非傍轴衍射光束的传输特性

郭福源　李连煌
（福建师范大学激光与光电子技术研究所，光子技术福建省重点实验室，
医学光电科学与技术教育部重点实验室，福建 福州 350007）

摘要　基于小衍射源和衍射远场的特点，简化了瑞利-索末菲标量衍射积分公式，并应用于分析非傍轴衍射光束的衍射远场总功率和光束传输因子特性。由于物理概念上的空间频谱的定义域局限在一定范围，基于此计算的非傍轴衍射光束的衍射远场总功率不满足能量守恒定律，基于此计算的非傍轴衍射光束的光束传输因子也与常识不符。当采用数学概念上的空间频谱分析上述特性时，两个符合常识的规律被重提，并以非傍轴基模高斯光束衍射远场总功率和光束传输因子的相对计算误差说明上述结论。

关键词　衍射；光束传输因子；非傍轴；远场；能量守恒定律；高斯光束
中图分类号　TN012；O436.1　　**文献标识码**　A　　**doi：** 10.3788/CJL201340.0102004

Propagation Characteristics of Non-Paraxial Diffraction Beam

Guo Fuyuan　Li Lianhuang
(*Key Laboratory of Optoelectronic Science and Technology for Medicine of Ministry of Education, Fujian Provincial Key Laboratory of Photonic Technology, Institute of Laser & Optoelectronics Technology, Fujian Normal University, Fuzhou, Fujian* 350007, *China*)

Abstract　Based on the specialties of small diffracted source and far field diffraction, the Rayleigh-Sommerfeld scalar diffraction integral formula is simplified to analyze the characteristics of the far field total power and the beam propagation factor of non-paraxial diffraction beam. Physically, as the spatial frequency spectrum of non-paraxial diffraction beam is confined to a finite spatial frequency, the calculated value of the far field total power fails to comply with the law of energy conservation. Besides, the calculated value of the beam propagation factor of non-paraxial diffraction beam is against the commonsense rule. Then, the spatial frequency spectrum in the mathematical concept is employed to analyze the above mentioned characteristics, and the two commonsense rules are put forward again. And it is clearly shown through the relative calculation errors of the far field total power and the beam propagation factor of non-paraxial TEM_{00} mode Gaussian beam.

Key words　diffraction; beam propagation factor; non-paraxial; far field; law of energy conservation; Gaussian beam
OCIS codes　260.1960; 260.2160; 070.7345

1　引　　言

光束传输因子简称 M^2 因子，原名为光束质量因子，由 Siegman[1] 于 1990 年建议用来描述和测量激光器输出光束的光束质量，并指出 $M^2 \geqslant 1$，其中，基模（TEM_{00} 模）高斯光束的 M^2 因子最小，$M^2 = 1$。Liu 等[2] 指出傍轴光束 $M^2 \geqslant 1$，曹清等[3,4] 将 M^2 因子概念拓展到非傍轴标量光束，并指出非傍轴标量光束的 M^2 因子大于 1 但不能到达下限 1。郭福源等[5~7] 指出 TE_0 模平面光波导和 LP_{01} 模光纤输出光束的 M^2 因子大于 1。Zhou 等[8,9] 虽然提出小激活层厚度的半导体激光器输出光束的 M^2 因子小于 1，但也指出非傍轴矢量高斯光束的 M^2 因子大于 1 但不能到达下限 1。而 Porras[10] 提出极度非傍轴高斯光束的光束 M^2 因子小于 1 并随着束腰光斑半径

收稿日期： 2012-08-31；**收到修改稿日期：** 2012-09-26
基金项目： 福建省教育厅重点项目（JA10062，JK2012007）资助课题。
作者简介： 郭福源（1965—），男，博士，教授，主要从事光波导理论和光束传输理论及其应用等方面的研究。
E-mail：guofy@fjnu.edu.cn

的减小而趋于0。李连煌等[11,12]提出在受限或忽略包层场分布时的 TE_0 模平面光波导和小芯层 LP_{01} 模光纤输出光束的 M^2 因子小于1。邓小玖等[13,14]采用精确光强二阶矩和桶内功率方法证明了极度非傍轴矢量和标量高斯光束的 M^2 因子小于1。可见，基模高斯光束的 M^2 因子大小问题仍有争议，非傍轴衍射光束的 M^2 因子问题值得探讨。

经典的 M^2 因子基于束腰光强分布及其空间频谱强度分布二阶矩的乘积定义[1]，因此，衍射源的空间频谱分布及空间频谱总功率是计算 M^2 因子的基础。根据起源于平面波的角谱理论，非傍轴标量衍射光束在衍射远场某一垂直于 z 轴的横截面上的总功率[11~18]虽然与观察平面位置无关，但横截面上的总功率计算值小于衍射源总功率，与描述能量守恒定律的帕斯瓦尔定理[19]不一致，其表现之一为平面波和高斯光束经过圆孔衍射的衍射孔透射系数[18]；当采用矢量方法分析非傍轴衍射光束时，非傍轴矢量衍射光束在横截面上的总功率大于非傍轴标量衍射光束在横截面上的总功率[9,13,20]，但不恒等于空间频谱的总功率，也不是能量守恒的表现。

