

# 基于并行光学向量矩阵乘法器的离散傅里叶变换方法研究

张远达 王 博 陈怡休 贾 辉 李修建

(国防科学技术大学理学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要** 离散傅里叶变换是数字信号处理中最核心的数学工具之一。传统基于数字电路的离散傅里叶变换方法受限于电子器件的速度,难以满足高速信号处理要求,尤其制约了太比特每秒超高速光处理技术的发展。基于并行光学向量矩阵乘法器原理的离散傅里叶变换方法,利用光传播的高速和低损耗特点,提出以相位空间光调制器为核心变换矩阵的全光并行离散傅里叶变换方法,并通过实验进行了验证。实验结果显示,所提出的全光并行离散傅里叶变换误差小于 0.13,通过进一步的模块集成和性能提升,该方法将在高速光信号处理中有较大的应用潜力。

**关键词** 傅里叶光学;离散傅里叶变换;相位空间光调制器;并行光学向量矩阵乘法

**中图分类号** O438 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201239.s209002

## Realization of the Discrete Fourier Transform Using a Parallel Optical Vector Matrix Multiplication Processor

Zhang Yuanda Wang Bo Chen Yixiu Jia Hui Li Xiujian

(College of Science, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

**Abstract** Fourier transform is one of the keys of the mathematical tools in digital signal processing. The performance of traditional discrete Fourier transform based on digital circuit is restricted to the electronic device speed, which is difficult to meet the requirements of the high speed of signal processing, especially restricting the development of Tbit/s super-speed optical processing technology. The discrete Fourier transform method based on the parallel optical vector matrix on time-multiplier principle is studied. The features of high speed and low heat dissipation of light are utilized and putting all optical parallel discrete Fourier transform method with phase only spatial light modulator as the core of transformation matrixes is put forward, which gets verifications by means of experiment. The experimental results show that the proposed all optical parallel discrete Fourier transform has less error (about 0.13). With further modulation and promotion of function, the method can have widely potential application in the high speed optical signal processing.

**Key words** Fourier optics; discrete Fourier transform; phase spatial light modulator; parallel optical vector matrix multiplication

**OCIS codes** 120.0280; 040.1490; 040.1520; 070.4550

## 1 引 言

离散傅里叶变换作为数字信号处理中核心的数学工具之一,在高速信号处理中得到广泛应用。针对电学处理过程中的传输速度限制以及热量耗散这一瓶颈,早在 1978 年,Goodman 等<sup>[1]</sup>就提出了利用

全光的方法实现离散型傅里叶变换,由于全光傅里叶变换中使用的所有部分都是被动器件,其能耗低,并且耗时几乎不会随着系统的复杂性和采样频率的提高而增加<sup>[2]</sup>。由于利用了光学器件(透镜,柱透镜等)的并行变换特性,这种方法要比传统基于电子器

收稿日期: 2012-06-10; 收到修改稿日期: 2012-07-10

基金项目: 国家自然科学基金(61107005)资助课题。

作者简介: 张远达(1989—),男,本科,主要从事光计算方面的研究。E-mail: 416853957@qq.com

导师简介: 李修建(1976—),男,副教授,硕士生导师,主要从事信息光学、超快光学等方面研究。

E-mail: optic\_nudt@188.com

件方法的速度快很多。但 Goodman 等提出的方法是基于振幅调制空间光调制器,相比于相位空间光调制器,对于复数中的实部和虚部的运算需要通过比较复杂的参数分解来实现傅里叶变换;在此之后,Marhic 等<sup>[3,4]</sup>开始选用耦合器、分束器、转换器以及相位延迟器等光学器件来实现光线分束、相位调节等功能。目前,利用全光快速傅里叶变换的方法,已经实现了 26 Tbit/s 的超级信道传输<sup>[5~7]</sup>,但主要实现的是 8 个单元的离散傅里叶变换,进一步扩展单元数目比较困难。

本文提出基于相位空间光调制器,利用并行矩阵向量乘法器的原理进行离散傅里叶变换方法,可以实现更多单元的离散傅里叶变换,进而改善受电学瓶颈限制的传统傅里叶变换方法,提高信号处理的整体速率。

## 2 理论分析

光学矩阵与矢量的乘法可表示为

$$\begin{bmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k0} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}. \quad (1)$$

