

# 二维快速傅里叶变换干涉图相位提取误差分析

张 敏<sup>1,2</sup> 唐 锋<sup>1,2</sup> 王向朝<sup>1,2</sup> 戴凤钊<sup>1,2</sup>

(<sup>1</sup>中国科学院上海光学精密机械研究所信息光学与光电技术实验室, 上海 201800)

<sup>2</sup>中国科学院大学, 北京 100049

**摘要** 基于 ZYGO 干涉仪实测干涉图, 利用二维快速傅里叶变换(FFT)法进行相位提取, 并与相移干涉相位测量结果进行比对, 对影响 FFT 法相位提取精度的边缘误差、窗函数、滤波器设计、干涉图延拓以及载波条纹数等因素进行了综合分析。结果表明直接二维 FFT 法干涉图边缘  $0.05R$  环形区域的相位提取误差最大, 且决定了全局误差的大小。窗函数对边缘误差改善不明显, 优化滤波器设计对边缘误差有一定改善。干涉图延拓能有效减小边缘误差, 对于连续光学面检测而言是提高二维 FFT 法相位提取精度的最佳方法。干涉图载波频率为干涉图空间分辨率的  $1/13 \sim 1/3$  时均能得到较准确的测量结果, 相位提取误差峰谷值(PV)可优于  $\lambda/20$ ; 载波频率越高, 细节分辨能力越强。

**关键词** 测量; 干涉图; 相位提取; 二维快速傅里叶变换; 边缘误差; 干涉图延拓

**中图分类号** O436.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201340.0308002

## Phase Retrieval Errors Analysis of Interferogram Using Two Dimensional Fast Fourier Transform Method

Zhang Min<sup>1,2</sup> Tang Feng<sup>1,2</sup> Wang Xiangzhao<sup>1,2</sup> Dai Fengzhao<sup>1,2</sup>

(<sup>1</sup>Laboratory of Information Optics and Opto-Electronic Technology, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, China  
<sup>2</sup>University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract** Based on the actual interferogram grabbed by a ZYGO interferometer, the phase is retrieved by two-dimensional fast Fourier transform (FFT) method and the factors which impact phase retrieval accuracy of FFT method including edge errors, window function, filter design, interferogram extrapolation and the number of carrier fringes are comprehensively analyzed, by comparing with the phase-shift measurement results. It is found that for the direct 2D FFT method, the edge  $0.05R$  circular area of the interferogram has the biggest phase retrieval errors and decides the value of global errors. Window functions almost have no improvement for edge errors. Optimization of filter design can improve edge errors in some degree. Interferogram extrapolation can reduce edge errors effectively and it is the best way to enhance phase retrieval accuracy for continuous optical surface test. Accurate measurement results can be achieved when the frequency is  $1/13 \sim 1/3$  of the space resolution of the interferogram with peak-to-valley (PV) value of phase retrieval errors less than  $\lambda/20$ . The higher the carrier frequency is, the better the detail resolution is.

**Key words** measurement; interferogram; phase retrieval; two-dimensional fast Fourier transform; edge errors; interferogram extrapolation

**OCIS codes** 100.2650; 100.5070; 120.2650; 120.5050

## 1 引 言

干涉测量方法具有非接触、可全场测量、精度和

灵敏度高等特点, 在微纳米级光学精密检测领域获得了广泛的应用。干涉图相位提取是干涉测量的重

收稿日期: 2012-09-21; 收到修改稿日期: 2012-11-05

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(60938003, 61205102 和 61275207)资助课题。

作者简介: 张 敏(1984—), 男, 硕士研究生, 主要从事光学干涉测量技术方面的研究。E-mail: zhm928@siom.ac.cn

导师简介: 唐 锋(1979—), 男, 副研究员, 硕士生导师, 主要从事信息光电子技术方面的研究。

E-mail: tangfeng@siom.ac.cn

要环节,相位提取精度的高低直接影响最终检测精度。快速傅里叶变换(FFT)法基于空间载波,能从单幅条纹干涉图中快速精确地提取出原始波面的相位信息。相比于相移法,FFT法不易受外部测量环境变化影响,对应用于光学车间或实时监测的动态干涉仪有着重要的实用价值。

