

# 基于彩虹原理的喷雾粒径分布及折射率测量

潘 琦

(南京信息工程大学信息与控制学院, 江苏 南京 210044)

**摘要** 对基于彩虹原理的喷雾粒径分布及折射率测量进行了研究,提出了一种新的参数反演算法,用于同时测量喷雾液滴群的粒径分布和折射率。新算法基于正则化的非负最小二乘方法的参数反演,根据彩虹主峰位置、峰谷比值实时调整反演中的折射率和粒径分布范围,以实现在无粒径分布范围等先验信息条件下,粒径分布和折射率的同时测量反演,并有效地解决了解的多值性问题。数值模拟结果表明,当信噪比降至 5 dB 时,粒径分布的反演结果与假定分布在多数情况下仍相吻合,同时,表明此测量方法具有较好的精度和可靠性。

**关键词** 测量;彩虹;反演;粒径分布;折射率

中图分类号 TK934

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201239.s208006

## Spray Droplets Size Distribution and Refractive Index Measurement Based on Rainbow Principle

Pan Qi

(College of Information & Control, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing, Jiangsu 210044, China)

**Abstract** The measurement of spray droplets size distribution and refractive index rainbow principle is studied. A novel inverse algorithm is presented, which can inverse droplets size distribution and refractive index simultaneously. The new algorithm, based on regularized non-negative least squares method (NNLS) and regularization method, which adjusts the refractive index and size distribution range during the inverse process according to the main rainbow peak position and ratio of ridge and peak rainbow intensity, can inverse both droplets size distribution and refractive index simultaneously without pre-knowledge of droplets diameter distribution function and range. The algorithm and also can avoid multi-solution problems. Simulation results shows that even the signal noise ratio (SNR) drops to 5 dB, the inverse results of droplets size distribution coincide with the supposed distribution in most situations. The method has a relatively good precision and reliability.

**Key words** measurement; rainbow; inverse; size distribution; refractive index

**OCIS codes** 290.3200; 290.5820; 290.5850

## 1 引 言

颗粒群彩虹测量技术作为一种光散射测量方法可实时同步测量颗粒群(一般为喷雾液滴)的粒径分布和折射率,具有快速、非接触和信息量大等优点<sup>[1~5]</sup>。然而,目前用于喷雾测量的彩虹技术还存在若干需要解决的问题。首先绝大部分针对颗粒群彩虹的反演算法需预知颗粒群粒径的分布范围、函数模型等先验信息,造成了颗粒群彩虹在实际应用时的局限性和误差<sup>[1]</sup>;其次大部分反演算法根据彩虹主峰的光强分布来进行反演,解的多值性问题无

法避免,同样影响了测量的准确性<sup>[1~5]</sup>。

针对这些问题,本文通过分析颗粒群彩虹的变化规律,提出了颗粒群彩虹参数反演算法,该算法能在较低信噪比条件下对具有均一折射率的颗粒群彩虹的折射率和粒径分布进行无先验信息的反演。

## 2 颗粒群彩虹光强的数学模型及分布特性

当平行单色激光照射颗粒群时,若忽略颗粒间的多次散射及干涉影响,则测量区内颗粒群彩虹的

收稿日期: 2012-06-10; 收到修改稿日期: 2012-07-16

基金项目: 国家自然科学基金(61172029)资助课题。

作者简介: 潘 琦(1980—),女,博士,讲师,主要从事光散射测量方面的研究。E-mail: qpan@nuist.edu.cn

总光强分布为

$$\bar{I}(\theta) = \sum_{d_{\min}}^{d_{\max}} I(d_i, m, \theta) f(d_i) \Delta d, \quad (1)$$

式中  $d_{\min}, d_{\max}$  分别为颗粒群的最小及最大粒径;  $I$  为单个颗粒的彩虹光强;  $m$  为液滴折射率;  $\theta$  为散射角度;  $f$  为颗粒群粒径的颗粒数概率分布。由于测量区内的颗粒群总数  $N$  为有限值, 若假设颗粒群中的颗粒粒径间隔为线性, 则又有

