

月球激光测距自适应光学系统回波统计分析

陈京元 常翔 周钰 熊耀恒

(中国科学院国家天文台 云南天文台, 云南 昆明 650011)

摘要 以强度起伏 Gamma-Gamma 分布模型为基础, 研究月球激光测距自适应光学系统的回波统计性质。建立了包含整个测距光束传播过程的光场强度或回波光子数涨落的完全统计描述即概率密度函数的具体表达式。以此为基础, 计算了一般条件和场景下激光测月的回波光子数平均值、起伏方差、概率密度函数、累积概率函数等一系列统计量, 从而获得系统性能改善的基本的定量估计。

关键词 测量; 大气湍流; 月球激光测距; 自适应光学; 非等晕性

中图分类号 O43 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201340.0313001

Statistical Analysis of Received Photons for Lunar Laser Ranging System with Adaptive Optics

Chen Jingyuan Chang Xiang Zhou Yu Xiong Yaoheng

(National Astronomical Observatories, Yunnan Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Kunming, Yunnan 650011, China)

Abstract Based on the Gamma-Gamma distribution of the intensity fluctuation for light propagating in random media, the statistical properties of received photons of a lunar laser ranging (LLR) system are studied, in which an adaptive optics system is equipped to correct the effect of atmospheric turbulence. A completely statistical description, i. e., the probability density functions of the fluctuation of the received photons, is presented which takes into account most of optical processes. On this basis, a series of characteristic quantities of the received photons, including average value, fluctuation variance, cumulative probability function, and so on, are calculated in the general conditions of the atmospheric turbulence. With these characteristic quantities, a performance evaluation of the LLR adaptive-optics system is obtained quantitatively.

Key words measurement; atmospheric turbulence; lunar laser ranging; adaptive optics; anisoplanatism

OCIS codes 010.1290; 010.1330; 110.0115; 110.1080

1 引言

经过 40 多年的发展, 卫星激光测距 (SLR) 已经取得了巨大进展, 测量精度已经由最初第一代系统的几米提高到目前第三代的几厘米, 并正向第四代 (毫米级) 发展^[1]。月球作为地球唯一的自然卫星, 精确测量月地距离具有重要的科学和应用价值, 比如通过月球激光测距 (LLR) 可以检验广义相对论的等效原理, 也可以测定地球和月球的一系列运动特征参数及其随时间的变化过程^[2~5]。因此, 发展 LLR 技术一直是备受瞩目的项目。

然而, LLR 是极具挑战的工作, 目前全球只有

国外的少数几个观测站具有激光测月的能力, 主要原因之一在于月地距离十分遥远, 有限的发射能量大多数损失在大气中, 而且月球上的后向反射镜尺寸极小, 接收望远镜口径受限, 因此回波光子数目非常稀少, 一般条件下都不足一个光子。

根据回波衰减的物理机制, 可以采取相应措施提高回波光子数, 比如, 为了缓解大气湍流的影响, 可以使用自适应光学 (AO) 技术^[6]对发射光束进行补偿^[7~10]。初步研究表明, 即使只对大气湍流的最低阶模式倾斜分量进行补偿, 激光测月回波光子数即可大大增加^[7,10]。因此, 使用自适应光学技术将

收稿日期: 2012-08-02; 收到修改稿日期: 2012-11-19

基金项目: 国家自然科学基金 (10778705) 资助课题。

作者简介: 陈京元 (1976—), 男, 博士, 副研究员, 主要从事自适应光学的天文应用方面的研究。

E-mail: chenjingyuan@ynao. ac. cn

会大大改善 LLR 系统性能,增加激光测月成功率,具有光明的前景。

本文将对激光测月的自适应补偿技术做进一步的理论分析,给出系统性能更为细致的评估。首先概述了强度起伏理论现状以及作为分析基础的 Gamma-Gamma 分布模型,然后给出自适应校正残余误差及谱滤波函数的基本表达式,研究了激光测月过程接收光强或接收光子数涨落的概率密度函数,并给出了一些具体计算结果。

2 随机连续介质中光传输问题研究概况

随机介质中的光波传播问题,与人类的生产与生活密切相关,很早就引起了人们的广泛注意,但这一领域的迅速发展^[11]是从上个世纪中期开始的,其中取得极大成功的方法由 Tatarskii 创立。他引入 Rytov 变换,很机智地使用微扰方法求解基本波动方程,建立了所谓经典 Rytov 理论^[12](也称光滑微扰论)。但后来的研究发现,经典微扰论只在弱涨落条件下非常狭窄的范围内才是有效的,它只考虑单次散射而忽略多次散射效应。但一般涨落条件下随机介质中的波传播问题是相当复杂的课题,时至今日自治的理论研究体系仍然没有建立。关于这方面的探索仍然是当前的研究热点和前沿,各种新的方法和技术手段仍然层出不穷,但其中取得较大成功的方法仍然是先验近似方法,如 Andrews 等^[13]最近发展的广义 Rytov 近似理论是这方面努力的典型代表。

在具体应用问题中,最受关注的是强度起伏的概率分布。但与随机介质中光传输基础理论领域的进展类似,关于一般涨落条件下的强度起伏概率分布也仍然是未解之谜。对于弱起伏大气湍流的光场强度起伏,目前人们一致认为满足对数正态分布,该分布可以由弱涨落的经典 Rytov 理论说明。在非常强的起伏区(饱和区),强度起伏应该满足负指数分布(瑞利分布),因为饱和区的统计性质与热辐射相似,是高斯型的。而在非渐近区,强度起伏的概率分布的一般形式则一直是争论的焦点,目前也并无统一的认识。迄今,已出现了许多关于强度起伏的概率分布的不同结果,典型的有对数正态分布、K 分布及 I-K 分布、对数正态调制 Rician 分布(即 Bechman 分布)等。这些结果都是相当先验的,不是由第一原理导出的。实验结果表明,对数正态调制 Rician 分布是符合较好的强度起伏分布函数,应