FFT法相位提取技术由 Takeda 等<sup>[1]</sup>在 1982 年提出。1986 年 Bone 等<sup>[2]</sup>在此基础上发展并推广到二维(2D)FFT法相位提取技术。此后,国内外学者围绕着 FFT 法相位提取技术在窗函数选择、滤波器设计、干涉图延拓和载波频率确定等方面做了大量的研究工作<sup>[3~14]</sup>,但大多数报道只是针对其中的一两个方面进行了探讨,很少有对上述因素进行综合分析。本文基于 ZYGO 干涉仪实测干涉图,利用二维 FFT 法进行相位提取,并与相移干涉相位测量结果进行比对,对影响 FFT 法相位提取精度的边缘误差、窗函数、滤波器设计、干涉图延拓和载波条纹数等因素进行了综合分析。

## 2 二维 FFT 法相位提取技术基本原理

引入频率为  $f_c$  的空间载波后的干涉图像光强分布可表示为

$$i(x, y) = a(x, y) + c(x, y) \exp(j2\pi f_x x + j2\pi f_y y) + c^*(x, y) \exp(-j2\pi f_x x - j2\pi f_y y), \quad (1)$$

$$c(x, y) = \frac{1}{2} b(x, y) \exp[j\phi(x, y)], \quad (2)$$

式中  $a(x, y)$  为干涉图背景光强,  $b(x, y)$  是干涉交流项,  $f_x$  和  $f_y$  分别为  $f_c$  在  $x$  方向和  $y$  方向上的分量,  $\phi(x, y)$  为含有待测波面相位信息的相位分布函数,  $*$  表示复共轭。

对(1)式中的空间变量  $x, y$  作二维 FFT 变换,可获得干涉图的频谱:

$$I(f_1, f_2) = A(f_1, f_2) + C(f_1 - f_x, f_2 - f_y) + C^*(f_1 + f_x, f_2 + f_y), \quad (3)$$

采用一个中心频率为  $(f_x, f_y)$  的滤波器将正一级频谱  $C(f_1 - f_x, f_2 - f_y)$  分离出来并平移至原点,得到  $C(f_1, f_2)$ , 对其进行二维傅里叶逆变换,即可得到  $c(x, y)$ 。由(2)式可得

$$\phi(x, y) = \arctan \frac{\text{Im}[c(x, y)]}{\text{Re}[c(x, y)]}, \quad (4)$$

式中  $\text{Re}[c(x, y)], \text{Im}[c(x, y)]$  分别为  $c(x, y)$  的实

部和虚部。

## 3 FFT 法相位提取误差分析

随着空间载频的增加,干涉仪非共光路回程误差的变化会使测量结果发生变化。图 1 为采用 ZYGO 干涉仪用移相干涉法(PSI)进行测量时,同一被测面不同载波频率时的测量结果与零条纹测量结果峰值(PV)  $d_{PV}$  和均方根值(RMS)  $R_{MS}$  变化情况(零条纹时测量结果:  $d_{PV} = 0.095\lambda, R_{MS} = 0.019\lambda$ )。本文仅研究 FFT 法相位提取误差,因此干涉条纹数量相同时,相移法相位提取与 FFT 法相位提取二维波前的差的 PV 值作为评价 FFT 相位提取误差的主要参数,消除载波频率变化时回程误差的影响。所用的干涉图来自 ZYGO 干涉仪实测数据,干涉仪工作波长为 632.8 nm,干涉图空间分辨率为 512 pixel × 512 pixel,干涉图分布区域为圆形孔径。