为了分析非傍轴衍射在远场观察平面上的总功率，在小尺寸衍射源的条件下，简化瑞利-索末菲标量衍射积分公式[21~24]，给出衍射远场总功率的计算公式，它与空间频谱总功率的计算公式一致。对于非傍轴衍射光束，虽然衍射远场总功率的计算值与观察平面位置无关，但由于衍射源尺寸已经偏离了羊国光等[25]在介绍标量衍射理论时要求的条件“衍射孔径比波长大得多”，物理意义上的空间频谱定义域小于数学概念上的空间频谱定义域，衍射远场总功率计算值小于衍射源总功率，不符合能量守恒定律。可见，标量衍射积分公式有一定的局限性，不适用于分析极度非傍轴衍射光束的特性，若简单应用标量衍射积分公式或频谱理论，将导致非傍轴衍射光束的 M^2 因子计算值出现异常。

目前，非傍轴衍射光束的 M^2 因子常采用被拓展的 M^2 因子表达式[8~17]计算，被拓展到非傍轴光束之后的 M^2 因子基于束腰光强分布和衍射远场光强分布二阶矩的乘积定义，相当于经典空间频谱强度分布二阶矩计算公式中的方向角正弦平方被方向角正切平方取代，当方向角趋于 $\pi/2$ 时，衍射远场光强分布二阶矩计算公式中的被积函数不收敛，引起非傍轴远场光束二阶矩的发散特性[13,20]，导致非傍轴光束的 M^2 因子计算值出现异常情况。因此被拓展之后的 M^2 因子计算公式不适用于计算非傍轴衍射光束的 M^2 因子。

经典的 M^2 因子定义有明确的物理意义，但由于标量衍射积分公式和空间频谱公式的局限性，简单将物理意义上的空间频谱用于计算非傍轴衍射光束的 M^2 因子，将导致极度非傍轴情况下的衍射光束的 M^2 因子计算值小于1，与常识不符。

若将物理意义上的空间频谱定义域延拓到数学概念上的空间频谱定义域，衍射远场总功率计算值等于衍射源总功率，与帕斯瓦尔定理一致，M^2 因子的计算值与 Siegman 的结论一致。可见，将物理意义上的空间频谱定义域延拓到数学概念上的空间频谱定义域具有实际应用意义。

2　标量衍射积分公式的局限性

为了简化衍射远场分布计算公式，设衍射源平面上的光场等相面为平面，衍射源平面上的光场相位与参考点在柱面坐标系中的径向坐标 r 和角向坐标 φ 无关，且衍射源光场的振幅与参考点的角向坐标 φ 无关。并设衍射源平面与笛卡儿坐标系的 xOy 平面重合，衍射远场观察平面与衍射源平面平行，衍射源平面上参考点 $A(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0)$ 与观察点 $A'(r',0,z')$ 之间的传播距离为 L，AA' 的倾斜角为 θ_L，坐标原点 O 与观察点 A' 之间的距离为 R，OA' 的方向角为 θ，它们的几何关系如图1所示。

当观察平面位于衍射远场时，若衍射源为小尺寸衍射源，$r \ll z'$，有 $\theta_L \approx \theta$，瑞利-索末菲标量衍射积分公式[21]的倾斜因子 $\cos\theta_L \approx \cos\theta$，传播距离 $L \approx R - r\sin\theta\cos\varphi$。

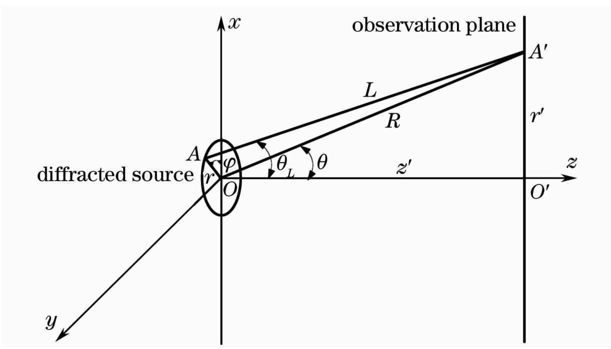

图1　等相面为平面的光场衍射示意图

Fig. 1　Schematic of diffraction from the optical field with a plane equiphase surface

根据瑞利-索末菲标量衍射积分公式[21]，远场观察点 A' 的标量场 $\Psi(r'_\lambda,\ z'_\lambda)$ 可由衍射源的标量场分布 $\Psi(r_\lambda)$ 表示为[26,27]

$$\Psi(r'_\lambda, z'_\lambda) = \frac{\cos\theta\exp(\mathrm{i}2\pi R_\lambda)}{\mathrm{i}R_\lambda} S_{\mathrm{P}}(F_r), \tag{1}$$

式中 i 为虚数单位，$\mathrm{i}=(-1)^{1/2}$，$r'_\lambda = r'/\lambda$ 和 $z'_\lambda = z'/\lambda$ 为 A' 点的归一化坐标，$R_\lambda = R/\lambda$ 为 OA' 的归一化尺寸，λ 为光波波长，$S_{\mathrm{P}}(F_r)$ 为物理意义上的空间频谱，F_r 为一非负的无量纲参数。

由于衍射场为行波场，无量纲参数 $F_r = \sin\theta$，定义为归一化径向空间频率。它与经典的径向空间频率 $f_r = \sin\theta/\lambda$ 的关系为 $F_r = \lambda f_r$，且由于方向角 θ 的定义域为 $[0,\pi/2]$，归一化径向空间频率范围为 $0 \leqslant F_r \leqslant 1$，即，物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$ 的定义域为 $[0,1]$，物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$ 可由数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$ 表示为

$$S_{\mathrm{P}}(F_r) = S(F_r) f_{\mathrm{circ}}(F_r), \tag{2}$$

式中 $f_{\mathrm{circ}}(\xi)$ 为圆孔函数，当 $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ 时，$f_{\mathrm{circ}}(\xi)=1$，当 $\xi>1$ 时，$f_{\mathrm{circ}}(\xi)=0$。