用中可以用它作为普遍适用的分布形式。然而,这一分布以积分的形式表达,使用时很不方便。

最近 Andrews 等^[13~15]根据广义 Rytov 理论建立 Gamma-Gamma 分布模型。这一模型形式简单,物理含义明确,与各种实验结果吻合得也相当好,因此近来广泛应用于各种具体问题的研究。实际上,可以将 Gamma-Gamma 分布替代对数正态调制 Rician 分布。Gamma-Gamma 分布的具体形式如下:

$$P(I) = 2 \frac{(\alpha\beta I)^{(\alpha+\beta)/2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)I} K_{\alpha-\beta}(2\sqrt{\alpha\beta I}), \quad (1)$$

式中 α 及 β 为两个待定参数; K_n 表示 n 阶第二类变型 Bessel 函数;对平行光束,当内尺度为 0 时,其中两个参数可由经典 Rytov 理论确定:

$$\alpha = 1/\{\exp[0.49\sigma_R^2(1+1.11\sigma_R^{12/5})^{-7/6}]-1\}, \quad (2)$$

$$\beta = 1/\{\exp[0.51\sigma_R^2(1+0.69\sigma_R^{12/5})^{-5/6}]-1\}, \quad (3)$$

式中 σ_R^2 为根据经典 Rytov 理论计算而得的强度方差,由于弱涨落区满足对数正态分布,故有

$$\sigma_R^2 = 4\sigma_\chi^2, \quad (4)$$

式中 σ_χ^2 为对数幅度 χ 涨落方差。

本文将以强度起伏的 Gamma-Gamma 分布为理论基础考虑大气湍流及其自适应校正对激光测月过程的影响。

3 自适应校正及其校正残余误差方差表达式

自适应校正的基本原理是相位共轭补偿。根据所测出的受大气扰动的相位畸变,控制波前校正器形状或位置使其产生共轭(反向)的相位畸变,从而抵消(或部分抵消)大气湍流的影响。根据经典 Rytov 理论,相位和对数幅度起伏方差可以统一表示为^[16,17]

$$\sigma^2 = 0.4146\pi k_0^2 \int_0^L dz C_n^2(z) \int_0^\infty d\kappa F(\kappa, z) g(\kappa) \kappa^{-8/3}, \quad (5)$$

式中 $F(\kappa, z)$ 为与所求解物理量相关的功率谱滤波算符, $C_n^2(z)$ 和 $g(\kappa)$ 分别为湍流结构常数和湍谱校正因子。

下面给出与本文有关的功率谱滤波算符的具体形式。由于相位和对数幅度谱滤波函数两者形式仅有很小区别,下面只列出对数幅度的相应形式。

对于未校正光束,谱滤波算符可以表示为

$$F^{\text{unc}}(\kappa, z, L) = \sin^2[P(\gamma, \kappa, z)], \quad (6)$$

而与 Zernike 模式分量相应的谱滤波算符则为

$$F_{n,m}^{\text{unc}}(\kappa, z, L) = C_m N_n^2(\gamma\kappa) \sin^2[P(\gamma, \kappa, z)], \quad (7)$$

这里 C_m 为与轴向阶次有关的常数因子^[17]，函数 $N_n(\kappa)$ 定义为

$$N_n(\kappa) = 2\sqrt{n+1}J_{n+1}(\kappa D/2)/(\kappa D/2), \quad (8)$$

式中 J_n 表示 n 阶 Bessel 函数。

(7)式中 $P(\gamma, \kappa, z)$ 为衍射因子，与光束传播方向和光束性质有关。如果光束为平行光或点源(为简化问题，本文仅限这种情形)，则衍射因子有简单表达式。对下行光束，衍射因子可表示为

$$P(\gamma, \kappa, z) = \gamma\kappa^2 z / (2k_0), \quad (9)$$

当光束为平面波时， $\gamma=1$ ；若光源为位于 L 的点源，则 $\gamma=1-z/L$ 。对于上行光束，衍射因子则可表示为

$$P(\gamma, \kappa, z) = \gamma\kappa^2 (L-z) / (2k_0), \quad (10)$$

对平面波 $\gamma=1$ ，而对于位于原点的点源则有 $\gamma=z/L$ 。

于是，如果 AO 系统补偿到 N 阶 Zernike 模式，则残余误差谱滤波函数为

$$F_{N_{\text{cor}}}^{\text{unc}}(\kappa, z) = F^{\text{unc}}(\kappa, z, L) - \sum_{n=0}^N \sum_m F_{n,m}^{\text{unc}}(\kappa, z, L). \quad (11)$$

与一般天文成像型系统稍有不同，激光测距 AO 系统为发射型系统，其非等晕谱滤波算符可以表示为

$$F^{\text{ani}}(\kappa, z, L) = \left[\sin\left(\frac{\gamma\kappa^2 L}{2k_0}\right) \cos\left(\frac{\gamma\kappa^2 z}{2k_0}\right) G_S(\kappa, z) \right]^2 + \sin^2\left[\frac{\kappa^2}{2k_0}(L-z)\right] - 2\sin\left[\frac{\kappa^2(L-z)}{2k_0}\right] \sin\left(\frac{\gamma\kappa^2 z}{2k_0}\right) \times \cos\left(\frac{\gamma\kappa^2 z}{2k_0}\right) G_S(\kappa, z) J_0(s_z \kappa), \quad (12)$$