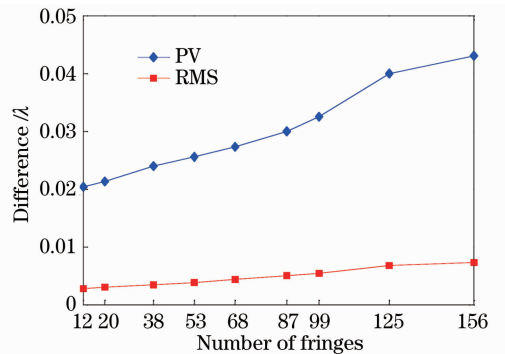


图 1 不同空间载频下的 PSI 测量偏差

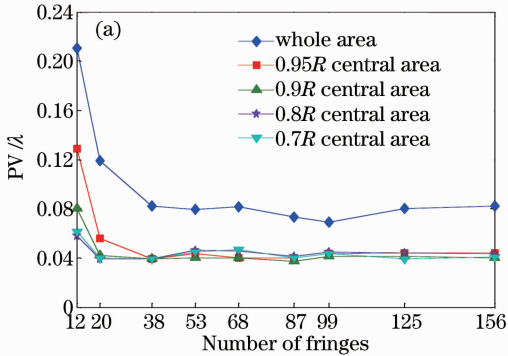
Fig. 1 Measurement difference of PSI at different space carrier frequencies

### 3.1 边缘误差

原理上,FFT法对无限大的区域进行变换才不会引起误差,但实际的干涉图都有着有限的大小和清晰的边界,干涉条纹在孔径边界突然消失。这相当于用一个与孔径形状相同的窗去截断在空间无限延伸分布的干涉条纹图,经 FFT 后会造成频域内频谱的扩散<sup>[1]</sup>,这样在恢复所得波面孔径边缘处将会产生很大的误差,即边缘误差。Bone 等<sup>[2]</sup>于 1986 年讨论了边缘误差问题。

采用直接二维 FFT 法相位提取对边缘误差进行分析,频域滤波器采用以正一级频谱中心为中心频率的二阶巴特沃思低通滤波器,滤波宽度为  $0.4f_c$ 。定义中心孔径比为以孔径中心为起点向外延伸的径向长度与孔径半径  $R$  的比例。图 2(a)为载波条纹数不同时不同中心孔径比所对应的中心圆

形区域的相位误差。0.95R 径向长度以内的中心区域相位误差较小, PV 值约为 0.04λ 量级, 而全孔径区域误差却较大, PV 值约为 0.08λ 量级。图 2(b) 为不同载波条纹数下以孔径边缘为起点, 沿径向方向向里每 0.05R 径向长度所对应的环形区



域为观察区域的相位误差。最外边缘 0.05R 径向长度对应的环形区域相位误差较大, 且等于全局误差, PV 值约为 0.08λ 量级, 而再沿径向方向向里的环形区域误差较小且变化不大, PV 值约为 0.03λ 量级。

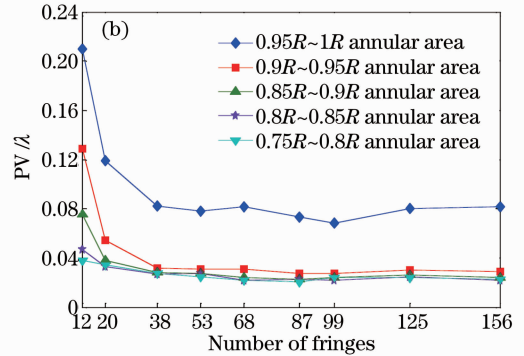


图 2 直接二维 FFT 法相位提取误差。(a) 中心区域误差; (b) 边缘区域误差

Fig. 2 Phase retrieval errors of direct 2D FFT method. (a) Errors of central areas; (b) errors of edge areas

综上所述, 直接二维 FFT 法的边缘 0.05R 径向长度所对应的环形区域的相位提取误差较大, 内部 0.95R 径向长度所对应的中心区域的相位提取误差较小, 且边缘 0.05R 环形区域的相位提取误差决定了全局相位提取误差的大小。边缘误差是影响二维 FFT 法相位提取误差的主要因素。

由边缘误差的产生原理可知, 减小频谱扩散就可以改善边缘误差。改善边缘误差常用的方法有 3 种: 1) 加窗函数使孔径边界处光强呈连续缓慢变化, 而不是突变; 2) 优化频域滤波器设计, 在频域中抑制其他频谱对一级频谱的干扰; 3) 干涉图延拓对孔径边界外数据进行外插, 将原来的边界变为内部区域。

