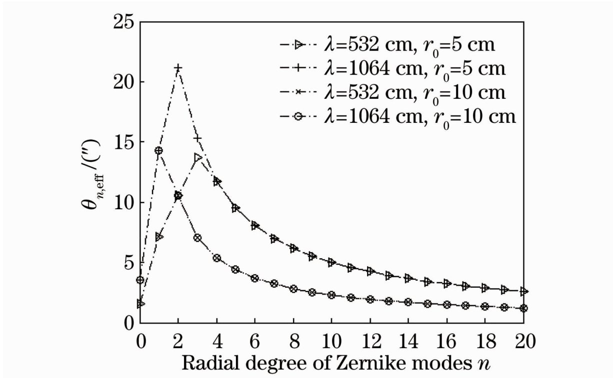

图 8　不同湍流强度和校正波长下，校正有效信标偏角

Fig. 8　Effective compensational off-axis angles of a NGS at different turbulent intensities and wavelengths

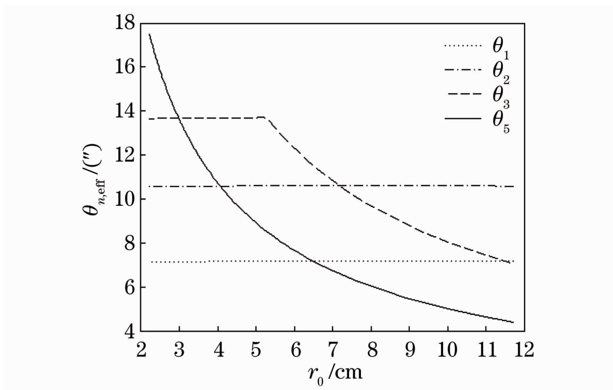

图 9　不同 Zernike 校正阶次下，校正有效信标偏角大小随湍流强度的变化(532 nm)

Fig. 9　Relationship between effective compensational off-axis angles of a NGS and turbulence intensities for four different compensational orders at $\lambda=532$ nm

图 10～图 12 示出不同校正方式下，相位残余误差方差的大小。其中图 10 与图 11 分别示出校正到不同阶次时，校正相位残余误差方差随孔径分离距离和时间延迟大小的变化关系，这里示出的是 532 nm 波长在 $r_0=10$ cm 时的情形。图 10 示出孔径分离距离从 0 到 40 cm 时，分别校正到 1 阶、2 阶、3 阶和 5 阶 Zernike 模式后误差大小。图 11 示

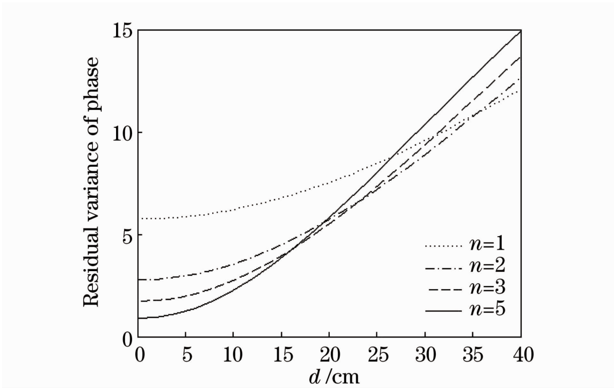

图 10 λ＝532 nm 和 r_0＝10 cm 时，不同 Zernike 校正阶次下，校正残余误差与孔径分离距离的变化关系

Fig. 10 Relationship between residual phase variances and separated distances for four different compensational orders at λ＝532 nm and r_0＝10 cm