数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$ 为标量场分布 $\Psi(r_\lambda)$ 的零阶汉克尔变换，或称傅里叶-贝塞尔变换[21,26]，即

$$S(F_r) = 2\pi\int_0^\infty \Psi(r_\lambda) \mathrm{J}_0(2\pi r_\lambda F_r) r_\lambda \mathrm{d}r_\lambda, \tag{3}$$

式中 $r_\lambda = r/\lambda$ 为归一化半径，$\mathrm{J}_0(\xi)$ 为零阶贝塞尔函数。

单从数学而言，若 $\Psi(r_\lambda)$ 在 r_λ 的定义域 $[0,\infty)$ 内满足傅里叶变换的狄里赫利条件[19]，由(3)式知，数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$ 的定义域也应该为 $[0,\infty)$，且 $S(F_r)$ 在定义域 $[0,\infty)$ 内也满足狄里赫利条件，$\Psi(r_\lambda)$ 为 $S(F_r)$ 的逆零阶汉克尔变换。

可见，当 $0 \leqslant F_r \leqslant 1$ 时，$S(F_r)$ 为物理意义上行波场的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$，可用于衍射远场的场分布计算；而当 $F_r > 1$ 时，由于衍射场为行波场，$S(F_r)$ 没有物理意义，但它在数学概念上却是不可或缺的部分。

在标量条件下，衍射源总功率由场分布 $\Psi(r_\lambda)$ 表示为[23]

$$P_{\mathrm{DS}}(\xi) = 2\pi\lambda^2 C\int_0^\infty \Psi^2(r_\lambda) r_\lambda \mathrm{d}r_\lambda, \tag{4}$$

式中 C 为常数，当 $\Psi^2(r_\lambda)$ 代表电场分布时，$C = n/(2\eta_0)$，当 $\Psi(r_\lambda)$ 代表磁场分布时，$C = \eta_0/(2n)$，n 为衍射空间介质的折射率，η_0 为真空中的波阻抗。

根据数学概念上的帕斯瓦尔定理[19,21]，衍射源场分布总功率等于数学概念上的衍射源空间频谱分布总功率[28]，即

$$\int_0^\infty \Psi^2(r_\lambda) r_\lambda \mathrm{d}r_\lambda = \int_0^\infty S^2(F_r) F_r \mathrm{d}F_r, \tag{5}$$

则衍射源总功率可由数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$ 表示为

$$P_{\mathrm{DS}}(\xi) = 2\pi\lambda^2 C\int_0^\infty S^2(F_r) F_r \mathrm{d}F_r. \tag{6}$$

根据图 1 中各个参量的几何关系，有 $R_\lambda = z'_\lambda \sec\theta$，$r'_\lambda = z'_\lambda \tan\theta$，$\mathrm{d}r'_\lambda = z'_\lambda \sec^2\theta \mathrm{d}\theta$。在标量条件下，参照(4)式，可计算衍射远场观察平面上场分布为 $\Psi(r'_\lambda, z'_\lambda)$ 的总功率。由(1)～(3)式可知，衍射远场总功率可由物理意义上行波场的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$ 表示为[26]

$$P_{\mathrm{OP}}(\xi) = 2\pi\lambda^2 C\int_0^\infty S_{\mathrm{P}}^2(F_r) F_r \mathrm{d}F_r. \tag{7}$$

由(2)式、(6)式和(7)式知，在观察平面上的衍射远场总功率计算值与衍射源总功率的关系为

$$P_{\mathrm{OP}}(\xi) \leqslant P_{\mathrm{DS}}(\xi). \tag{8}$$

在(8)式中，当且仅当衍射源尺寸 ξ 足够大时，等号成立。对于傍轴衍射光束，当 $F_r > 1$ 时，$S(F_r) \approx 0$，由(2)式知，对于傍轴衍射光束，物理意义上的空间频谱 $S_P(F_r)$ 几乎就是数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$，则衍射远场总功率的计算值与衍射源总功率几乎相等，即 $P_{\mathrm{OP}}(\xi) \approx P_{\mathrm{DS}}(\xi)$，衍射远场总功率的计算值基本满足能量守恒定律。

对于非傍轴衍射光束，虽然衍射远场总功率的计算值 $P_{\mathrm{OP}}(\xi)$ 与观察平面位置 z 无关，但是当 $F_r > 1$ 时，$S(F_r) \neq 0$，由于 $S_{\mathrm{P}}(F_r) = S(F_r) f_{\mathrm{circ}}(F_r)$，定义域 $[0,1]$ 之外的数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$ 没有用于衍射远场总功率的计算，导致 $P_{\mathrm{OP}}(\xi) < P_{\mathrm{DS}}(\xi)$，衍射远场总功率的计算值不满足能量守恒定律。

为了使瑞利-索末菲标量衍射积分公式也可适用于分析非傍轴衍射光束的传输特性，可将数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$ 当成物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$，即将物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$ 的定义域从 $[0,1]$ 延拓为 $[0,\infty)$，$S_{\mathrm{P}}(F_r) = S(F_r)$。由(6)式和(7)式知，$P_{\mathrm{OP}}(\xi) \equiv P_{\mathrm{DS}}(\xi)$，观察平面上的衍射远场总功率计算值满足能量守恒定律，与帕斯瓦尔定理一致。