### 3.2 窗函数对 FFT 法相位提取误差的影响

加窗函数可以使干涉图孔径边界处光强分布变得连续, 边界不再明显, 从而能减轻傅里叶频谱的扩散。图 3 为不同载波条纹数下加不同半峰全宽 (FWHM) 的高斯窗后的相位提取误差。由图可知, 高斯窗在 FWHM 为 239 pixel 时, 相位提取误差最小。经同样分析可以得到海明窗在 FWHM 为 270 pixel 时, 凯塞窗在 FWHM 为 309 pixel 时, 相位提取误差最小。

图 4 为不同载波条纹数下不加窗, 加海明窗 (FWHM 为 270 pixel)、高斯窗 (FWHM 为 239 pixel)、凯塞窗 (FWHM 为 309 pixel) 之后的相位提取边缘误差和全局误差。相比于不加窗, 加海明窗、高斯窗或者凯塞窗仅能使边缘误差 PV 值减小约 0.004λ, 全局误差仍然由边缘误差所决定。可见, 干涉图加

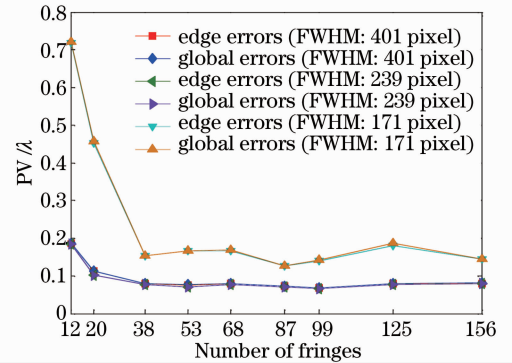


图 3 不同 FWHM 的高斯窗对相位提取误差的影响

Fig. 3 Impact of Gauss windows with different FWHM on phase retrieval errors

窗函数对边缘误差改善不明显。

### 3.3 滤波器设计对 FFT 法相位提取误差的影响

用 FFT 法求取被测波面的参数时, 需要的信息包含在正一级频谱之中, 这就需要设计一个滤波器将正一级频谱分离出来。优化滤波器设计主要是对滤波器的宽度和形状进行优化设计。对 3 种滤波器进行了分析, 第一种是二阶巴特沃思低通滤波器, 中心频率为正一级频谱中心, 滤波半径为  $0.4f_c$ ; 第二种是如图 5(a) 所示的圆柱形镶余弦边滤波器<sup>[7]</sup>, 中心频率为正一级频谱中心, 顶部半径为  $0.2f_c$ , 底部半径为  $0.4f_c$ ; 最后是参考 ZYGO 公司 FlashPhase 滤波器设计的组合滤波器, 包括一个以正一级频谱中心为中心频率、以  $0.4f_c$  为滤波半径的二阶巴特沃思低通滤波器, 对正一级频谱起到带通作用, 以及两个分别以零级频谱和正二级频谱中心为中心频率、均以  $0.7f_c$  为滤波半径的六阶巴特沃思带阻滤