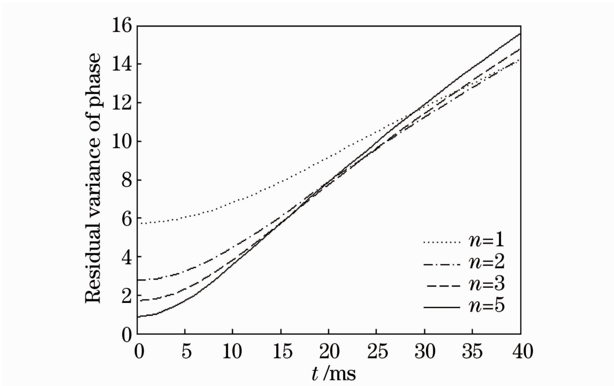

图 11 不同 Zernike 校正阶次下，校正残余误差与校正时间延迟的变化关系

Fig. 11 Relationship between residual phase variances and corrected time-delays for different compensational orders

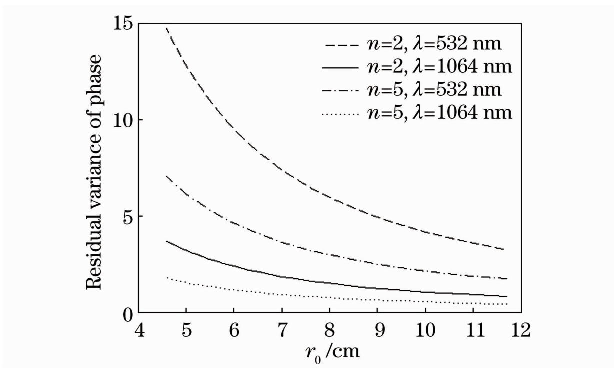

图 12 不同波长和 Zernike 校正阶次下，残余误差随湍流强度的变化关系

Fig. 12 Relationship between residual phase variances and turbulent intensities for different compensational orders and different wavelengths

出校正时间延迟从 0 到 40 ms 时，分别校正到 1 阶、2 阶、3 阶和 5 阶 Zernike 模式后误差大小。一般说来，校正误差随孔径分离距离增加而增加，到一定距离处趋于饱和，基本上也不随校正阶次增加而减小，更大间距时(当超过上面定义的几个特征尺度大小时)误差甚至会随校正阶数的增加反而增加。

图 12 示出不同湍流强度时，同时具有孔径分离和时间延迟两种非等晕性时校正残余误差的大小。这里的孔径分离距离为 5 cm，时间延迟为 2 ms。图中示出两种不同波长分别进行 2 阶和 5 阶校正的结果。

5 结　　论

本文进一步完善了自适应光学系统的非等晕性研究的一般方法[15]。通过推广，这一方法将可以给出 AO 系统中大多数重要非等晕效应的统一描述。实际上，引言所述的各种非等晕效应中，除了色差非等晕外，其他所有非等晕效应都已经纳入本文统一方法框架之中。其实，采用类似的步骤，很容易将色差非等晕效应也纳入这一方法中。不过，研究表明[11]，色差非等晕效应是相当微弱的，在一般 AO 系统性能的评估中基本上都可以忽略。

从本质上说，统一方法实际上给出了各种非等晕效应间统计关联以及总体非等晕效应的一种新的描述方式。这种描述方式克服了经典理论中先验的统计无关假设，给出 AO 系统总体非等晕效应的一种自洽的描述方式。

在特殊场合下，统一模型给出与经典理论一致的结果。也给出了等晕距离、统计无关距离、有效校正距离等一系列特征量的定义，并确定了其渐进估计表达式；它们推广了经典理论中倾斜等晕角，Tyler 频率等基本特征量(推广到任意阶 Zernike 模式，而不仅限于倾斜分量)，对于一般自适应光学系统的分析和设计有现实的指导意义。

作为简单例子，给出双站激光测月自适应光学系统的一些数值结果，进一步说明了所述统一方法在自适应光学系统设计和分析中的具体应用。

参 考 文 献

1 J. W. Hardy. Adaptive Optics for Astronomical Telescopes[M]. Oxford: Oxford University Press, 1998. 1～348

2 R. J. Sasiela. Strehl ratios with various types of anisoplanatism [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1992, **9**(8): 1398～1405