$$N = \sum N_i = \sum_{d_{\min}}^{d_{\max}} f(d_i) \Delta d, \quad (2)$$

式中  $\Delta d = (d_{\max} - d_{\min})/K$ ,  $K$  为颗粒群粒径的分类数。  $N_i$  为颗粒群中粒径为  $d_i$  的颗粒数目, 根据 Mie 理论对具有不同粒径分类数的颗粒群彩虹光强分布进行模拟, 假定颗粒群总数为 40, 粒径分布服从对数正态分布, 平均粒径为  $145 \mu\text{m}$ , 分散系数为 0.7, 结果如图 1 所示。为了较好地地区分曲线, 三种曲线分别在强度上进行了偏移处理。从图 1 可知, 不同的分类数会带来彩虹强度分布曲线上的高频微小波动, 可认为这代表着残留的彩虹 Ripple 结构。 van Beeck 等<sup>[1]</sup> 在分析颗粒群彩虹时认为不同颗粒的 Ripple 结构会在相互叠加过程中完全抵消。而本文认为, 由于 Ripple 结构对颗粒粒径的改变较为敏感, 彼此叠加后其残余部分的位置和持续长度会随着粒径分类数的改变而变化, 而并不能完全消除。在实际测量过程中, 颗粒群的粒径分类数是未知量, 若直接以设定的粒径分类数对颗粒群彩虹进行参数反演将会造成一些无法预知的误差, 从而在一定程度上构成了参数反演的不稳定性。

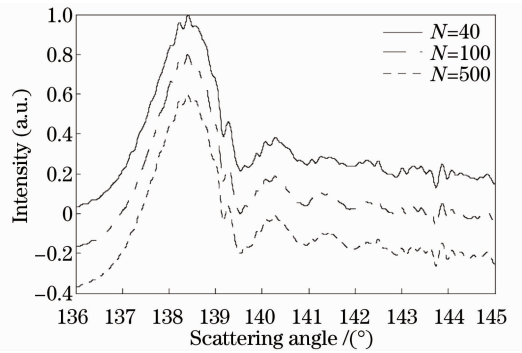


图 1 不同粒径分类数下的彩虹光强分布  
( $m=1.33, \lambda=0.5145 \mu\text{m}$ )

Fig. 1 Global rainbow patterns with different class numbers ( $m=1.33, \lambda=0.5145 \mu\text{m}$ )

颗粒群彩虹光强分布除了受颗粒群平均粒径和折射率的影响<sup>[1~3]</sup>, 还受如粒径分布函数、分散系数等诸多因素的影响。分别对具有相同平均粒径, 不同粒径分布函数以及分散系数的颗粒群彩虹光强进行了模拟, 结果如图 2 所示, RRSB 分布为 Rosin-Rammler-Sperling-Bennet 分布,  $D_{32}$  为索太尔平均粒径。由图 2 可知, 当颗粒群的平均粒径一定时, 颗粒群彩虹的主峰光强分布基本保持不变, 而粒径分布函数对彩虹光强的影响主要出现在偏离彩虹主峰的位置上; 分散系数的影响主要体现彩虹光强峰值谷值的对比度上, 分散系数越大, 彩虹光强峰值谷值间的差异越小, 彩虹曲线波动越平坦。颗粒群彩虹光强分布的这一特性, 使得目前常用的根据彩虹主峰光强来反演颗粒群参数的算法往往只能得到颗粒群的平均粒径, 而无法得到相对准确的粒径分布。因此, 可认为为了避免反演解的多值性, 就必须对除颗粒群彩虹主峰以外的光强分布进行测量反演。

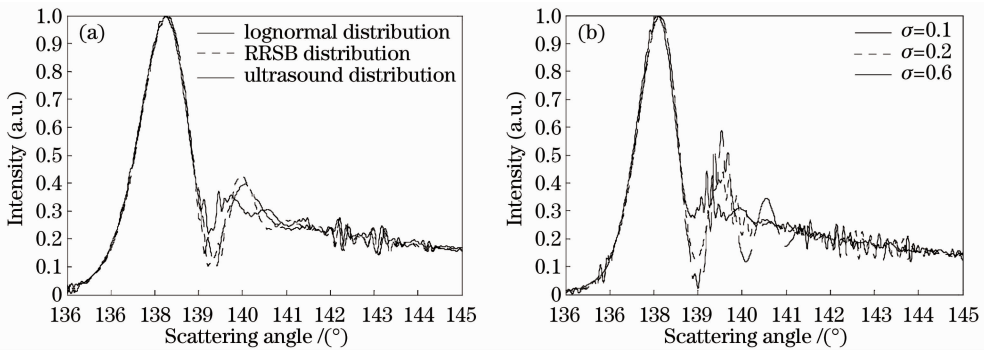


图 2 彩虹光强分布。(a)不同分布函数下, 具有相同平均粒径的颗粒群彩虹( $D_{32}=218 \mu\text{m}, m=1.33, \lambda=0.5145 \mu\text{m}$ ); (b)不同分散系数下, 具有相同平均粒径的颗粒群彩虹( $D_{32}=306 \mu\text{m}$ , 对数正态分布,  $m=1.33, \lambda=0.5145 \mu\text{m}$ )