其主要工作原理<sup>[8]</sup>如下:一维向量激光发射器发出的一列激光经过准直、聚焦,再经过柱透镜扩束,与具有可控反射率或透射率的空间光调制器作用之后,由另一柱透镜将矩阵光在垂直原柱透镜光轴方向进行压缩,这样叠加后得到的一个行向量,即是所要计算的向量与矩阵的乘法结果。其中向量是由激光器发出,矩阵是由空间光调制器输入,经过光学变

换最后由光敏器件(如 CCD)接收。图 1 即是一个并行光学向量矩阵乘法器的原理图,虚线部分省略了光学光路部分。对于相位空间光调制器,其在系统中的工作过程也是如此。

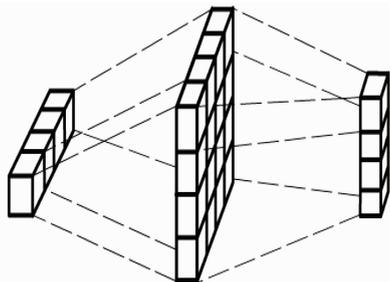


图 1 并行光学向量矩阵乘法器原理

Fig. 1 Parallel optical vector matrix multiplication principle

根据上述光学乘法系统的原理,离散傅里叶(逆)变换也可以通过光学矩阵矢量乘法来实现<sup>[9]</sup>。Goodman 等提出的利用全光的方法可以实现离散型傅里叶变换,然而由于其选用的是灰度空间光调制器,需要将每个数据分解为 3 个因子才能够实现相位上的调制过程,将原来 1 步的问题分解为 9 步,这就使得运算过于复杂,而选择相位空间光调制器进行相位调制就大大减少了运算步骤,更为直接清晰。

离散傅里叶变换在时域和频域都呈离散的形式,即

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-i \frac{2\pi}{N}nk\right) X_n. \quad (2)$$

式中  $k=0,1,2,\dots,N-1$ 。离散傅里叶变换的表达式可以表达为一个列向量与一个变换矩阵相乘而得到另一个列向量的过程,即

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} \times 1\right) & \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} \times 2\right) & \cdots & \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} \times (N-1)\right] \\ 1 & \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} \times 2\right) & \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} \times 2 \times 2\right) & \cdots & \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} \times 2 \times (N-1)\right] \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} \times (N-1)\right] & \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} \times (N-1) \times 2\right] & \cdots & \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} \times (N-1) \times (N-1)\right] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

实验的整个过程就是实现这一矩阵乘法的运算,根据矩阵向量乘法的原理,主要分为利用灰度空间光调制器等对入射信号(即待转换信号向量矩阵)的获取、相位空间光调制器对入射信号的调制(调制矩阵)、柱透镜对调制后的光束进行横向一维聚焦的求和运算以及对变换后的信号的接收和处理分析。

### 3 实验分析

#### 3.1 实验系统设计

实验系统如图 2、3 所示,图 2 中  $SLM_1$  为灰度空间光调制器, $SLM_2$  为相位空间光调制器, $L_1$  为柱面镜,BE 为扩束准直系统,1/2 plate 为半波片, $P_1$ 、 $P_2$  为偏振片。所使用部分器件性能参数如下:

- 1) 激光器:类型为 He-Ne 激光器,工作波长为 632.8 nm;
- 2) 灰度空间光调制器:有效面积为  $14.4 \text{ mm} \times$

$10.8 \text{ mm}$ ,有效像素数为  $1024 \text{ pixel} \times 768 \text{ pixel}$ ,最大刷新率为 60 Hz;

- 3) 相位空间光调制器:有效面积为  $15.36 \text{ mm} \times 8.64 \text{ mm}$ ,有效像素数为  $1920 \text{ pixel} \times 1080 \text{ pixel}$ ,最大刷新率为 60 Hz;

- 4) 柱面镜  $L_1$ :焦距  $f=50 \text{ cm}$ ;

- 5) CCD:有效像素数为  $640 \text{ pixel} \times 480 \text{ pixel}$ ,面积为  $5.6 \text{ mm} \times 4.2 \text{ mm}$ 。