式中 J_0 为 0 阶 Bessel 函数， G_S 表示因后向反射镜具有一定空间扩展尺度而引入的滤波函数。这里，不仅考虑了所谓几何非等晕^[17](信标偏心角度、海拔高度和横向尺度)，也包括了校正时间延迟而导致的非等晕效应；另外假设校正光束是平行光束。以下考虑一般的分离孔径系统^[18]，此时有几何关系

$$s_z = \gamma d + z\theta + v_z \tau, \quad (13)$$

式中 s_z 为两分离孔径中心分别与目标和信标源连线在高度 z 处湍流上的投影间距离，而 d 为孔径分离距离， θ 为目标和信标与偏角， v_z 为横向风速度大小， τ 为校正时间延迟。

对于相位 Zernike 分量，非等晕谱滤波算符可表示为

$$F_{n,m}^{\text{ani}}(\kappa, z, L) = C_m N_n^2(\gamma\kappa) F^{\text{ani}}(\kappa, z, L), \quad (14)$$

这样，对于补偿到 N 阶 Zernike 模式分量的自适应

光学系统，校正残余误差谱滤波函数为

$$F_N(\kappa, z, L) = F_{N_{\text{cor}}}^{\text{unc}}(\kappa, z) + \sum_{n=1}^N \sum_m F_{n,m}^{\text{ani}}(\kappa, z, L), \quad (15)$$

其中前一项表示未校正高阶模式的贡献，后一项则为非等晕误差的贡献。

为克服信标角度非等晕的限制，现代自适应光学系统一般使用人造激光信标(LGS)^[19]，但目前发展的 LGS 技术并不能完全解决角度非等晕问题，仍然需要自然信标(NGS)子系统的配合以校正整体倾斜分量。假设高于 M 阶的 Zernike 模式由 LGS 检测和校正，而低于或等于 M 阶的模式分量(本文后面的计算中取 $M=1$ ，即除了倾斜分量使用 NGS 子系统探测和校正外，其他高阶模式都由 LGS 子系统探测和校正)仍由自然信标检测和校正，则系统校正残余误差谱滤波函数可以表示为

$$F_N(\kappa, z, L, H) = F_{N_{\text{cor}}}^{\text{unc}}(\kappa, z) + \sum_{n=1}^M \sum_m F_{n,m}^{\text{ani}}(\kappa, z, L) + \sum_{n=M+1}^N \sum_m F_{n,m}^{\text{LGS}}(\kappa, z, L, H), \quad (16)$$

这里， $F_{n,m}^{\text{LGS}}$ 表示与 LGS 子系统相应的 N 阶 Zernike 模式分量非等晕功率谱滤波算符，其表达式在 LGS 高度 H 上方和下方各不相同，具体可表示为

$$F_{n,m}^{\text{LGS}}(\kappa, z, L, H) = \begin{cases} F_{n,m}^{\text{unc}}(\kappa, z, L), & z \geq H \\ F_{n,m}^{\text{ani}}(\kappa, z, H), & z < H \end{cases}. \quad (17)$$

4 卫星激光测距系统强度起伏的数学模型

这一部分，建立 LLR AO 系统强度(探测光子数目)起伏的简化数学模型。LLR 的主要光学过程包括上行光束的自适应校正传播过程、月球后向反射器的反射过程、反射光束的下行传输过程和测距望远镜的孔径平均过程等。下面将考虑所有这些物理过程。

4.1 上行光束强度起伏

上行光束强度归一化涨落概率密度函数可表示为 Gamma-Gamma 分布

$$f_{I_{\text{up}}}(I_{\text{up}}) = 2 \frac{(\alpha_u \beta_u I_{\text{up}})^{(\alpha_u + \beta_u)/2}}{\Gamma(\alpha_u) \Gamma(\beta_u) I_{\text{up}}} K_{\alpha_u - \beta_u} \left(2\sqrt{\alpha_u \beta_u I_{\text{up}}} \right), \quad (18)$$

其中上行光束的两个待定参数 α_u, β_u 可根据(2)，(3)式由经典 Rytov 理论对数幅度方差确定。

对于校正到 N 阶 Zernike 模式分量的 AO 系统,对数幅度涨落方差由其对应的谱滤波算符(15)式或(16)式确定。

4.2 下行光束强度涨落及接收孔径平均效应

类似地,下行光束归一化强度起伏概率密度可以表示为

$$f_{I_{\text{down}}}(I_{\text{down}}) = 2 \frac{(\alpha_d \beta_d I_{\text{down}})^{(\alpha_d + \beta_d)/2}}{\Gamma(\alpha_d) \Gamma(\beta_d) I_{\text{down}}} \times K_{\alpha_d - \beta_d} (2 \sqrt{\alpha_d \beta_d I_{\text{down}}}), \quad (19)$$

其中两个下行光束的待定参数 α_d, β_d 也可由经典 Rytov 理论对数幅度涨落方差确定。包括接收孔径平均效应的谱滤波算符应为

$$F_{\text{down}}(\kappa, z) = [G_S(\kappa, z) N_0(\gamma\kappa)]^2, \quad (20)$$

这里进一步考虑了后向反射镜的尺寸效应 $G_S(\kappa, z)$ 。对角尺度为 θ_r 的圆形后向反射镜,有简单的表达式 $G_S(\kappa, z) = 2J_1(\kappa\theta_r z)/(\kappa\theta_r z)$ 。

