

高阶贝塞尔高斯光束在非柯尔莫哥诺夫大气中的传输特性

陈斐楠 陈晶晶 赵琦* 陈延如 王勇清 辛煜

(南京理工大学电光学院, 江苏 南京 210094)

摘要 利用广义惠更斯菲涅耳原理计算高阶贝塞尔高斯光束(BGB)在非柯尔莫哥诺夫湍流模型下传输的横向光强分布特性。该模型中,湍流对相位干扰的大小与距离和幂律有关。在远距离处,幂律对干扰大小的影响较为明显。通过 Matlab 进行数值计算的结果表明,远距离处(10 km)的各阶 BGB 光束光强分布形式均有很大展宽,同时它们随幂律的变化也相对于短距离时更为剧烈。高阶 BGB 光束受到湍流干扰的影响要小于低阶光束。对于同阶光束来说,横向参数越大的光源在湍流中传输的展宽现象也越为明显。

关键词 大气光学;高阶贝塞尔高斯光束;广义惠更斯菲涅耳原理;非柯尔莫哥诺夫大气湍流模型;数值积分
中图分类号 O436 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/CJL201239.0913001

Properties of High Order Bessel Gaussian Beam Propagation in Non-Kolmogorov Atmosphere Turbulence

Chen Feinan Chen Jingjing Zhao Qi Chen Yanru Wang Yongqing Xin Yu

(School of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China)

Abstract Extended Huygens-Fresnel principle is used to analyze the optical intensity transverse distribution of higher-order Bessel Gaussian beam (BGB) propagation through non-Kolmogorov (NoK) atmosphere turbulence model. In NoK turbulence model, the distance and power law effect the strength of phase perturbed by turbulence. So the result by numerical integral shows that the intensity distribution of BGB beam gets more severe changes at large distance. The higher order beam is less effected by turbulence than lower order beam. The lager transverse parameter of the source can get more spreads when it propagates through turbulence.

Key words atmospheric optics; high order Bessel Gaussian beam; extended Huygens-Fresnel principle; non-Kolmogorov model; numerical integral

OCIS codes 010.1290; 010.1300; 030.7060; 260.2710

1 引 言

贝塞尔光束自 Durnin^[1]在 1987 年提出以来,由于其无衍射特性一直受到人们的关注,理想贝塞尔光束在物理上不可实现,因此实际应用中通常取它的近似形式,而贝塞尔高斯光束(BGB)正是其中典型的一种。Greene^[2]从理论上研究了 BGB 的衍射特性,Hakkaraine 等^[3]利用二极管抽运激光器从实验上调制产生了 BGB 光束和脉冲。Arlt 等^[4]通

过在拉盖尔-高斯光束之后加入三角形棱镜来调制实现了高阶 BGB。

近年来,贝塞尔光束在大气中的传输研究也得到了很大的进展,由于求解贝塞尔函数积分解析表达的困难,数值积分成为一个有力的工具在计算最后的光强分布时被普遍采用。Eyyuboglu 等^[5,6]研究了高阶 BGB 和修正 BGB 在湍流中的传输变化形式。部分相干 BGB 以及有部分相干涡旋光束在大

收稿日期:2012-03-22;收到修改稿日期:2012-05-22

基金项目:国家自然科学基金(61077012)资助课题。

作者简介:陈斐楠(1986—),男,博士研究生,主要从事大气光学和气动光学等方面的研究。E-mail: feinanchen@yahoo.cn

导师简介:陈延如(1955—),男,教授,博士生导师,主要从事光学工程方面的研究。E-mail: yrchen2002@yahoo.com

*通信联系人。E-mail: zhaoqi@njust.edu.cn

气中的传输性质也利用数学软件得到了详细的分析^[7,8]。马秀波等^[9,10]研究了 BGB 和超 BGB 在湍流介质中轴上光强的变化。这些文献所分析的光束传输介质都是均匀性湍流,利用了柯莫哥诺夫模型。而本文主要是利用 Matlab 的数值积分工具箱,分析了高阶 BGB 在非柯尔莫哥诺夫中的横向光强分布情况,并且分析了其不同强度的湍流下光强的变化情况,拓展了高阶 BGB 的研究领域。