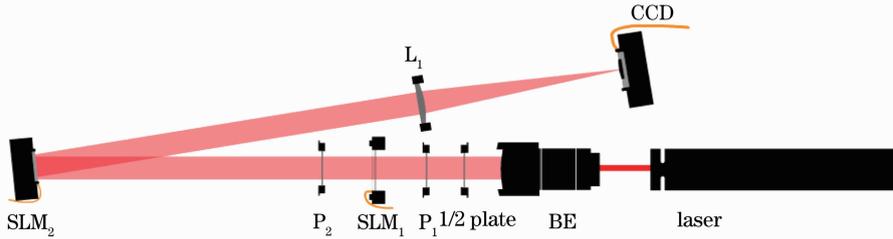


图 2 实验系统原理图

Fig. 2 Experimental system diagram

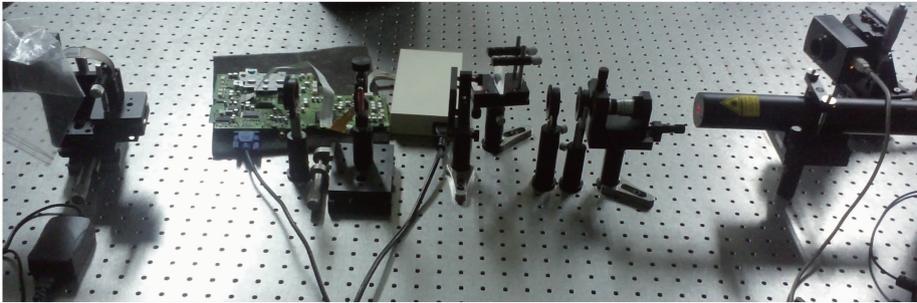


图 3 实验系统实物图

Fig. 3 Experimental system real figure

信号输入部分主要由激光器、扩束准直系统、1/2波片、偏振片  $P_1$ 、 $P_2$  以及灰度空间光调制器实现。1/2 波片和偏振片的组合用于调节出射光的光强;相位空间光调制器要求入射光水平偏振,灰度空间光调制器要求前后偏振片偏振方向一致,按要求调好各偏振片起偏方向;激光发射器发射一束激光经过扩束准直系统的扩束准直作用,得到一个扩束平行光,然后经过载有信号矩阵的灰度空间光调制器,得到每一列元素灰度与相位都相同的信号矩阵。

相位调制过程主要由反射式相位空间光调制器实现,是实验的关键。信号矩阵经过反射式相位空间光调制器的调制,每个矩阵元都得到了相应的相位调制,即乘以某个相位转换因子,也就是(2)式中调制矩阵的矩阵元,相位调制矩阵元的获取方式正是对于 Goodman 等的工作的提升和改善,而不再受限于用灰度调制相位信息时产生的复杂运算。

接收部分由柱透镜  $L_1$  和 CCD 接收器组成。经过相位调制后的信号矩阵,被反射到柱透镜上。在光轴面上,柱透镜对垂直于光轴方向入射的光束进行会聚,经过柱透镜的矩阵光的每一行元素就会被叠加到一点,也就是(2)式中的求和运算,进而利用 CCD 采集信号。

#### 3.2 仿真分析

实验的目的是对离散傅里叶变换的全光实现过程进行模拟验证,即由相位空间光调制器出射到透镜的聚焦完成 FFT 过程的模拟。考虑到要处理的仅仅是实验图像的中心(也可认为是焦距处)的光强分布<sup>[10]</sup>,利用计算机模拟得到了出射光在空间分布的仿真值,取光强在中点处的值即得到实验的理论值;同样将 CCD 采集的图样对中心数值求平均也得到了实验值,最后为了分析得更加清晰,将两份光强分别归一化处理后比较匹配程度,即可做进一步的

数据分析处理。

## 4 实验过程及结果分析

### 4.1 相位矩阵的计算、相位灰度图的绘制

由离散傅里叶变换公式(1)式可得  $3 \times 3$  的相位变换矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\pi}{3} & \frac{4\pi}{3} \\ 0 & \frac{4\pi}{3} & \frac{8\pi}{3} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

在单色光的照射下,超出  $2\pi$  的相位可以减去整数个  $2\pi$ ,如

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\pi}{3} & \frac{4\pi}{3} \\ 0 & \frac{4\pi}{3} & \frac{2\pi}{3} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