4.3 双路强度涨落概率密度

显然,包括上行和下行传输过程的归一化强度起伏方差可以表示为

$$I = I_{\text{up}} I_{\text{down}}, \quad (21)$$

于是可得其概率密度函数间满足如下关系:

$$f_I(I) = \int_0^\infty f_{I|I_{\text{up}}}(I | I_{\text{up}}) f_{I_{\text{up}}}(I_{\text{up}}) dI_{\text{up}}, \quad (22)$$

其中

$$f_{I|I_{\text{up}}}(I | I_{\text{up}}) = f_{I_{\text{down}}}\left(\frac{I}{I_{\text{up}}}\right) / I_{\text{up}}, \quad (23)$$

表示条件概率密度。

实际上,与上行光束强度涨落相比,考虑孔径平均效应后的下行强度涨落很小,因此双路强度涨落基本上由上行光束强度涨落决定。近似估计时,可以认为

$$f_I(I) \approx f_{I_{\text{up}}}(I). \quad (24)$$

4.4 回波光子数涨落

容易写出主要传输过程的光子数涨落如下^[20]:

$$n_{\text{up}} = \left(\frac{E_{\text{emt}} \lambda}{hc} \right) \tau_{\text{emt}} \tau_{\text{atm}} \left[\frac{A_{\text{emt}}}{(\lambda R)^2} \right] T_{\text{up}}, \quad (25)$$

$$n_{\text{cube}} = \tau_{\text{cube}} \frac{A_{\text{cube}}}{A_{\text{emt}}} n_{\text{up}}, \quad (26)$$

$$n_{\text{rec}} = n_{\text{cube}} \tau_{\text{atm}} \tau_{\text{rec}} \left(\frac{D_{\text{rec}}}{\theta_{\text{cube}} R} \right)^2 T_{\text{down}}, \quad (27)$$

其中, n_{up} 表示上行光束到达月球后反镜处的光子数起伏, E_{emt} 为发射的单位脉冲能量, $\lambda/(hc)$ 表示单位能量所包含光子数, h, c 分别表示 Planck 常数和光速,另外 3 个因子 $\tau_{\text{emt}}, \tau_{\text{atm}}$ 和 $A_{\text{emt}}/(\lambda R)^2$ 则分别表示发射孔径效率、大气传输通道及光波衍射导致的

信号衰减,其中 A_{emt} 为发射孔径面积(直径 D_{emt}), R 表示月地距离; n_{cube} 表示后反镜反射回的光子数涨落, τ_{cube} 表示后反镜反射效率, A_{cube} 为后反镜面积; n_{rec} 为接收孔径光子数涨落, τ_{rec} 表示接收孔径效率, D_{rec} 为接收孔直径, θ_{cube} 表示后向反射光束发散角。

$T_{\text{up}}, T_{\text{down}}$ 表示相对于无湍流时的强度起伏,无湍流时其值应为 1,它们与归一化强度 $I_{\text{up}}, I_{\text{down}}$ 具有关系

$$T_{\text{up}} = S_{\text{up}} I_{\text{up}}, \quad (28)$$

$$T_{\text{down}} = S_{\text{down}} I_{\text{down}}, \quad (29)$$

其中 S_{up} 与 S_{down} 为标度因子,物理含义即为系统短曝光 Strehl 比,可近似表示为^[6]

$$S_{\text{up}} = \exp(-\sigma_{\phi, \text{up}}^2) + \frac{\exp(-\sigma_{\phi, \text{up}}^2)}{1 + (D_{\text{emt}}/r_0)^2}, \quad (30)$$

$$S_{\text{down}} = \exp(-\sigma_{\phi, \text{down}}^2) + \frac{\exp(-\sigma_{\phi, \text{down}}^2)}{1 + (D_{\text{cube}}/r_0)^2}, \quad (31)$$

这里 $\sigma_{\phi, \text{up}}^2$ 和 $\sigma_{\phi, \text{down}}^2$ 分别表示上下行通道的相位涨落方差。

于是可得接收光子数涨落的具体表达式为

$$n_{\text{rec}} = n_0 S_{\text{up}} S_{\text{down}} I_{\text{up}} I_{\text{down}}, \quad (32)$$

其中 n_0 即为不考虑大气湍流时的回波光子数目,

$$n_0 = E_{\text{emt}} \left(\frac{\lambda}{hc} \right) \frac{A_{\text{cube}}}{(\lambda R)^2} \left(\frac{D_{\text{rec}}}{\theta_{\text{cube}} R} \right)^2 \tau_{\text{atm}}^2 \tau_{\text{emt}} \tau_{\text{cube}} \tau_{\text{rec}}. \quad (33)$$

对(32)式求统计平均,即可以求出接收光子涨落统计矩

$$\langle n_{\text{rec}}^k \rangle = \left(\frac{n_0 S_{\text{up}} S_{\text{down}}}{\alpha_u \beta_u \alpha_d \beta_d} \right)^k \times \frac{\Gamma(\alpha_u + k) \Gamma(\beta_u + k) \Gamma(\alpha_d + k) \Gamma(\beta_d + k)}{\Gamma(\alpha_u) \Gamma(\beta_u) \Gamma(\alpha_d) \Gamma(\beta_d)}. \quad (34)$$

当 $k = 1$ 时, $\langle n_{\text{rec}} \rangle = N_0 S_{\text{up}} S_{\text{down}}$ 。可见考虑大气湍流时平均探测光子数为不考虑大气湍流时的 $S_{\text{up}} S_{\text{down}}$ 倍,而进行大气湍流校正后,Strehl 比相对于未校正时的增加倍数称为平均探测光子数增加倍数。

根据(32)式,可以求出接收光子数涨落概率密度

$$f_n(n) = \frac{f_I[n/(n_0 S_{\text{up}} S_{\text{down}})]}{n_0 S_{\text{up}} S_{\text{down}}}, \quad (35)$$