Fig. 2 Global rainbow patterns. (a) Global rainbow patterns under different distribution functions with the same mean diameter ( $D_{32} = 218 \mu\text{m}, m = 1.33, \lambda = 0.5145 \mu\text{m}$ ); (b) global rainbow patterns under different dispersion coefficients with the same mean diameter ( $D_{32} = 306 \mu\text{m}$ , log-normal distribution,  $m = 1.33, \lambda = 0.5145 \mu\text{m}$ )

### 3 颗粒群彩虹的参数反演算法

#### 3.1 反演算法初值选取

在实际测量中,颗粒群的粒径分布范围是未知量,需要进行预测估计。为尽可能准确地得到颗粒群的粒径分布范围以及较准确的折射率初值,降低反演的误差和难度,提出了颗粒群彩虹参数的初值选取方法。以彩虹主峰峰值与主峰左侧谷值之间的中值位置来确定几何彩虹角位置,同时以相同的方法提取右中值点,以左右中值点之间的间距来求取颗粒群的平均粒径。最终通过理论近似<sup>[6,7]</sup>,可得

$$D_{\text{mean}} = 531.6\lambda(\theta_{\text{mid}2} - \theta_{\text{mid}1})^{-3/2}, \quad (3)$$

$$\theta_{\text{rg}} = \theta_{\text{mid}1} - 13.91(\lambda/D_{\text{mean}})^{2/3}. \quad (4)$$

式中  $D_{\text{mean}}$  为颗粒群平均粒径,  $\theta_{\text{rg}}$  为颗粒群几何彩虹角,有

$$\theta_{\text{rg}} = 4\arccos\left(\sqrt{\frac{4-m^2}{3m^2}}\right) - 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{m^2-1}{3}}\right). \quad (5)$$

求解(5)式可得折射率的初始值  $m_0$ 。获取颗粒群的平均粒径后,进一步对颗粒群的分散系数进行估计。如前所述,颗粒群的分散系数主要影响彩虹光强峰谷的比值。因此对彩虹主峰峰值与主峰右侧的谷值之间的比值进行计算,同时以对数正态分布为假设模型函数,等间隔选取分散系数,在各分散系数下,将平均粒径  $D_{\text{mean}}$ , 折射率初值  $m_0$  代入(1)式计算,进而求得各分散系数下的彩虹主峰峰值与谷值的比值,再通过内插值的方式获得对应实测比值的分散系数  $\sigma_0$ 。最终根据  $D_{\text{mean}}$  和  $\sigma_0$ , 获得颗粒群的粒径分布范围为

$$\begin{cases} D_s = D_{\text{mean}} - \sigma_0 D_{\text{mean}}, \\ D_e = D_{\text{mean}} + \sigma_0 D_{\text{mean}} \end{cases}, \quad (6)$$

式中  $D_s$  表示颗粒群中的最小粒径,  $D_e$  表示颗粒群中最大粒径。

#### 3.2 反演算法设计

对颗粒群粒径分布的反演在数学上可归结为对第一类 Fredholm 积分方程的求解。在经过离散化和归一处理后,最终可建立的算子形式为

$$\begin{bmatrix} I(\theta_1) \\ I(\theta_2) \\ \vdots \\ I(\theta_n) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} f(d_1) \\ f(d_2) \\ \vdots \\ f(d_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(d_1) \\ f(d_2) \\ \vdots \\ f(d_i) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