与原相位等效。

相位空间光调制器调整到 He-Ne 激光器波长下,输入范围为  $0 \sim 255$  的灰度值,输入到相位空间光调制器的灰度矩阵为  $\mathbf{B}_{3 \times 3} = \frac{\mathbf{A}'}{2\pi} \times 255$ 。

对  $1920 \text{ pixel} \times 1080 \text{ pixel}$  进行分块,通过编程运算,输入不同的规模,得到图 5 的待输入图像,其中图 4(a)~(d)分别是  $3 \times 3, 4 \times 4, 8 \times 8, 10 \times 10$  相位调制矩阵的灰度图像。

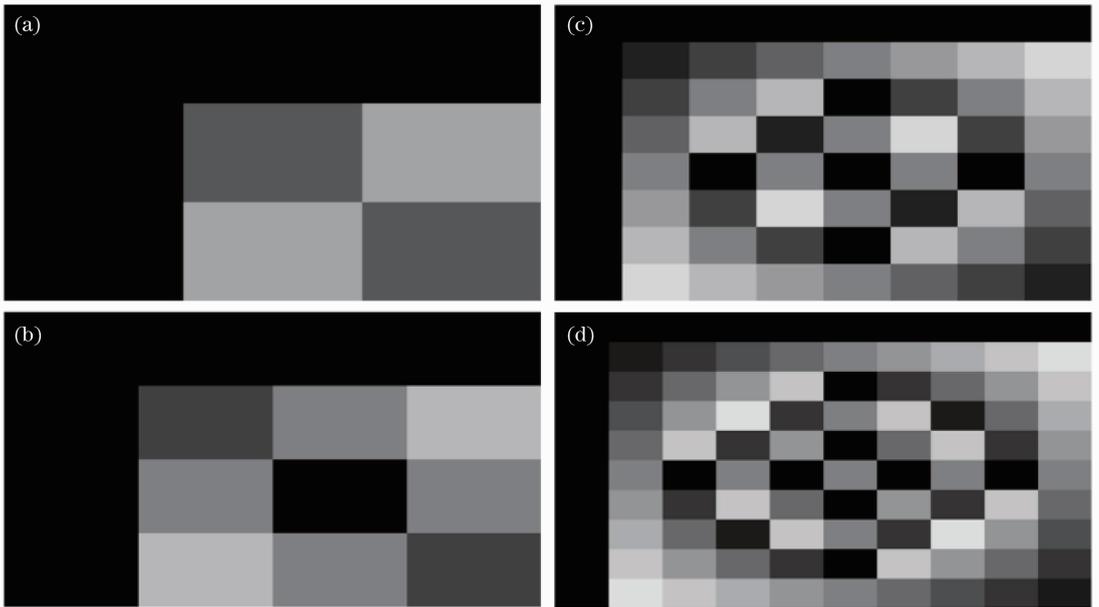


图 4 相位调制矩阵的灰度图像。(a)  $3 \times 3$ ; (b)  $4 \times 4$ ; (c)  $8 \times 8$ ; (d)  $10 \times 10$

Fig. 4 Gray images of phase modulation matrix. (a)  $3 \times 3$ ; (b)  $4 \times 4$ ; (c)  $8 \times 8$ ; (d)  $10 \times 10$

### 4.2 测量值和初步处理

相位空间光调制器载入规模为  $3 \times 3$  的矩阵对应的灰度图,输入到灰度空间光调制器的值为  $(0, 1, 0)$ , CCD 采集图像如图 5 所示,仿真值与实验值如图 6 所示。