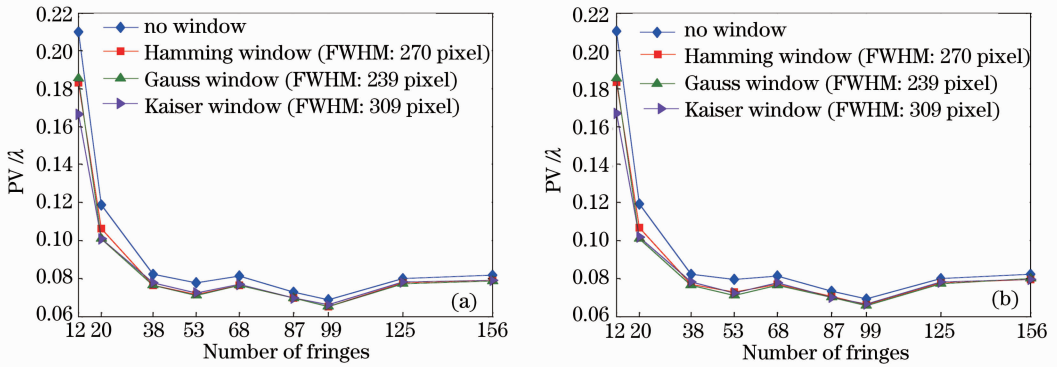


图 4 加窗函数对相位提取误差的影响。(a)边缘误差；(b)全局误差

Fig. 4 Impact of window function on phase retrieval errors. (a) Edge errors; (b) global errors

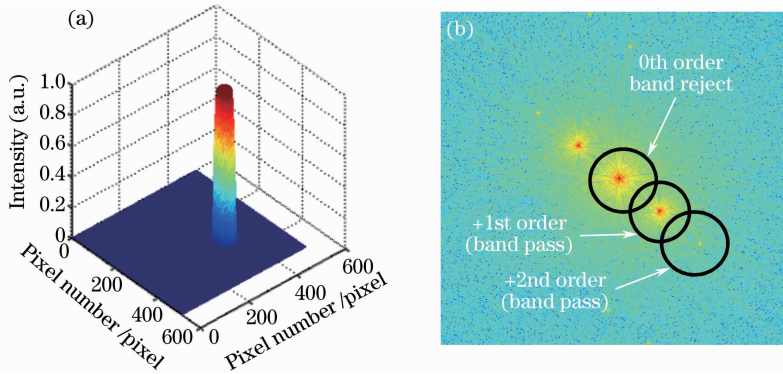


图 5 频域滤波器。(a)圆柱形镶余弦边滤波器；(b)组合滤波器

Fig. 5 Filter on frequency domain. (a) Central plateau and cosine-shaped edge filter; (b) combined filter

波器,如图 5(b)所示。

图 6 为不同载波条纹数下分别采用上述 3 种滤波器进行滤波时的相位提取边缘误差和全局误差。相比于常用的二阶巴特沃思低通滤波器,使用圆柱

形镶余弦边滤波器或组合滤波器滤波能使边缘误差 PV 值减小约  $0.02\lambda$ ,全局误差仍然由边缘误差所决定。优化滤波器设计对边缘误差有一定改善。

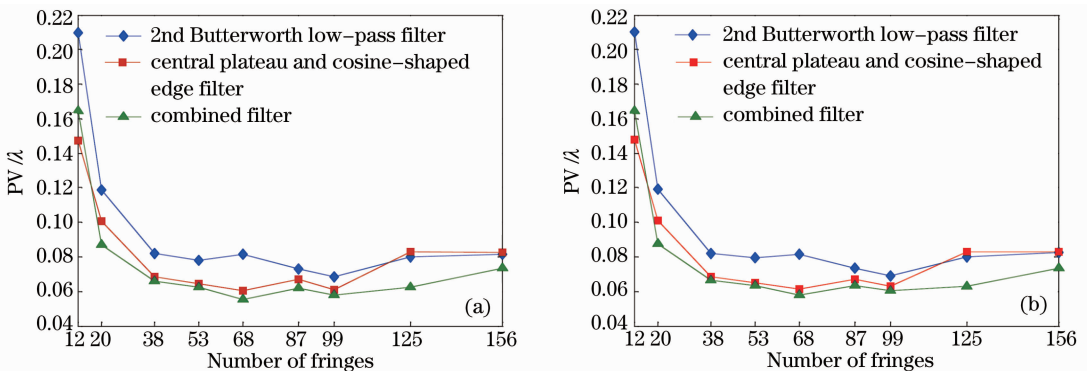


图 6 滤波器设计对相位提取误差的影响。(a)边缘误差；(b)全局误差

Fig. 6 Impact of filter design on phase retrieval errors. (a) Edge errors; (b) global errors