式中  $\mathbf{A}$  为算子矩阵,  $\mathbf{A}$  中的元素  $a_m$  代表粒径为  $d_i$  的颗粒在散射角度为  $\theta_n$  时的彩虹光强  $I(\theta_n)$ 。在对矩阵  $\mathbf{A}$  进行计算前,先要确定选用的角度位置和个数以及粒径的分类数。为避免多解情况,提出以求得的几何彩虹角位置为反演计算的角度起始点,以彩虹第二强度峰值位置作为反演计算的角度终点。在此角度范围内等间隔选取角度,并保证角度的个数大大超过粒径的分类数,从而提高反演的稳定性。为避免颗粒群彩虹 Ripple 结构残余分量的影响,采用  $p = 2$  光线构成的 Debye 级数来计算矩阵  $\mathbf{A}$ , 从而彻底地在计算中滤除了 Ripple 结构。同时采用基于经验模态分解的阈值去噪技术<sup>[8~10]</sup> 滤除相应的光强测量值中的噪声以及 Ripple 残余分量。求得矩阵  $\mathbf{A}$  后,即可对颗粒群的粒径分布进行反演。考虑到实际的物理意义,各粒径下的粒径分布概率均大于零,因此将正则化方法和非负最小二乘方法相结合,得出关系式

$$f = \min_f (\|\mathbf{A}f - \mathbf{I}\| + \gamma \|\mathbf{H}f\|), \quad f \geq 0, \quad (8)$$

式中  $\gamma$  为正则参数,其值由  $L$  曲线法确定,  $\mathbf{H}$  是 Tikhonov 正则矩阵。

采用(8)式对颗粒群的粒径分布进行反演后,根据反演结果重建颗粒群彩虹信号。由于颗粒群的折射率越大,颗粒群彩虹光强分布越向大角度方向偏移。因此将重建信号的彩虹主峰位置与测量信号的主峰位置进行比较,根据比较结果确定折射率的调整方向,并将重建信号的彩虹主峰峰值与谷值的比值与测量信号的相比,根据比较结果确定分散系数的调整方向,再根据(6)式进行粒径范围调整。将重新调整后的折射率和粒径范围代入矩阵  $\mathbf{A}$  的计算中,然后根据(8)式重新进行粒径分布反演,重复以上过程,直至重建信号与测量信号之间的差异达到最小。

### 4 算法结果讨论

为验证反演算法,在高噪声条件下对具有不同折射率和粒径分布的颗粒群参数反演进行数值模拟,其中颗粒群的彩虹光强均由 Mie 理论模拟,光源波长为  $0.532 \mu\text{m}$ , 噪声信噪比为 5, 结果如图 3 所示。图 3(a)和(b)中的颗粒群粒径分布为具有相同分散系数不同平均粒径的对数正态分布<sup>[11]</sup>, 两图中的粒径分布反演结果与实际的颗粒群分布曲线完全吻合,折射率的反演结果也与真实值一致,表明反演

算法在噪声条件下对具有不同平均粒径和折射率的颗粒群具有较好的反演精度。图 3(c)和(d)中的颗粒群粒径分布分别为 RRSB 分布和超声波分布<sup>[11]</sup>, 两种分布具有相同的平均粒径。两图中的粒径分布反演曲线和真实结果基本吻合, 反演的折射率也与真实值一致, 结果表明, 算法有效地避免了平均粒径相同情况下解的多值性问题, 在噪声条件下对具有不同粒径分布和折射率的颗粒群具有较好的反演精

度。图 3(e)和(f)中的颗粒群粒径分布均为对数正态分布, 具有相同的平均粒径, 分散系数分别为 0.3 和 0.5。由图 3(e)可知, 当颗粒群的分散系数为 0.3 时, 粒径分布的反演结果仍与真实分布曲线吻合得较好。然而当分散系数增加到 0.5 时[如图 3(f)所示], 反演结果与实际分布曲线之间产生了较大的偏差, 其中当粒径大于平均粒径时, 反演结果基本吻合实际分布曲线, 然而在粒径小于平均粒径时, 反演结