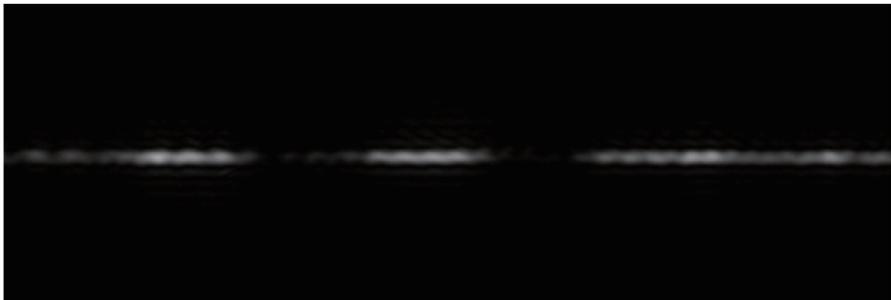


图 5 CCD 采集图像 1

Fig. 5 Image 1 from CCD

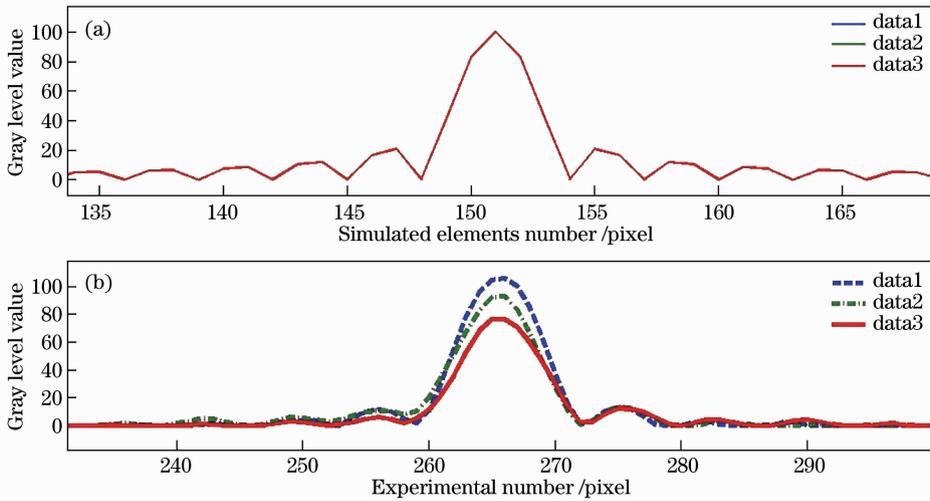


图 6 仿真值与实验值对比(3×3)。(a)仿真值;(b)实验值

Fig. 6 Comparison between experimental results and simulated results (3×3). (a) Simulated values; (b) experimental values

图 6(a)是理论结果,(b)是实验结果。实验结果图以像素为横轴,灰度为纵轴。图像中心即为会聚焦点,故只取聚焦点的灰度值进行处理。理论分析表明每组数据中的第一个都是最大的,数值上等于所有输入值的代数和,将仿真值与实验值均进行归一化处理。取背景灰度值为  $x_{BG}$ , 则其归一化式为

$$x_{normalized} = \frac{x_i - x_{BG}}{\max(x_i) - x_{BG}}. \quad (6)$$

归一化之后,需要对实验值的误差进行评估,引入标准差

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i^{Exp.} - x_i^{Sim.})^2}{n}}. \quad (7)$$

式中  $x_i^{Exp.}$  为实验值,  $x_i^{Sim.}$  为仿真值。由于数据经过归一化处理,  $\sigma$  的值可以看做相对误差。

结合其他 6 组的实验结果,可得到 3×3 规模的归一化值,如表 1 所示。

表 1 3×3 规模的归一化值

Table 1 Normalized value based on 3×3 scale matrix

Input value	Simulated value	Experimental value	$\sigma$
001	(1.00 1.00 1.00)	(0.72 1.00 0.94)	0.087
010	(1.00 1.00 1.00)	(1.00 0.88 0.76)	
011	(1.00 0.50 0.50)	(1.00 0.50 0.52)	
100	(1.00 1.00 1.00)	(0.96 0.99 1.00)	
101	(1.00 0.50 0.50)	(1.00 0.48 0.55)	
110	(1.00 0.50 0.50)	(1.00 0.52 0.49)	
111	(1.00 0.00 0.00)	(1.00 0.02 0.00)	

相位空间光调制器载入 4×4 规模的矩阵对应灰度图时,输入到灰度空间光调制器的值为(0,0,1,0), CCD 采集图像如图 7 所示,在有效条纹的竖直方向上做灰度曲线,其仿真和实验值的对比见图 8。