### 3.4 干涉图延拓对 FFT 法相位提取误差的影响

Bone 等<sup>[2]</sup>针对边缘误差提出了边界对称反转外延的方法,以改善干涉图在边界的幅度突变。Roddier 等<sup>[4]</sup>提出了一种基于二维 FFT 法的 Gerchberg 迭代延拓方法。另外还有以孔径边缘余弦函数极值点为相对坐标原点进行外插的方

法<sup>[8,9]</sup>,最小二乘迭代法<sup>[10]</sup>以及基于样本的块重建方法<sup>[11]</sup>等。采用最常用的基于二维 FFT 法的 Gerchberg 迭代延拓方法进行干涉图的延拓,并对延拓后的干涉图进行相位提取和误差分析。

图 7 为不同载波条纹数下无干涉图延拓直接二维 FFT 法和干涉图延拓时的相位提取误差。干涉



图经迭代延拓后对边缘误差的抑制得到了极大的改善, PV 值由无干涉图延拓时的  $0.08\lambda$  量级下降至  $0.04\lambda$  量级。全局误差 PV 值由无干涉图延拓时的  $0.08\lambda$  量级下降至  $0.05\lambda$  量级, 且全局误差不再完全由边缘误差决定。可见, 干涉图延拓能有效减小边缘误差。

### 3.5 多种方法组合对 FFT 法相位提取误差的影响

考虑加窗函数、优化滤波器设计以及干涉图延拓等方法组合使用时对 FFT 法相位提取误差的影响。结果如图 8 所示, 图 8(a) 为边缘误差, 图 8(b) 为全局误差。结果表明干涉图延拓后再加窗函数或使用组合滤波器滤波对减小二维 FFT 法相位提取误差都没有更进一步的改善。

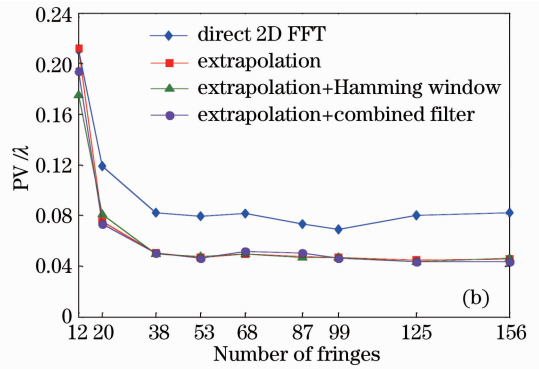
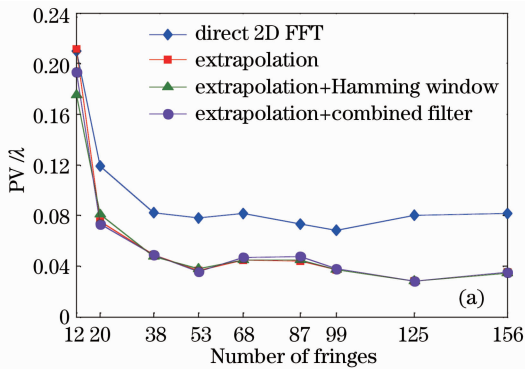


图 8 多种方法组合对相位提取误差的影响。(a)边缘误差; (b)全局误差

Fig. 8 Impact of multi-methods on phase retrieval errors. (a) Edge errors; (b) global errors

### 3.6 载波条纹数对相位提取误差的影响

载波条纹数与载频大小成正比, 载波条纹数越少, 引入的载频越小, 从而导致频域内一级频谱和零级频谱以及二级频谱等互相离得很近, 产生频谱混叠。当所加载波条纹数合适时, 频域内各级频谱就能分离开来, 有效地消除了频谱混叠现象, 减小了测量误差。如图 8(b) 中采用干涉图延拓的 2D FFT 法进行相位提取, 条纹数在 12 和 20 时误差较大, 而条纹数在 38 到 156 之间(即载波频率为干涉图空间

分辨率的  $1/13 \sim 1/3$ ) 时, 均能得到比较准确的测量结果, 相位提取全局误差较小, PV 值约为  $0.05\lambda$  数量级。