进一步地,接收光子的累积概率密度函数为

$$f_{\text{CDF}}(N_T) = P(n \leq N_T) = \int_0^{N_T} f_n(n) dn, \quad (36)$$

这里 N_T 表示截止光子数目。

若忽略下行强度涨落,则可进一步求出累积函数的封闭近似解

$$f_{\text{CDF}}(N_T) = \frac{\left(\frac{\alpha_u \beta_u N_T}{S_{\text{up}} S_{\text{down}} n_0}\right)^{\beta_u}}{\sin[\pi(\alpha_u - \beta_u)]} \left[\frac{\pi}{\Gamma(\alpha_u)} {}_1F_2\left(\beta_u; \beta_u + 1, \beta_u - \alpha_u + 1; \frac{\alpha_u \beta_u N_T}{S_{\text{up}} S_{\text{down}} n_0}\right) - \frac{\pi}{\Gamma(\beta_u)} \left(\frac{\alpha_u \beta_u N_T}{S_{\text{up}} S_{\text{down}} n_0}\right)^{\alpha_u - \beta_u} {}_1F_2\left(\alpha_u; \alpha_u + 1, \alpha_u - \beta_u + 1; \frac{\alpha_u \beta_u N_T}{S_{\text{up}} S_{\text{down}} n_0}\right) \right], \quad (37)$$

式中 ${}_1F_2$ 中表示超几何函数。

5 具体应用举例

至此,已经建立了一般激光测月过程的回波光子的完全统计描述,获得回波光光子数涨落的平均值、起伏方差、概率密度函数、累积密度函数等一系列统计量。在各相关表达式中代入系统和环境参数模型,即可获得系统性能改善的基本的定量估计。这一部分,将以云南天文台 1.2 m 激光测距系统^[21]为例给出一些具体的数值计算结果。

使用如下激光测距系统参数:月地距离 $R = 3.8 \times 10^8$ m,发射孔径面积 $A_{\text{emt}} = 0.9590$ m²,发射激光单位脉冲能量 $E_{\text{emt}} = 0.15$ J,发射孔径效率 $\tau_{\text{emt}} = 0.5$,大气传输通道信号衰减率 $\tau_{\text{atm}} = 0.5$ 。对于 Apollo 11 后向反射镜:后反镜面积 $A_{\text{cube}} = 0.34$ m²,接收孔径效率 $\tau_{\text{rec}} = 0.5 \times 0.3$,反射效率 $\tau_{\text{cube}} = 0.2$,后向反射光束发散角 $\theta_{\text{cube}} = 8''$ 。

采用有关的经典模型描述地球大气。湍流结构常数采用 Hufnagal-Valley 剖面模型

$$C_n^2(z) = C_n^2(0) \exp(-z/100) + 2.7 \times 10^{-16} \exp(-z/1500) + 0.00594(\omega/27)^2 (10^{-5}z)^{10} \exp(-z/1000). \quad (38)$$

湍谱以 K41 模型模拟,考虑到内外尺度的影响分别引入修正因子

$$g_{\text{out}}(\kappa) = [1 + (\kappa_{\text{out}}/\kappa)^2]^{-11/6}, \quad (39)$$

$$g_{\text{in}}(\kappa) = \left[1 + 1.802 \left(\frac{\kappa}{\kappa_{\text{in}}}\right) - 0.254 \left(\frac{\kappa}{\kappa_{\text{in}}}\right)^{7/6} \right] \times \exp\left[-\left(\frac{\kappa}{\kappa_{\text{in}}}\right)^2\right], \quad (40)$$

这里内外尺度的截止波数定义为 $\kappa_{\text{in}} = 5.92/l_0$, $\kappa_{\text{out}} = 2\pi/L_0$, l_0 和 L_0 分别为内外尺度大小。设内尺度大小为 1 cm,而外尺度模型则采用

$$L_0(z) = 4 \left/ \left[1 + \left(\frac{z - 8500}{2500}\right)^2 \right] \right|. \quad (41)$$

另外,为了研究时间效应,以经典的 Bufton 风模型

$$v_z = 30 \exp\left[-\left(\frac{z - 9400}{4800}\right)^2\right] \quad (42)$$

模拟大气横向风速度的大小。

理想情况下,使用 AO 技术可以部分乃至完全消除上行光路大气湍流的影响,大大提高激光测月系统性能,但研究表明,实际上由于非等晕性^[17,19]尤其是月球可用自然信标(如 Aldrin, Collins 等月球上的损石坑)角度非等晕的限制,测距系统使用 AO 技术所获得的收益会大幅度下降。下面分别给出理想情况和考虑非等晕效应时的相应计算结果。

5.1 理想(不考虑非等晕时)校正

图 1 和图 2 示出两种校正波长(532 nm 和 1064 nm)和湍流强度下(对 500 nm 波长时,对应大气相干长度 r_0 分别为 5 cm 和 10 cm),将大气湍流分别校正到 20 阶以内 Zernike 分量时,平均回波光光子数目的增加倍数(相对于未校正时),以及回波光光子数归一化涨落方差的大小。可看出,只需进行较低阶模式分量的大气校正,回波光光子数即有数十倍甚至上百倍地增加,同时回波光光子数归一化涨落方差则大大降低。