柯莫哥洛夫湍流模型在早期的应用中,显示出与实验结果较好的吻合特性,但近几年的实验中发现,在对流层的顶端和平流层,以及一些非均匀的路径上,柯莫哥洛夫模型的预测会与实际测量值产生较大偏差,因此建立了非柯莫哥洛夫湍流模型^[11]。文献^[12,13]描述了此模型下球面波和平面波振幅、相位的变化以及光斑的弥散、闪烁现象。文献^[14]计算了非均匀湍流路径中相位屏折射率结构常数的选择。文献^[15,16]计算了此模型下光束的飘移和其对望远镜分辨能力的影响。这些工作使得非柯尔莫哥诺夫模型得到了日益广泛的应用。

2 BGB 在非均匀大气湍流中的传输

经过准直的 n 阶 BGB 在光源处的横向光强分

布可以表示为

$$E(r, \theta, 0) = J_n(\beta r) \exp(-in\theta) \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right), \quad (1)$$

式中 J_n 为 n 阶贝塞尔函数, β 为波矢的横向分量, n 为阶数, 将(1)式乘以其共轭, 可得到光源处的横向光强分布形式, 为方便计算, 在此仅取一维分布, 如图 1 所示。

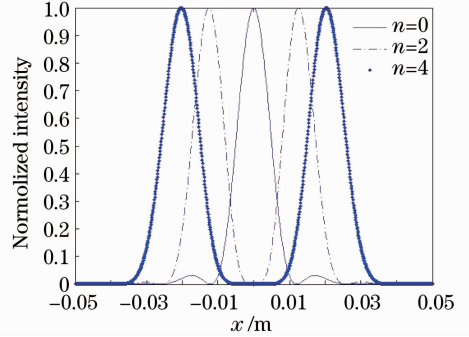


图 1 不同阶数的 BGB 在光源面上的光强分布形式
Fig. 1 Intensity distribution of different order BGB beams at the source plane

根据广义惠更斯菲涅耳原理, 假设光束在湍流介质中传输距离为 z , 则在接收面上的平均光强可以表示为

$$I(\rho, \varphi, z) = \frac{k^2}{(2\pi z)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} r_1 r_2 dr_1 dr_2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} E(r_1, \theta_1) E^*(r_2, \theta_2) \exp\left[\frac{-ik}{2z}(r_1^2 - r_2^2)\right] \times \exp\left\{-\frac{ik}{2z}\rho[r_1 \cos(\theta_1 - \varphi) - r_2 \cos(\theta_2 - \varphi)]\right\} \langle \exp[\psi(r_1, \theta_1, \rho, \varphi) + \psi^*(r_2, \theta_2, \rho, \varphi)] \rangle d\theta_1 d\theta_2, \quad (2)$$

式中 $(\theta_1, r_1), (\theta_2, r_2)$ 表示光源上两点坐标, (ρ, φ) 表示接受面上的某一点的坐标。 $\langle \exp[\psi(r_1, \theta_1, \rho, \varphi) + \psi^*(r_2, \theta_2, \rho, \varphi)] \rangle$ 表示因湍流对相位的干扰项, 可表示为^[1]

$$\langle \exp[\psi(r_1, \theta_1, \rho, \varphi) + \psi^*(r_2, \theta_2, \rho, \varphi)] \rangle = \exp\left\{-\frac{\pi^2 k^2 z}{3} \int_0^{\infty} \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]\right\}, \quad (3)$$

式中 $\Phi_n(\kappa)$ 为湍流介质折射率起伏的一维能量谱函数。通过文献^[10,11]中介绍的湍流模型, 对于柯尔莫哥诺夫模型, $\Phi_n(\kappa)$ 可表示为