图 9 和图 10 分别给出了载波条纹数 38 和 156 时 FFT 与相移相位提取结果的比较。载波条纹数为 38 时, 误差波面的 PV 值和 RMS 值分别为  $0.050\lambda$  和  $0.005\lambda$ ; 载波条纹数为 156 时, 误差波面的 PV 值和 RMS 值分别为  $0.046\lambda$  和  $0.003\lambda$ 。可见, 虽然两种载波频率下 FFT 法相位提取误差处于

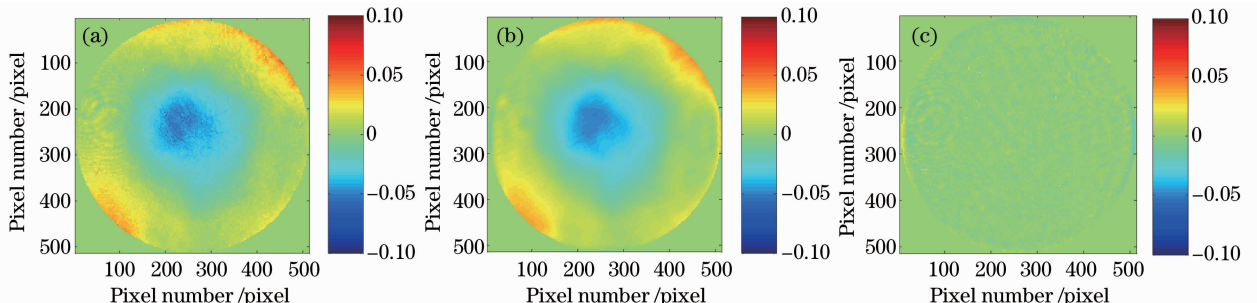


图 9 条纹数 38 时的相位提取结果。(a) PSI 结果; (b) 2D FFT 结果; (c) (a) 与 (b) 的差

Fig. 9 Phase retrieval results with fringes of 38. (a) PSI result; (b) 2D FFT result; (c) difference between (a) and (b)

同一量级,但是载波频率小时,获得的相位提取结果更加平滑,载波频率高时,平滑效应减弱,细节部分

与相移法结果更加一致。因此,采用较高载波频率时,细节分辨能力更强。

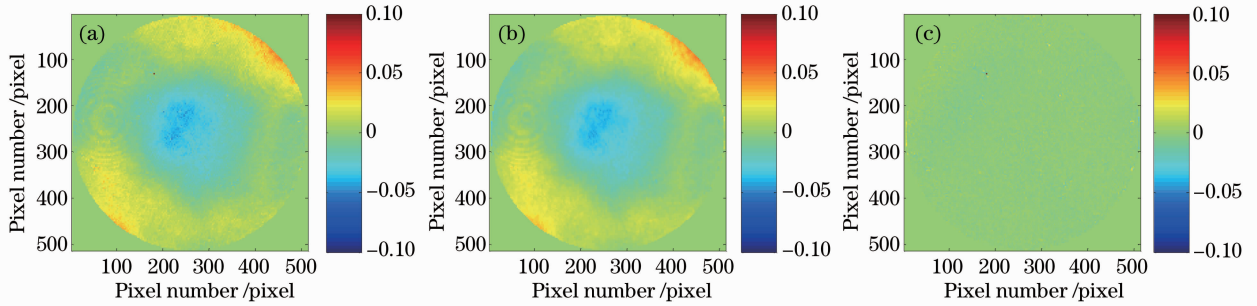


图 10 条纹数 156 时的相位提取结果。(a) PSI 结果; (b) 2D FFT 结果; (c) (a)与(b)的差

Fig.10 Phase retrieval results with fringes of 156. (a) PSI result; (b) 2D FFT result; (c) difference between (a) and (b)