根据行波场光束传输的能量守恒定律，可定义观察平面上的衍射远场总功率的相对计算误差

$$\delta_{\mathrm{P}}(\xi) = \frac{P_{\mathrm{OP}}(\xi) - P_{\mathrm{DS}}(\xi)}{P_{\mathrm{DS}}(\xi)}. \tag{9}$$

由(6)式和(7)式知，衍射远场总功率的相对计算误差可由数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$表示为

$$\delta_{\mathrm{P}}(\xi)=-\frac{\int_{1}^{\infty}S^2(F_r)F_r\mathrm{d}F_r}{\int_{0}^{\infty}S^2(F_r)F_r\mathrm{d}F_r}. \tag{10}$$

以束腰光斑半径为 ω_0 的非傍轴 TEM_{00} 模高斯光束无受限衍射为例，衍射源为高斯光束束腰，其归一化场分布 $\Psi(r_\lambda)=\exp(-r_\lambda^2/\omega_{0,\lambda}^2)$。由(3)式知，数学意义上的空间频谱分布为[29]

$$S(F_r)=\pi\omega_{0,\lambda}^2\exp(-\pi^2\omega_{0,\lambda}^2F_r^2), \tag{11}$$

式中 $\omega_{0,\lambda}=\omega_0/\lambda$ 为归一化束腰光斑半径。

由(10)式知，衍射远场总功率的相对计算误差 $\delta_{\mathrm{P}}(\omega_{0,\lambda})$与 TEM_{00} 模高斯光束的归一化束腰光斑半径 $\omega_{0,\lambda}$关系为

$$\delta_{\mathrm{P}}(\omega_{0,\lambda})=-\exp(-2\pi^2\omega_{0,\lambda}^2). \tag{12}$$

根据(12)式，当衍射源为 TEM_{00} 模高斯光束束腰时，基于瑞利-索末菲标量衍射积分公式计算的衍射远场总功率的相对计算误差 $\delta_{\mathrm{P}}(\omega_{0,\lambda})$与归一化束腰光斑半径 $\omega_{0,\lambda}$关系如图 2 的虚线所示。

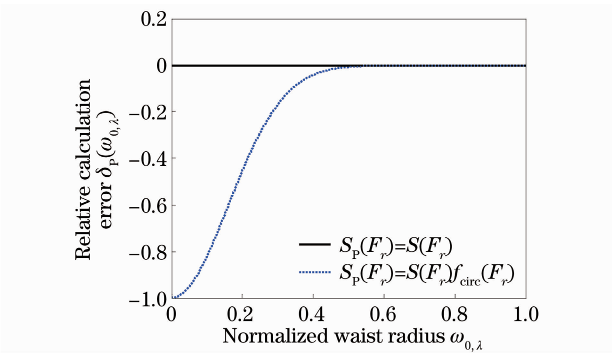

图 2　衍射远场总功率的相对计算误差与衍射源归一化束腰光斑半径关系示意图

Fig. 2　Characteristics of the relative calculation errors of far field total power versus the normalized waist radius

由图 2 知，在观察平面上衍射远场总功率的相对计算误差的绝对值$|\delta_{\mathrm{P}}(\omega_{0,\lambda})|$随 TEM_{00} 模高斯光束的归一化束腰光斑半径 $\omega_{0,\lambda}$增加而单调递减。当 $\omega_{0,\lambda}<0.1874$ 时，相对计算误差的绝对值 $|\delta_{\mathrm{P}}(\omega_{0,\lambda})|>50\%$；当 $\omega_{0,\lambda}>0.483$ 时，$|\delta_{\mathrm{P}}(\omega_{0,\lambda})|<1\%$。

若将数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$ 当成物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$，衍射远场总功率的计算值满足能量守恒定律，相对计算误差 $\delta_{\mathrm{P}}(\omega_{0,\lambda})\equiv 0$，相对计算误差 $\delta_{\mathrm{P}}(\omega_{0,\lambda})$ 与高斯光束的归一化束腰光斑半径 $\omega_{0,\lambda}$ 关系如图 2 中的实线所示。

因此，当采用瑞利-索末菲标量衍射积分公式分析非傍轴衍射光束特性时，由于物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$ 省略了 $F_r>1$ 时的非零数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$，造成衍射远场总功率的计算误差，不适用于分析 $\omega_0\ll\lambda$ 的非傍轴高斯光束传输特性。

实际上，若衍射场介质为无损介质，无论是傍轴还是非傍轴衍射光束，由实际的空间频谱分布根据(7)式计算的衍射远场总功率恒等于衍射源总功率，不会出现违背能量守恒定律的现象。

但是，由于标量衍射积分公式的局限性，不适用于非傍轴衍射光束的表达，若非傍轴衍射光束空间频谱分布 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$ 由标量衍射积分公式计算，则由 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$ 根据(7)式计算的衍射远场总功率不满足能量守恒定律，不适用于非傍轴衍射光束的传输特性分析，但它却被广泛应用，由此将导致所分析的包括光束传输因子在内的非傍轴衍射光束传输特性产生误差。