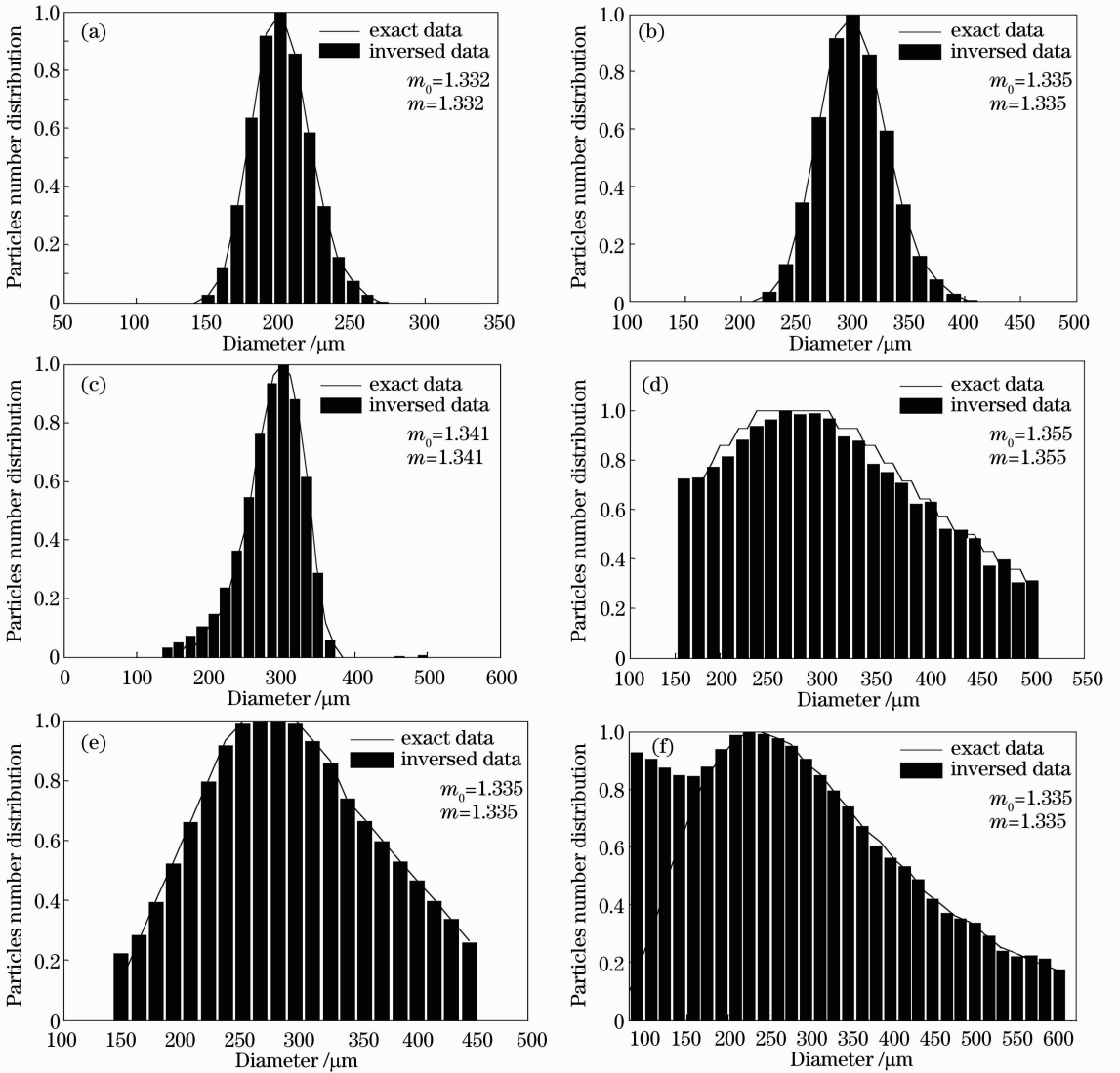


图 3 不同折射率不同粒径分布条件下参数反演结果。(a)对数正态分布,分散系数为 0.1,平均粒径为 200  $\mu\text{m}$ ; (b)对数正态分布,分散系数为 0.1,平均粒径为 300  $\mu\text{m}$ ; (c) RRSB 分布,分散系数为 9,平均粒径为 300  $\mu\text{m}$ ; (d)超声波分布,平均粒径为 300  $\mu\text{m}$ ; (e)对数正态分布,平均粒径为 300  $\mu\text{m}$ ,分散系数为 0.3; (f)对数正态分布,平均粒径为 300  $\mu\text{m}$ ,分散系数为 0.5

Fig. 3 Size inversion result under different dispersion coefficients. (a) Log-normal distribution, dispersion coefficient is 0.1, average diameter is 200  $\mu\text{m}$ ; (b) log-normal distribution, dispersion coefficient is 0.1, average diameter is 300  $\mu\text{m}$ ; (c) RRSB distribution, dispersion coefficient is 9, average diameter is 300  $\mu\text{m}$ ; (d) ultrasonic distribution, average diameter is 300  $\mu\text{m}$ ; (e) log-normal distribution, average diameter is 300  $\mu\text{m}$ , dispersion coefficient is 0.3; (f) log-normal distribution, average diameter is 300  $\mu\text{m}$ , dispersion coefficient is 0.5