结合其他 14 组的实验结果,可得到 4×4 规模的归一化值,如表 2 所示。

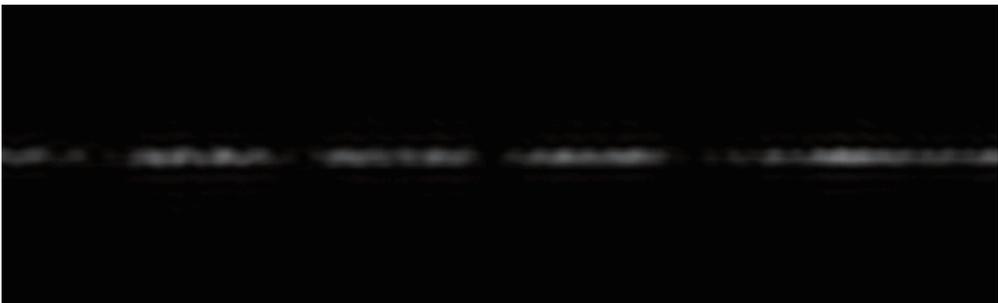


图 7 CCD拍摄结果 2

Fig. 7 Image 2 from CCD

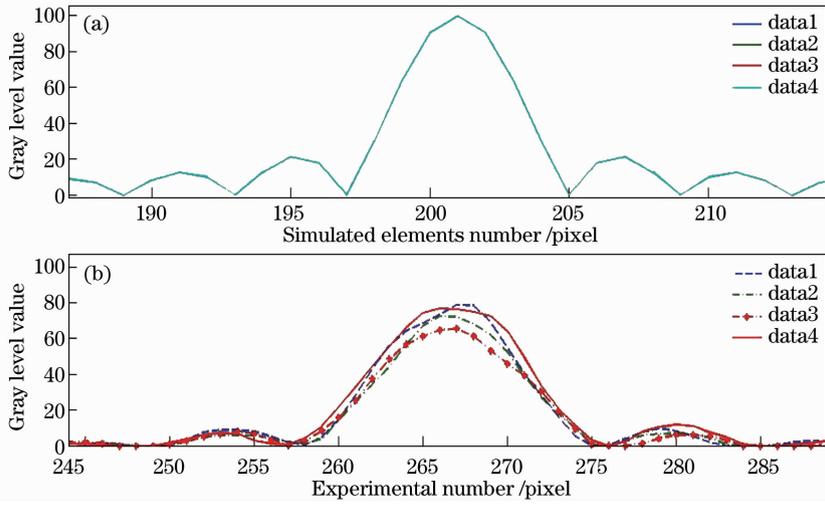


图 8 仿真值与实验值对比(4×4)。(a)仿真值;(b)实验值

Fig. 8 Comparison between experimental results and simulated results (4×4). (a) Simulated values; (b) experimental values

表 2 4×4 规模的归一化值

Table 2 Normalization value based on 4×4 scale matrix

Input value	Simulated value				Experimental value				$\sigma$
0001	(1.00	1.00	1.00	1.00)	(0.88	0.88	0.91	1.00)	0.12
0010	(1.00	1.00	1.00	1.00)	(0.96	0.94	0.85	1.00)	
0011	(1.00	0.71	0.00	0.71)	(1.00	0.75	0.00	0.51)	
0100	(1.00	1.00	1.00	1.00)	(1.00	0.83	0.81	0.84)	
0101	(1.00	0.00	1.00	0.00)	(1.00	0.19	0.81	0.00)	
0110	(1.00	0.71	0.00	0.71)	(1.00	0.33	0.00	0.16)	
0111	(1.00	0.33	0.33	0.33)	(1.00	0.36	0.41	0.40)	
1000	(1.00	1.00	1.00	1.00)	(1.00	0.79	0.90	0.96)	
1001	(1.00	0.71	0.00	0.71)	(1.00	0.56	0.00	0.62)	
1010	(1.00	0.00	1.00	0.00)	(1.00	0.00	0.99	0.05)	
1011	(1.00	0.33	0.33	0.33)	(1.00	0.44	0.45	0.38)	
1100	(1.00	0.71	0.00	0.71)	(1.00	0.48	0.00	0.44)	
1101	(1.00	0.33	0.33	0.33)	(1.00	0.46	0.39	0.34)	
1110	(1.00	0.33	0.33	0.33)	(1.00	0.25	0.19	0.28)	
1111	(1.00	0.00	0.00	0.00)	(1.00	0.05	0.00	0.03)	

4.3 更高维度下的实验

表 4 10×10 规模的归一化值

载入8×8相位调制矩阵,输入到灰度空间光调

Table 4 Normalization value based on 10×10 scale matrix

表 3 8×8 规模的归一化值

Table 3 Normalization value based on 8×8 scale matrix

Input value	Simulated value	Experimental value	$\sigma$
01010101	1.00	0.97	0.079
	0.00	0.10	
	0.00	0.10	
	0.00	0.11	
	1.00	1.00	
	0.00	0.04	
	0.00	0.00	
	0.00	0.11	