3 D. L. Fried. Anisoplanatism in adaptive optics[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(1): 52～61

4 B. M. Welsh, C. S. Gardner. Effects of turbulence-induced anisoplanatism on the imaging performance of adaptive-

astronomical telescopes using laser guide stars[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1991, **8**(1): 69～80
5 R. J. Sasiela. Wave-front correction by one or more synthetic beacons[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**(1): 379～393
6 P. D. Stroud. Anisoplanatism in adaptive optics compensation of a focused beam using distributed beacons[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1996, **13**(4): 868～874
7 G. A. Tyler. Turbulence-induced adaptive optics performance degradation: evaluation in the time domain[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1984, **1**(3): 251～262
8 D. L. Fried. Time-delay-induced mean-square error in adaptive optics[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1990, **7**(7): 1224～1225
9 G. A. Tyler. Bandwith considerations for tracking through turbulence[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**(1): 358～367
10 M. R. Whiteley, M. C. Roggemann, B. M. Welsh. Temporal properties of the Zernike expansion coefficients of turbulence-induced phase aberrations for aperture and source motion[J]. *J. Opt. Soc. Am*, 1998, **15**(4): 993～1005
11 E. P. Wallner. Minizing atmospheric dispersion on compersated imaging[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**(3): 407～409
12 Rao Changhui, Jiang Wenhan, Ling Ning. Anisoplanatism limitations for low-order mode correction adaptive optical system [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(11): 1486～1493
饶长辉，姜文汉，凌　宁. 低阶模式校正自适应光学系统的非等晕限制[J]. 光学学报，2000，**20**(11)：1486～1493
13 S. Esposito, A. Riccardi. Focus anisoplanatism effects on tip-tilt compensation for adaptive optics with use of a sodium laser beacon as a tracking reference[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1996, **13**(9): 1916～1923
14 M. A. Van Dam, R. J. Sasiela, A. H. Bouchez *et al.*. Angular anisoplanatism in laser guide star adaptive optics[C]. *SPIE*, 2006, **6272**: 627231～627238
15 Chen Jingyuan. Geometric anisoplanatism of adaptive optics system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(4): 922～927
陈京元. 自适应光学系统的几何非等晕性[J]. 光学学报，2010，**30**(4)：922～927
16 R. J. Sasiela. Electromagnetic Wave Propagation in Turbulence: Evaluation and Application of Mellin Transforms[M]. New York: Springer-Verlag, 2007
17 R. J. Sasiela, J. D. Shelton. Transverse spectral filtering and Mellin transform techniques applied to outer scale on tilt and tilt isoplanatism[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(4): 646～660
18 J. O. Dickey, P. L. Bender, J. Faller *et al.*. Lunar laser ranging: a continuing legacy of the Apollo program[J]. *Science*, 1994, **265**(5171): 482～490
19 Stefan Riepla, Wolfgang Schlütera, Ulrich Schreiber. Evaluation of an SLR adaptive optics system[C]. *SPIE*, 1999, **3865**: 90～95
20 Chen Jingyuan, Chang Xiang, Zhou Yu *et al.*. A statistical analysis of the received photons for a LLR system with adaptive optics to compensate the atmospheric turbulence[J]. *Chinese J. Lasers*, 2013, **40**(3): 0313001
陈京元，常　翔，周　钰 等. 月球激光测距自适应光学系统回波统计分析[J]. 中国激光，2013，**40**(3)：0313001
21 Zheng Xiangming, Li Zhulian, Fu Honglin *et al.*. 1.2 m telescope satellite co-optical path kHz laser ranging system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(5): 0512002
郑向明，李祝莲，伏红林 等. 云台 1.2 m 望远镜共光路千赫兹卫星激光测距系统[J]. 光学学报，2011，**31**(5)：0512002

栏目编辑：王晓琰