果与实际值的偏差随粒径的降低而逐步增大,而折射率的反演结果均与实际值相一致。

为分析图 3(f)中粒径分布反演的误差来源,以反演到的颗粒群粒径分布和折射率来重建彩虹信号,采用  $p=2$  光线构成的 Debye 级数来进行重建信号计算,并与经去噪滤波处理后的模拟测量信号相比较,结果如图 4 所示。从图 4 可知,重建信号和测量信号在选取的反演角度范围内完全重合。表明,图 3(f)中粒径分布的反演误差并非源自噪声或光强曲线本身的波动,而是由于当颗粒群分散系数较大时,彩虹参数反演会遇到多解情况,所以粒径分布反演的误差才并未影响到折射率的反演。因此,新算法在分散系数特别大的情况下,仍无法完全避免应多值性引起的误差。

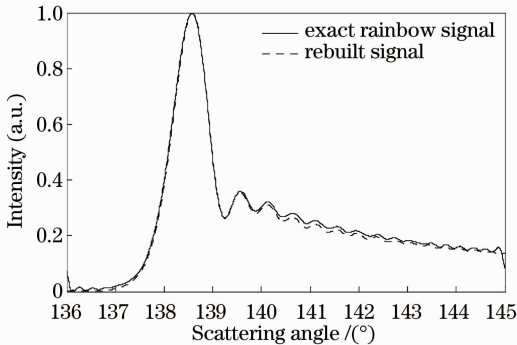


图 4 重建信号与模拟测量信号的对比

Fig. 4 Comparison between rebuilt signal and simulated signal

## 5 结 论

提出了用于颗粒群彩虹参数测量的反演算法,应用上述方法进行了颗粒群彩虹的模拟反演验证。结果表明,反演算法与常规方法相比,可在低信噪比

条件下获得较高的精度,且无需粒径分布范围等先验信息。虽然在分散系数特别大的情况下,仍会有一些的因多值性引起的误差,但在多数情况下,能有效地避免反演多值性问题引起的误差,拓宽了算法的适用范围。

## 参 考 文 献

- 1 J. P. A. J. van Beeck, D. Giannoulis, L. Zimmer *et al.*. Global rainbow thermometry for droplet temperature measurement[J]. *Opt. Lett.*, 1999, **24**(23): 1696~1698
- 2 S. Saengkaew, D. Bonin, G. Gréhan. On the measurement of particles smaller than  $20\ \mu\text{m}$  by global rainbow refractometry [C]. The 5th International Symposium on Measurement Techniques for Multiphase Flows, 2006. 430~436
- 3 M. R. Vetrano, S. Gauthier, J. P. A. J. van Beeck *et al.*. Characterization of a non-isothermal water spray by global rainbow thermometry[J]. *Experiments in Fluids*, 2006, **40**(1): 15~22
- 4 Pan Qi, Wang Shimin. Inversion algorithm of rainbow measurement[J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(3): 736~741  
潘琦,王式民. 彩虹测粒技术反演算法研究[J]. *中国激光*, 2009, **36**(3): 736~741
- 5 Pan Qi, Wang Shimin. Study on optical particle measurement based on rainbow phenomena[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(2): 388~393  
潘琦,王式民. 基于彩虹现象的光学测粒技术研究[J]. *光学学报*, 2009, **29**(2): 388~393
- 6 H. C. van de Hulst. *Light Scattering by Small Particles*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1957. 136~156
- 7 R. T. Wang, H. C. van de Hulst. Rainbows: Mie computations and the Airy approximation[J]. *Appl. Opt.*, 1991, **30**(1): 106~117
- 8 N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long *et al.*. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis[J]. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1998, **454**(1971): 899~995
- 9 Y. Kopsinis, S. McLaughlin. Development of EMD-based denoising methods inspired by wavelet thresholding[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(4): 1351~1362
- 10 D. L. Donoho. De-noising by soft-thresholding [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1995, **41**(3): 613~627
- 11 A. B. Yu, N. Standish. A study of particle size distributions [J]. *Powder Technol.*, 1990, **62**(2): 101~118

栏目编辑:何卓铭