3　光束传输因子

根据 Siegman 基于束腰光强分布二阶矩及其空间频谱强度分布二阶矩定义的 M^2 因子[1]，光束传输因子的计算公式为

$$M^2=\pi\omega_{\lambda,\mathrm{SM}}F_{r,\mathrm{SM}}, \tag{13}$$

式中，$\omega_{\lambda,\mathrm{SM}}$ 和 $F_{r,\mathrm{SM}}$ 分别为二阶矩归一化衍射源光斑半径和归一化径向空间频率半径。

若衍射源为能量源或功率源，衍射源总功率 $P_{\mathrm{DS}}(\xi)$ 为有限值，$\omega_{\lambda,\mathrm{SM}}$ 和 $F_{r,\mathrm{SM}}$ 的计算公式[7,26,28,30]可写成相同的形式：

$$\xi_{\mathrm{SM}}=\left[\frac{2\int_{0}^{\infty}f^2(\xi)\xi^3\mathrm{d}\xi}{\int_{0}^{\infty}f^2(\xi)\xi\mathrm{d}\xi}\right]^{1/2}. \tag{14}$$

二阶矩归一化衍射源光斑半径 $\omega_{\lambda,\mathrm{SM}}$由衍射源的场分布 $\Psi(r_\lambda)$根据(14)式计算[7,31]。

由于衍射场为行波场，物理意义上的空间频谱的定义域[0,1]有明确的物理意义，因此常被用于非傍轴衍射的远场光强分布二阶矩计算[11~17]和 Petermann II 模场直径的空间频谱分布二阶矩算法的计算[26,28,29]。则基于物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$定义的二阶矩归一化径向空间频率半径 $F_{r,\mathrm{SM,P}}$可由 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$根据(14)式计算[7,26,28,29]。

由(13)式和(14)式可知，基于物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$定义的非傍轴衍射光束的光束传输因子计算公式为

$$M_{\mathrm{P}}^2=2\pi\left[\frac{\int_0^{\infty}\Psi^2(r_\lambda)r_\lambda^3\mathrm{d}r_\lambda\int_0^1 S_{\mathrm{P}}^2(F_r)F_r^3\mathrm{d}F_r}{\int_0^{\infty}\Psi^2(r_\lambda)r_\lambda\mathrm{d}r_\lambda\int_0^1 S_{\mathrm{P}}^2(F_r)F_r\mathrm{d}F_r}\right]^{1/2}. \tag{15}$$

但是，由于标量衍射积分公式不适用于极度非傍轴衍射光束的传输特性分析，基于物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$定义的二阶矩归一化径向空间频率半径 $F_{r,\mathrm{SM,P}}$和光束传输因子 M_{P}^2 的计算值将出现异常。

为了使瑞利-索末菲标量衍射积分公式也可适用于分析非傍轴衍射光束的 M^2 因子特性，将数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$ 当成物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$，即令 $S_{\mathrm{P}}(F_r)=S(F_r)$，此时衍射远场总功率计算值满足能量守恒定律。因此，基于数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$ 二阶矩定义的归一化径向空间频率半径 $F_{r,\mathrm{SM}}$ 有一定意义，它由数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$ 根据(14)式计算。

由(13)式和(14)式知，基于数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$二阶矩定义的非傍轴衍射光束的光束传输因子计算公式为

$$M^2=2\pi\left[\frac{\int_0^{\infty}\Psi^2(r_\lambda)r_\lambda^3\mathrm{d}r_\lambda\int_0^{\infty} S^2(F_r)F_r^3\mathrm{d}F_r}{\int_0^{\infty}\Psi^2(r_\lambda)r_\lambda\mathrm{d}r_\lambda\int_0^{\infty} S^2(F_r)F_r\mathrm{d}F_r}\right]^{1/2}. \tag{16}$$

由(16)式知，对于非傍轴衍射光束，若将物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$的定义域从[0,1]延拓为[0,∞)，可得到与傍轴衍射光束的光束传输因子范围相同的结论[1,7,32]，即非傍轴衍射光束的光束传输因子 $M^2\geqslant 1$。

但是，在进行非傍轴衍射光束特性分析时，由于当 $F_r>1$ 时，数学概念上的空间频谱为非零值，即 $S(F_r)\neq 0$，则由 $S_{\mathrm{P}}(F_r)=S(F_r)f_{\mathrm{circ}}(F_r)$ 和(14)式知，$F_{r,\mathrm{SM,P}}\neq F_{r,\mathrm{SM}}$，再由(15)式和(16)式知，$M_{\mathrm{P}}^2\neq M^2$。则可定义基于物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$定义的 M^2 因子的相对计算误差

$$\delta_{M^2}(\xi)=\frac{M_{\mathrm{P}}^2(\xi)-M^2(\xi)}{M^2(\xi)}. \tag{17}$$

由(15)式和(16)式知，基于物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$定义的 M^2 因子的相对计算误差为

$$\delta_{M^2}(\xi)=\left[\frac{\int_0^1 S^2(F_r)F_r^3\mathrm{d}F_r\int_0^{\infty} S^2(F_r)F_r\mathrm{d}F_r}{\int_0^1 S^2(F_r)F_r\mathrm{d}F\int_0^{\infty} S^2(F_r)F_r^3\mathrm{d}F_r}\right]^{1/2}-1. \tag{18}$$

仍以束腰光斑半径为 ω_0 的非傍轴 TEM_{00} 模高斯光束无受限衍射为例，由(11)式和(18)式知，基于物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$定义的 M^2 因子的相对计算误差与归一化束腰光斑半径 $\omega_{0,\lambda}$关系为

$$\delta_{M^2}(\omega_{0,\lambda})=\left[1-\frac{2\pi^2\omega_{0,\lambda}^2}{\exp(2\pi^2\omega_{0,\lambda}^2)-1}\right]^{1/2}-1. \tag{19}$$