Input value	Simulated value	Experimental value	$\sigma$
1111111111	1.00	1.00	0.050
	0.00	0.07	
	0.00	0.04	
	0.00	0.04	
	0.00	0.04	
	0.00	0.05	
	0.00	0.00	
	0.00	0.06	
	0.00	0.02	
	0.00	0.09	

制器的信号为(0,1,0,1,0,1,0,1)时,处理后可得到 $8\times 8$ 规模的归一化值,如表3所示。

载入 $10\times 10$ 相位调制矩阵,输入到灰度空间光调制器的信号为(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)时,处理后可得到 $10\times 10$ 规模的归一化值,如表4所示。

## 5 结 论

理论仿真和实验验证表明,利用并行光学向量矩阵乘法器的原理来实现全光傅里叶变换的方案是可行的。实验中对于一些数据以及实验现象有一定的近似和取舍,主要是基于在误差允许的范围之内实验过程中的光、电噪声的影响可以忽略,而且实验需要的只是一部分相关的光束,做出一定的近似和取舍是合理的。实验得到的结果是由CCD探测到的光强,不包含光波的相位信息。此外,对于激光器-扩束准直系统,可更换为模块化的激光器,进一步提高实验精度;同时,也可以将光路进行折叠以实现一定程度的小型化。

实验中完整地实现了3单元、4单元以及部分8单元和10单元的离散傅里叶变换,下一步工作将通过优化光路设计和数据处理方法,使得整个实验装置集成化和模块化,同时进一步发挥相位空间光调制器的高分辨率特性,实现更多单元的离散傅里叶变换,在高速光信息处理、高速实时图像处理以及其他高速信号处理等领域有极大的应用前景。

## 参 考 文 献

- 1 J. W. Goodman, A. R. Dias, L. M. Woody. Fully parallel, high-speed incoherent optical method for performing discrete Fourier transforms[J]. *Opt. Lett.*, 1978, **2**(1): 1~3
- 2 D. Hillerkuss, M. Winter, M. Teschke *et al.*. Simple all-optical FFT scheme enabling Tbit/s real-time signal processing[J]. *Opt. Express*, 2010, **18**(9): 9324~9340
- 3 M. E. Marhic. Discrete Fourier transforms by single-mode star networks[J]. *Opt. Lett.*, 1987, **12**(1): 63~65
- 4 A. E. Siegman. Fiber Fourier optics [J]. *Opt. Lett.*, 2001, **26**(16): 1215~1217
- 5 D. Hillerkuss, R. Schmogrow, T. Schellingers *et al.*. 26 Tbit/s line-rate super-channel transmission utilizing all-optical fast Fourier transform processing [J]. *Nature Photonics*, 2011, **74**(5): 364~371
- 6 K. Takiguchi, M. Oguma, T. Shibata *et al.*. Demultiplexer for optical orthogonal frequency-division multiplexing using an optical fast-Fourier-transform circuit [J]. *Opt. Lett.*, 2009, **34**(12): 1828~1830
- 7 R. P. Giddings, X. Q. Jin, J. M. Tang. First experimental demonstration of 6 Gb/s real-time optical OFDM transceivers incorporating channel estimation and variable power loading[J]. *Opt. Express*, 2009, **17**(22): 7985~7988
- 8 Y. K. Huang, D. Qian, R. E. Saperstein *et al.*. Dual-polarization  $2\times 2$  IFFT/FFT optical signal processing for 100-Gb/s QPSK-PDM all-optical OFDM [C]. Optical Fiber Communication Conference, 2009. 1~3
- 9 K. Takiguchi, M. Oguma, T. Shibata *et al.*. Demultiplexer for optical orthogonal frequency-division multiplexing using an optical fast-Fourier-transform circuit [J]. *Opt. Lett.*, 2009, **34**(12): 1828~1830
- 10 Song Feijun, S. Jutamulia. Advanced Optical Information Processing[M]. Beijing: Peking University Press, 2001. 78~84  
宋菲君, S. Jutamulia. 近代光学处理[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001. 78~84

栏目编辑:何卓铭