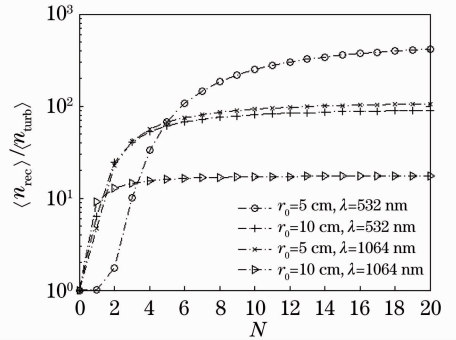


图 1 不同校正波长和湍流条件下校正到不同 Zernike 阶次时平均回波光光子增加倍数

Fig. 1 Increase in average number of echo photons for different compensation orders at different wavelengths and atmospheric turbulences

图 3 和图 4 示出湍流较弱($r_0 = 10$ cm)时,将 532 nm 波束校正到不同阶次(分别为 5 阶,10 阶,15 阶和 20 阶)Zernike 分量时,相应的强度起伏概率密度函数和回波光光子数累积概率密度的大小。可以看出,随着校正阶次的增加,获得更多回波光光子数的概率增加。进一步可以从图 4 读出,当分别校正到 5 阶,10 阶,15 阶和 20 阶 Zernike 分量时,获得 1 个以上回波光子的概率将分别达到 65%, 83%, 92% 和 97%。

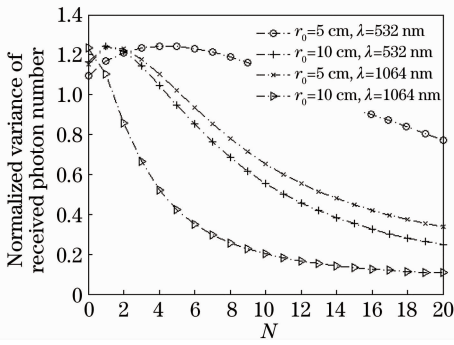


图 2 不同校正波长和湍流条件下校正到不同 Zernike 阶次时回波光子数归一化涨落方差

Fig. 2 Normalized variance of the number of echo photons for different compensation orders at different wavelengths and atmospheric turbulences

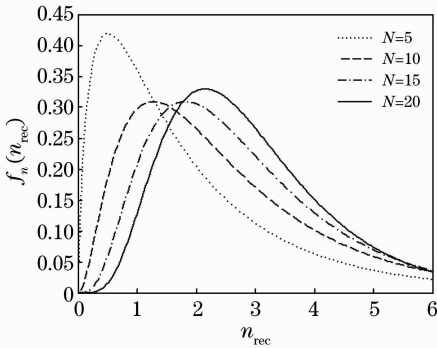


图 3 校正到不同 Zernike 模式时回波光子数涨落的概率密度函数

Fig. 3 Probability density functions of the number of echo photons for different compensation orders

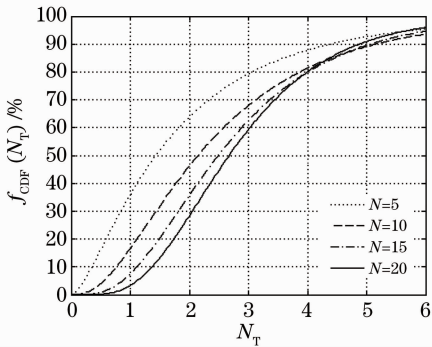


图 4 校正到不同 Zernike 模式时回波光子数涨落的累积概率函数

Fig. 4 Cumulative density function of the number of echo photons for different compensation orders

5.2 实际情况(非等晕校正)计算结果

非等晕性给自适应光学系统的性能带来很大的限制,它将大大降低系统基本性能^[22]。根据有关计算结果^[18],为了对 5 阶 Zernike 湍流模式进行有效的校正,系统孔径分离距离不应超过 12 cm,校正时

间延迟不应超过 10 ms(对 $r_0 = 5$ cm)和 8 ms(对 $r_0 = 10$ cm),自然信标与目标偏角不应超过 $5''$ (对 $r_0 = 10$ cm)和 $10''$ (对 $r_0 = 5$ cm)。如果要进行更高阶模式的校正,相应的要求将进一步提高。

一般而言,对于 LLR AO 系统,月球上可作为自然信标使用的对象与后向反射镜间的夹角基本上都在 $10''$ 以上^[8]。可见角度非等晕是对 LLR 进行 AO 校正的最大限制,只可能实施 5 阶以下的校正。图 5、6 中给出不同湍流强度和校正波长下,信标与目标偏角从 $0''$ 到 $25''$ 变化时,校正到 5 阶 Zernike 模式时的平均回波光子数增加倍数和归一化涨落方差的大小。图 7、8 则给出 $r_0 = 10$ cm 时,将 532 nm 光束校正到不同阶次时的相应结果。计算中,忽略了角度非等晕外的其他非等晕。

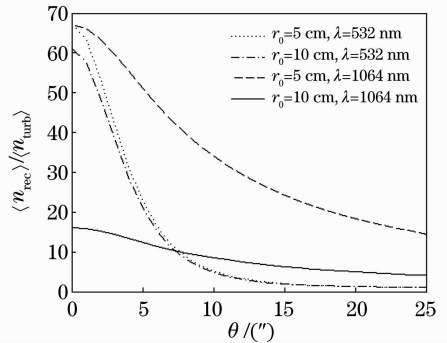


图 5 不同校正波长和湍流条件下平均回波光子数增加倍数随信标偏角的变化

Fig. 5 Relationship between the increase in average number of echo photons and the off-axis angles of the beacons for different wavelengths and atmospheric turbulences