根据(19)式，基于物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$定义的 M^2 因子的相对计算误差与非傍轴 TEM_{00}模高斯光束束腰光斑半径 $\omega_{0,\lambda}$关系如图 3 中的虚线所示。

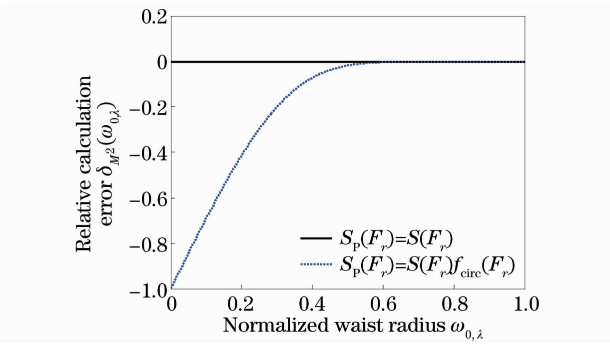

图 3 光束传输因子的相对计算误差与衍射源归一化束腰光斑半径关系示意图

Fig. 3 Characteristics of the relative calculation errors of beam propagation factor versus the normalized waist radius

由图 3 知，基于物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$定义的 M^2 因子的相对计算误差的绝对值 $|\delta_{M2}(\omega_{0,\lambda})|$随归一化束腰光斑半径 $\omega_{0,\lambda}$ 增加而单调递减。当 $\omega_{0,\lambda}<0.1669$ 时，相对计算误差的绝对值 $|\delta_{M^2}(\omega_{0,\lambda})|>50\%$，当 $\omega_{0,\lambda}>0.5352$ 时，$|\delta_{M^2}(\omega_{0,\lambda})|<1\%$。

因此，当采用瑞利-索末菲标量衍射积分公式分析非傍轴衍射光束的 M^2 因子特性时，由于物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$ 省略了 $F_r>1$ 时的非零数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$，将造成 M^2 因子的计算值出现误差。基于物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$ 定义的 M^2 因子不适用于分析 $\omega_0\ll\lambda$ 的非傍轴高斯光束 M^2 因子特性。

当将数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$ 当成物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$ 用于分析非傍轴衍射光束特性时，由(13)式和(14)式知，$\omega_{\lambda,\mathrm{SM}}=\omega_{0,\lambda}$，$F_{r,\mathrm{SM}}=1/(\pi\omega_{0,\lambda})$，$M^2=1$，与文献[1]一致。基于数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$ 定义的 M^2 因子的相对计算误差 $\delta_{M^2}(\omega_{0,\lambda})\equiv 0$，相对计算误差 $\delta_{M^2}(\omega_{0,\lambda})$ 与 TEM_{00} 模高斯光束的归一化束腰光斑半径 $\omega_{0,\lambda}$ 关系如图 3

中的实线所示。

实际上，若衍射场介质为无损介质，无论实际光束是傍轴或非傍轴衍射光束，由实际的空间频谱分布计算的衍射远场总功率必然满足能量守恒定律，由实际的空间频谱分布根据(14)式计算的二阶矩归一化径向空间频率半径 $F_{r,\mathrm{SM,P}}=F_{r,\mathrm{SM}}$，则由实际的空间频谱分布根据(15)式计算的光束传输因子 M_{P}^2 与根据(16)式计算的光束传输因子 M^2 一致。

而且，光束传输因子由衍射源场分布决定，与采用的衍射远场分布计算公式无关，根据 Petermann I 和 Petermann II 两种模场直径计算公式中二阶矩算法和微分算子算法的关系[26,28,29,30]，若衍射源为非受限衍射源，且场分布不存在跳跃现象，场分布函数处处连续可导，即 $\mathrm{d}\Psi(r_\lambda)/\mathrm{d}r_\lambda$ 为有限值，则基于数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$ 二阶矩定义的归一化径向空间频率半径 $F_{r,\mathrm{SM}}$ 可由基于微分算子算法定义的衍射源光斑半径 $\omega_{\lambda,\mathrm{DO}}$ 表达；同样，若数学概念上的空间频谱分布不存在跳跃现象，空间频谱分布函数处处连续可导，即 $\mathrm{d}S(F_r)/\mathrm{d}F_r$ 为有限值，基于二阶矩算法定义的衍射源光斑半径 $\omega_{\lambda,\mathrm{SM}}$ 可由基于数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$ 微分算子算法定义的归一化径向空间频率半径 $F_{r,\mathrm{DO}}$ 表达。

若衍射源是振幅和相位均与参考点的角向坐标 φ 无关的标量光场，数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$ 和标量场分布 $\Psi(r_\lambda)$ 互为零阶汉克尔变换和逆变换关系，则无论衍射场光束是傍轴或非傍轴衍射光束，若场分布和空间频谱分布不存在 $\mathrm{d}\Psi(r_\lambda)/\mathrm{d}r_\lambda\rightarrow\infty$ 和 $\mathrm{d}S(F_r)/\mathrm{d}F_r\rightarrow\infty$，基于微分算子算法定义的 $\omega_{\lambda,\mathrm{DO}}$ 和 $F_{r,\mathrm{DO}}$ 的计算公式[7,26,28,30]可写成相同的形式，即

$$\xi_{\mathrm{DO}}=\left\{\frac{2\int_0^\infty f^2(\xi)\xi\mathrm{d}\xi}{\int_0^\infty\left[\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right]^2\xi\mathrm{d}\xi}\right\}^{1/2}. \tag{20}$$