## 4 结 论

介绍了二维 FFT 法的基本原理,并基于 ZYGO 干涉仪实测干涉图,与相移干涉相位测量结果进行对比,对影响 FFT 法相位提取精度的边缘误差、窗函数、滤波器设计、干涉图延拓和载波条纹数等因素进行了分析。直接二维 FFT 法干涉图边缘  $0.05R$  环形区域的相位提取误差最大,且决定了全局误差的大小。窗函数对边缘误差改善不明显,优化滤波器设计对边缘误差有一定改善。干涉图延拓能有效减小边缘误差,相位提取精度提高约  $0.03\lambda$ ,且与窗函数、优化滤波器设计组合使用时,性能无明显变化,对连续光学面检测而言是提高二维 FFT 法相位提取精度的最佳方法。在干涉图载波频率为干涉图空间分辨率的  $1/13\sim 1/3$  时均能得到较准确的测量结果,相位提取误差 PV 值可优于  $\lambda/20$ ;载波频率越高,细节分辨能力越强。

## 参 考 文 献

- 1 M. Takeda, H. Ina, S. Kobayash. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(1): 156~160
- 2 D. J. Bone, H. A. Bachor, R. J. Sandeman. Fringe-pattern analysis using a 2-D Fourier transform[J]. *Appl. Opt.*, 1986, **25**(10): 1653~1660
- 3 K. A. Nugent. Interferogram analysis using an accurate fully automatic algorithm [J]. *Appl. Opt.*, 1985, **24**(18): 3101~3105
- 4 C. Roddier, F. Roddier. Interferogram analysis using Fourier transform techniques[J]. *Appl. Opt.*, 1987, **26**(9): 1668~1673
- 5 J. B. Liu, P. D. Ronney. Modified Fourier transform method for interferogram fringe pattern analysis[J]. *Appl. Opt.*, 1997,

- 36**(25): 6231~6241
- 6 A. Fernandez, G. H. Kaufmann, A. F. Doval *et al.*. Comparison of carrier removal methods in the analysis of TV holography fringes by the Fourier transform method[J]. *Opt. Engng.*, 1998, **37**(11): 2899~2905
- 7 J. H. Massig, J. Heppner. Fringe-pattern analysis with high accuracy by use of the Fourier-transform method; theory and experimental tests[J]. *Appl. Opt.*, 2001, **40**(13): 2081~2088
- 8 Zhang Jie, Chen Mingyi. A new algorithm of interference fringe extrapolation Fourier transform analysis [J]. *Optical Instruments*, 1996, **18**(1): 20~26
- 张 婕, 陈明仪. 傅里叶变换中干涉条纹的外插新算法[J]. *光学仪器*, 1996, **18**(1): 20~26
- 9 Liu Tingrui, He Haitao. A modified algorithm for fringe-pattern extrapolation based on FFT analysis[J]. *Journal of Shanghai University*, 2003, **9**(5): 456~458
- 刘廷瑞, 何海涛. 基于 FFT 干涉图处理的外插修正算法[J]. *上海大学学报*, 2003, **9**(5): 456~458
- 10 Zhang Zhaokun, Yu Yingjie, Chen Mingyi. Extrapolating for interferogram with the least-squares least-squares iteration[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2001, **22**(z2): 376~377
- 张兆坤, 于瀛洁, 陈明仪. 用最小二乘迭代法对干涉条纹图进行插值[J]. *仪器仪表学报*, 2001, **22**(z2): 376~377
- 11 Su Junhong, Zhu Rihong, Chen Lei *et al.*. Interferogram region spreading technology based on exemplar matching[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2007, **36**(1): 82~85
- 苏俊宏, 朱日宏, 陈 磊 等. 基于样本匹配的干涉图延拓技术研究[J]. *红外与激光工程*, 2007, **36**(1): 82~85
- 12 H. Guo, Q. Yang, M. Chen. Local frequency estimation for the fringe pattern with a spatial carrier; principle and applications [J]. *Appl. Opt.*, 2007, **46**(7): 1057~1065
- 13 M. Dai, Y. Wang. Fringe extrapolation technique based on Fourier transform for interferogram analysis[J]. *Opt. Lett.*, 2009, **34**(7): 956~958
- 14 Q. Fan, H. Yang, G. Li *et al.*. Suppressing carrier removal error in the Fourier transform method for interferogram analysis [J]. *Journal of Optics*, 2010, **12**(11): 115401