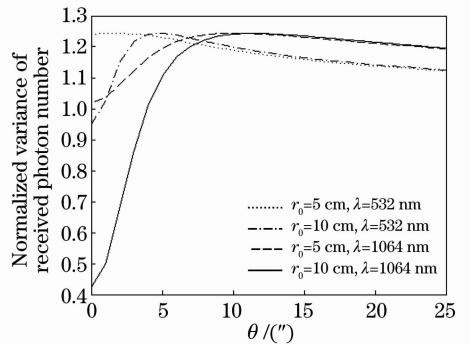


图 6 不同校正波长和湍流条件下回波光子数归一化方差随信标偏角的变化

Fig. 6 Relationship between the normalized variance of the number of echo photons and the off-axis angles of the beacons for different wavelengths and atmospheric turbulences

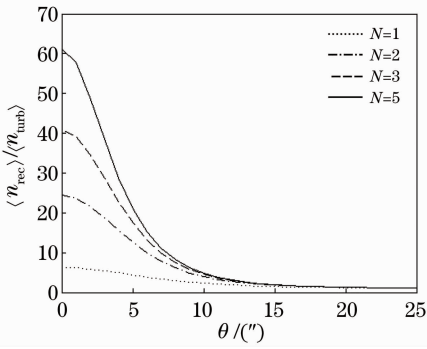


图 7 校正到不同 Zernike 阶次时平均回波光子增加倍数随信标偏角的变化

Fig. 7 Relationship between the increase in average number of echo photons and the off-axis angles of the beacons for different compensation orders

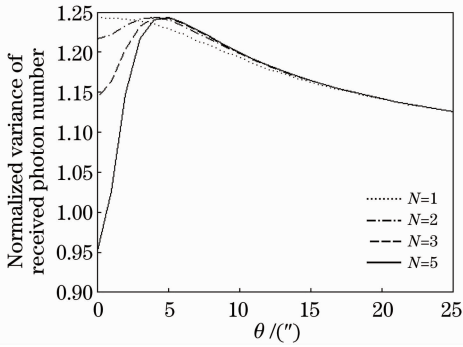


图 8 校正到不同 Zernike 阶次时回波光子数归一化方差随信标偏角的变化

Fig. 8 Relationship between the normalized variance of the number of echo photons and the off-axis angles of the beacons for different compensation orders

同时考虑其他非等晕效应,系统性能将进一步降低。在图 9、10 中示出孔径分离距离为 5 cm,校正时间延迟 2 ms,自然信标偏角为 10'' 时的计算结果。其中图 9 示出不同湍流强度下使用不同校正方式(自然信标和 15 km 瑞利信标)校正不同波长(532 nm 和 1064 nm)至 5 阶 Zernike 模式时的平均回波光子数增加倍数;图 10 示出使用 15 km 瑞利信标校正 532 nm 波束到不同 Zernike 阶次时的相应结果。可以看到,使用自然信标校正 532 nm 波束,回波光子数并无多大变化;即使使用瑞利信标模式,平均回波光子数目最多也不过增加 5~6 倍。实际上,除了 LGS 的聚焦不等晕外,由于 NGS 较大的偏角,这时角度倾斜非等晕误差仍然很大(可以求出,与图中数据对应的等晕角不到 2'',而倾斜等晕角也不过 8''),所以 AO 系统总误差仍然很大。如果使用 AO 系统校正 1064 nm 波束,平均回波光子数

目则可增加 10~30 倍(此时对应的倾斜等晕角约为 15'')

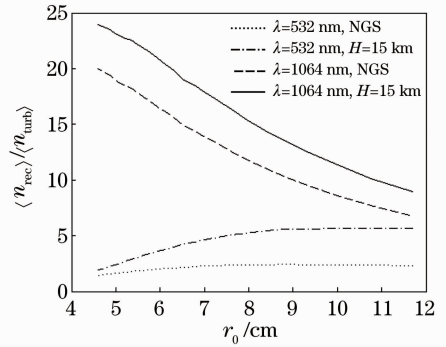


图 9 不同校正方式下光子数增加倍数随湍流强度的变化关系

Fig. 9 Relationship between the increase in average number of echo photons and the turbulent intensifying for different compensational methods

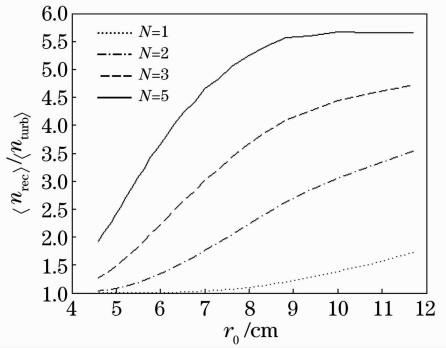


图 10 校正到不同 Zernike 模式时光子数增加倍数随湍流强度的变化关系

Fig. 10 Relationship between the increase in average number of echo photons and the turbulent intensifying for different compensational orders

图 11 中示出 $r_0 = 10$ cm 时,使用不同校正方式(自然信标,15 km 瑞利信标和 90 km 钠信标)将 532 nm 波束校正到 5 阶 Zernike 模式时回波光子数

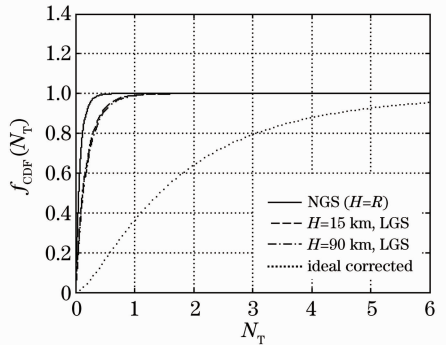


图 11 不同校正方式下回波光子数累积概率函数
Fig. 11 Cumulative density functions of the number of echo photons for different compensational methods