则光束传输因子与两种定义的衍射源光斑半径及两种定义的归一化径向空间频率半径之间关系为[7,30]

$$M^2=\frac{\omega_{\lambda,\mathrm{SM}}}{\omega_{\lambda,\mathrm{DO}}}=\frac{F_{r,\mathrm{SM}}}{F_{r,\mathrm{DO}}}. \tag{21}$$

由(14)式和(20)式知，基于二阶矩和微分算子两种定义的衍射源光斑半径计算的光束传输因子与基于二阶矩和微分算子两种定义的归一化径向空间频率半径计算的传输因子可写成相同的形式[7,30]：

$$M^2=\frac{\left\{\int_0^\infty f^2(\xi)\xi^3\mathrm{d}\xi\int_0^\infty\left[\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right]^2\xi\mathrm{d}\xi\right\}^{1/2}}{\int_0^\infty f^2(\xi)\xi\mathrm{d}\xi}. \tag{22}$$

若衍射源场分布可精确测量，无论衍射场光束是傍轴或非傍轴衍射光束，M^2 因子均可由衍射源场分布 $\Psi(r_\lambda)$ 根据(22)式直接计算获得[7,30]。

若衍射场的空间频谱分布可精确测量，无论衍射场光束是傍轴或非傍轴衍射光束，M^2 因子均可由衍射场的空间频谱分布 $S(F_r)$ 根据(22)式直接获得计算。

根据(22)式直接计算的 M^2 因子与场分布和空间频谱分布之间的关系无关，由于不需进行场分布与空间频谱分布之间的变换或逆变换，不会因所采用的变换公式的局限性而引起误差。

4 结 论

在采用瑞利-索末菲标量衍射积分公式分析非傍轴衍射光束特性时，由于物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$ 的定义域[0,1]与数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$ 的定义域[0,∞)存在差异，导致衍射远场观察平面上的总功率计算值不满足能量守恒定律，说明该标量衍射积分公式不适用于非傍轴衍射光束特性分析。若将基于该标量衍射积分公式的物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$ 应用于非傍轴衍射光束的光束传输因子计算，将导致 M^2 因子计算值的异常。

将物理意义上的空间频谱 $S_{\mathrm{P}}(F_r)$ 延拓为数学概念上的空间频谱 $S(F_r)$，衍射远场总功率计算值与帕斯瓦尔定理一致，可用于非傍轴衍射光束的光束传输因子计算，其结果与文献[1]在傍轴条件下的结论一致。

参 考 文 献

1 A. E. Siegman. New developments in laser resonators [C]. *SPIE*, 1990, **1224**: 2～14

2 C. Y. Liu, H. Guo, W. Hu *et al.*. A Schrödinger formulation research for light beam propagation[J]. *Science in China* (*Series A*), 2000, **43**(3): 312～322

3 Cao Qing, Deng Ximing, Guo Hong. Optical beam quality factor of nonparaxial light beams. I. Definition[J]. *Acta Optica Sinica*, 1996, **16**(9): 1217～1222
曹 清，邓锡铭，郭 弘. 非傍轴光束的光束质量因子. I. 定义[J]. 光学学报，1996，**16**(9)：1217～1222

4 Cao Qing, Deng Ximing. Optical beam quality factor of nonparaxial light beams. II. Property analysis[J]. *Acta Optica Sinica*, 1996, **16**(10): 1345～1349
曹 清，邓锡铭. 非傍轴光束的光束质量因子. II. 特性分析[J]. 光学学报，1996，**16**(10)：1345～1349

5 Guo Fuyan, Lin Bin, Chen Yuqing *et al*.. Beam parameters in the diffracted field of dielectric planar waveguide TE_0 mode[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(6): 702～706
郭福源，林 斌，陈钰清 等. 介质平面波导 TE_0 模衍射场的光束参量[J]. 光学学报，2003，**23**(6)：702～706

6 F. Y. Guo, L. H. Li, H. Zheng. Diffracted beam parameters of TE_0 mode symmetrical MQW planar waveguide[C]. *SPIE*, 2012, **8420**: 842004

7 Guo Fuyan, Lin Bin, Chen Yuqing *et al*.. Characteristic beam parameters in diffracted field of fiber end face[J]. *J. Zhejiang University (Engineering Science)*, 2004, **38**(3): 281～285
郭福源，林 斌，陈钰清 等. 光纤端面衍射场光束的特征参数[J]. 浙江大学学报(工学版)，2004，**38**(3)：281～285

8 G. Q. Zhou, D. M. Zhao, J. X. Xu *et al*.. Semiconductor laser with beam quality factor $M^2 < 1$[J]. *Opt. Commun.*, 2001, **187**(4-6): 395～399

9 Zhou Guoquan. Propagation of nonparaxial vector Gaussian beam [J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(4): 1572～1577
周国泉. 非傍轴矢量高斯光束的传输[J]. 物理学报，2005，**54**(4)：1572～1577

10 M. A. Porras. Non-paraxial vectorial moment theory of light beam propagation[J]. *Opt. Commun.*, 1996, **127**(1-3): 79～95

11 Li Lianhuang, Guo Fuyuan. Analysis on diffractive beam parameters of TE_0 mode[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(s1): 74～78
李连煌，郭福源. 平面光波导 TE_0 模衍射光束参量特性分析[J]. 光学学报，2009，**29**(s1)：74～78

12 L. H. Li, F. Y. Guo. Study on the non-paraxial beam parameters of single-mode fiber[C]. *SPIE*, 2010, **7851**: 78510V

13 Deng Xiaojiu, Niu Guojian, Liu Caixia *et al*.. Propagation characteristics of nonparaxial Gaussian beams[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(9): 094202
邓小玖，牛国鉴，刘彩霞 等. 非傍轴高斯光束传输特性的研究[J]. 物理学报，2011，**60**(9)：094202

14 Liu Caixia, Deng Xiaojiu, Niu Guojian *et al*.. Propagation characteristics of nonparaxial scalar Gaussian beam[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2010, **47**(9): 092601
刘彩霞，邓小玖，牛国鉴 等. 非傍轴标量高斯光束传输特性的研究[J]. 激光与光电子学进展，2010，**47**(9)：092601

15 Deng Xiaojiu, Hu Jigang, Liu Caixia *et al*.. Study of the beam quality factor[J]. *J. Hefei Uuniversity of Technology (Natural Science)*, 2002, **25**(6): 1187～1190
邓小玖，胡继刚，刘彩霞 等. 光束质量因子的研究[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版)，2002，**25**(6)：1187～1190

16 Bin Lin, Xuejin Wen, Fuyuan Guo. Influence of cladding layer field of slab waveguide on M^2 factor[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2003, **1**(8): 441～443

17 Wang Ke, Guo Fuyuan, Lin Bin. The beam propagation factor M^2 of fiber cross-section diffraction[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(S1): 25～26

18 Deng Xiaojiu, Wu Benke, Xiao Su *et al*.. Energy transmission of a small aperture in near-field diffraction[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(12): 1432～1436
邓小玖，吴本科，肖 苏 等. 微小孔近场衍射的能量传输[J]. 光学学报，2001，**21**(12)：1432～1436

19 Wu Dazheng, Yang Linyao, Wang Songlin *et al*.. Analysis of Signals and Linear Systems (4th Edition)[M]. Beijing: Higher Education Press, 2010. 119～120, 162
吴大正，杨林耀，王松林 等. 信号与线性系统分析(第四版)[M]. 北京：高等教育出版社，2010. 119～120，162

20 Deng Xiaojiu, Wang Guoan, Liu Caixia *et al*.. Divergent characteristic of the second order moment of nonparaxial vector beams[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, **58**(12): 8260～8263
邓小玖，汪国安，刘彩霞 等. 非傍轴矢量光束二阶矩的发散特性[J]. 物理学报，2009，**58**(12)：8260～8263

21 Xie Jianping, Ming Hai, Wang Pei. The Foundation of Modern Optics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006, 59～64, 109～115
谢建平，明 海，王 沛. 近代光学基础[M]. 北京：高等教育出版社，2006，59～64，109～115

22 J. W. Goodman. Introduction to Fourier Optics (2nd Edition) [M]. New York: McGraw-Hill, 1996. 49～51

23 M. Born, E. Wolf. Principles of Optics (7th Edition)[M]. Oxford: Cambridge University Press, 2000. 430～431, 514～516

24 W. Freude, G. K. Grau. Rayleigh-Sommerfeld and Helmholtz-Kirchhoff integrals: application to the scalar and vectorial theory of wave propagation and diffraction [J]. *J. Lightwave Technology*, 1995, **13**(1): 24～32

25 Yang Guoguang, Song Feijun. Advance Physical Optics (2nd Edition)[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2008. 69～70
羊国光，宋菲君. 高等物理光学(第二版)[M]. 合肥：中国科技大学出版社，2008. 69～70

26 M. Artiglia, G. Coppa, P. Di Vita *et al*.. Mode field diameter measurements in single-mode optical fibers[J]. *J. Lightwave Technology*, 1989, **7**(8): 1139～1152

27 Lin Bin, Guo Fuyuan, Chen Yuqing *et al*.. Beam characteristic analysis of scalar diffraction from weakly guiding optical fiber[J]. *Chinese J. Lasers*, 2003, **30**(9): 809～813
林 斌，郭福源，陈钰清 等. 弱导光纤的标量衍射光束特性分析[J]. 中国激光，2003，**30**(9)：809～813

28 Zou Linsen. Conformability of defining mode-field diameter by far-field scan and variable aperture with Petermann definition[J]. *Study on Optical Communications*, 1995, (2): 15～18, 22
邹林森. 远场扫描和可变孔径定义模场直径与 Petermann 定义一致[J]. 光通信研究，1995，(2)：15～18，22

29 M. Young. Mode-field diameter of single-mode optical fiber by far-field scanning[J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(24): 5605～5619

30 S. Saghafi, C. J. R. Sheppard. The beam propagation factor for higher order Gaussian beams [J]. *Opt. Commun.*, 1998, **153**(4-6): 207～210

31 K. Petermann. Fundamental mode microbending loss in graded index and W fibers[J]. *Opt. Quantum Electron.*, 1977, **9**(2): 167～175

32 Gao Chunqing, W. Horst. On the problems of the beam propagation factor M^2[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2001, **30**(2): 240～242
高春清，W. Horst. 激光光束传输因子 M^2 的一些问题[J]. 光子学报，2001，**30**(2)：240～242

栏目编辑：李文喆