起伏累积概率密度的大小。从图 11 中可以看到,考虑到各种非等晕效应时,无论使用自然信标还是人工激光信标,当校正到 5 阶 Zernike 模式时,获得 1 个以上回波光子的概率不过 1% 而已。

6 结 论

建立了测距激光回波光光子数起伏的统计模型。这一模型涵盖测距过程的各种物理效应,包括激光束上行传播及其自适应校正、后向反射、下行传播、接收孔径平均等,因此给出了月球激光测距自适应光学系统比较全面的定量的性能评估。作为具体例子,以云南天文台 1.2 m 激光测距系统为原型,计算了一般条件和场景下使用自适应技术校正大气湍流所可能获得的系统性能改善。研究表明,只需要进行较低阶次的大气校正,系统性能即可获得数量级上的提高;然而由于非等晕性尤其是月球可用自然信标偏角非等晕的限制,使用 AO 技术的预期收益会大幅度下降。计算结果表明,为真正发挥 AO 技术在 LLR 领域的威力,有必要进一步探索解决自然信标偏角非等晕性的更有效的新技术和新方法。

参 考 文 献

- 1 J. J. Degnan. Satellite laser ranging: current status and future prospects[J]. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 1985, **23**(4): 398~413
- 2 J. O. Dickey, P. L. Bender, J. E. Faller *et al.*. Lunar laser ranging: a continuing legacy of the Apollo program[J]. *Science*, 1994, **265**(5171): 482~490
- 3 P. J. Shelus. Lunar laser ranging: glorious past and a bright future[J]. *Surveys in Geophysics*, 2001, **22**(5): 517~535
- 4 C. A. Murray, B. D. Yallop. Lunar laser ranging and fundamental astrometry[J]. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 1977, **284**(1326): 507~514
- 5 F. Hofmann, J. Müller, L. Biskupek. Lunar laser ranging test of the Nordtvedt parameter and a possible variation in the gravitational constant[J]. *Astronomy & Astrophysics*, 2010, **522**: L5
- 6 J. W. Hardy. Adaptive Optics for Astronomical Telescopes [M]. Oxford: Oxford University Press, 1998. 1~348
- 7 K. E. Wilson. Overview of the compensated earth-moon-earth laser link (CEMERLL)[C]. *SPIE*, 1994, **2123**: 66~74
- 8 S. Riepla, W. Schlüter, U. Schreiber *et al.*. Evaluation of an

- SLR adaptive optics system[C]. *SPIE*, 1999, **3865**: 90~95
- 9 R. K. Tyson. Bit-error rate for free-space adaptive optics laser communications[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2002, **19**(4): 753~758
- 10 Y. H. Xiong, H. S. Feng. Applications of adaptive optics in lunar laser ranging[C]. *SPIE*, 2003, **4839**: 88~93
- 11 Chen Jingyuan, Chen Shigang, Wang Guangrui. The intermittency of turbulence and its optical effects to light propagation in turbulent atmosphere[J]. *Progress in Physics*, 2005, **25**(4): 386~406
陈京元, 陈式刚, 王光瑞. 大气湍流间歇性及其对光波传播的影响[J]. *物理学进展*, 2005, **25**(4): 386~406
- 12 V. I. Tatarskii. The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation[M]. U. S. : National Technical Information Service, 1968. 1~472
- 13 L. C. Andrews, R. L. Phillips. Laser Propagation through Random Media (2nd ed)[M]. Bellingham: SPIE Press, 2005
- 14 L. C. Andrews, R. L. Phillips, C. Y. Hopen. Scintillation model for a satellite communication link at large zenith angles[J]. *Opt. Engng.*, 2000, **39**(12): 3272~3280
- 15 M. A. Al-Habash, L. C. Andrews, R. L. Phillips. Mathematical model for the irradiance probability density function of a laser beam propagating through turbulent media[J]. *Opt. Engng.*, 2001, **40**(8): 1554~1562
- 16 R. J. Sasiela. Electromagnetic Wave Propagation in Turbulence: Evaluation and Application of Mellin Transforms (2nd ed)[M]. New York: Springer-Verlag Press, 2007
- 17 Chen Jingyuan. The geometric anisoplanatism of adaptive optics system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(4): 922~927
陈京元. 自适应光学系统的几何非等晕性[J]. *光学学报*, 2010, **30**(4): 922~927
- 18 J. Y. Chen, X. Chang. A unified approach to analysing the anisoplanatism of adaptive optical systems[J]. *Adaptive Optics Progress*, 2012. 191~219
- 19 Chen Jingyuan, Li Youkuan. First-order theoretical model for laser guider star adaptive optics system[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2009, **21**(5): 649~657
陈京元, 李有宽. 激光导星自适应光学系统一阶理论模型[J]. *强激光与粒子束*, 2009, **21**(5): 649~657
- 20 B. M. Levine, K. Klasaleh. Intensity fluctuations in the compensated earth-moon-earth link (CEMERLL) experiment [C]. *SPIE*, 1994, **2123**: 409~422
- 21 Zheng Xiangming, Li Zhulian, Fu Honglin *et al.*. 1.2 m telescope satellite co-optical path kHz laser ranging system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(5): 0512002
郑向明, 李祝莲, 伏红林等. 云台 1.2 m 望远镜共光路千赫兹卫星激光测距系统[J]. *光学学报*, 2011, **31**(5): 0512002
- 22 Rao Changhui, Jiang Wenhan, Ling Ning. Anisoplanatism limitations for low-order mode correction adaptive optical system [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(11): 1486~1493
饶长辉, 姜文汉, 凌宁. 低阶模式校正自适应光学系统的非等晕限制[J]. *光学学报*, 2000, **20**(11): 1486~1493

栏目编辑: 王晓斌