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3}, \quad (4)$$

式中 C_n^2 是折射率结构常数, 由于该模型在近年应用中与实际测量的数据有较大的偏差, 所以非柯尔莫哥诺夫模型的能量谱函数为

$$\Phi_n(\kappa, \alpha) = A(\alpha) \widetilde{C}_n^2 \frac{1}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{\alpha/2}} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right), \quad 0 < \kappa < \infty, 3 < \alpha < 4 \quad (5)$$

式中 α 为幂率, κ 为空间频率, 单位为 rad/m, \widetilde{C}_n^2 为广

义折射率结构函数, 单位是 $m^{-3} \cdot \kappa_0 = \frac{2\pi}{L_0}$, L_0 为外尺度; $\kappa_m = \frac{c(\alpha)}{l_0}$, l_0 为内尺度。 $A(\alpha)$ 和 $c(\alpha)$ 的定义分别为

$$A(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \Gamma(\alpha - 1) \cos \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (6)$$

$$c(\alpha) = \left[\Gamma\left(\frac{5-\alpha}{2}\right) A(\alpha) \frac{2\pi}{3} \right]^{1/(\alpha-5)}, \quad (7)$$

式中的 Γ 表示伽马函数, 具体形式为 $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{x-1} dt$ 。对于(5)式的能量谱函数, 当 $L_0 \rightarrow$

$\infty, l_0 \rightarrow 0$ 且 $\alpha = 11/3$ 时, 可以得到 $A(11/3) = 0.033, \widetilde{C}_n^2 \rightarrow C_n^2$, 此时(5)式变化为与(4)式相同的表现形式。所以非柯尔莫哥诺夫模型是包含了柯尔莫哥诺夫模型的。不同的幂律和内外尺度, 反映不同情况的湍流干扰。根据文献[11]的推导, 假设 $T(\alpha, z) = -\frac{\pi^2 k^2 z}{3} \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa$, 通过(5)~(7)式可以得到

$$T(\alpha, z) = \frac{\pi^2 k^2 z}{6(\alpha - 2)} A(\alpha) \widetilde{C}_n^2 \times \left\{ -2\kappa_0^{4-\alpha} + \exp\left(\frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right) \kappa_m^{2-\alpha} [(\alpha - 2)\kappa_m^2 + 2\kappa_0^2] \times \Gamma\left(2 - \frac{\alpha}{2}, \frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right) \right\}, \quad (8)$$

式中 $\Gamma(a, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x \exp(-t)t^{a-1} dt$ 为非完全伽马函数。取 $\widetilde{C}_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-3}, L_0 = 1 \text{ m}, l_0 = 1 \text{ mm}$, 得到 T 与 α 和 z 的关系, 如图 2 所示。

综合(1)~(5)式并利用下面的数学变换, 推导过程类似于文献[5, 6]中在柯尔莫哥诺夫湍流中传输表达式的推导:

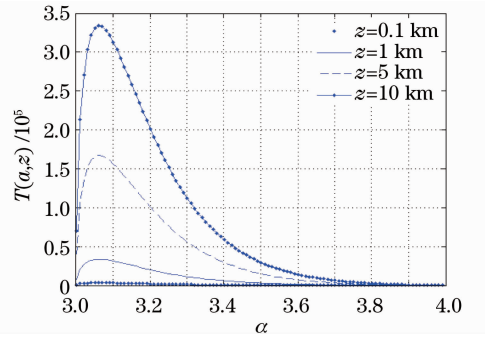


图 2 湍流干扰项随幂律 α 及距离 z 的变化
Fig. 2 Turbulence perturbed items change with power law and distance

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \exp(p \cos \varphi + q \sin \varphi) \exp(-in\theta) d\theta = \\ & 2\pi \frac{(p - iq)^n}{(p^2 + q^2)^{n/2}} I_n(\sqrt{p^2 + q^2}), \\ & \int_0^\infty \exp(-ax^2) J_n(px) I_n(qx) x dx = \\ & \frac{1}{2a} \exp\left(\frac{q^2 - p^2}{4a}\right) J_n\left(\frac{pq}{2a}\right). \end{aligned} \right. \quad (9)$$

(3)式可以简化为二重积分形式:

$$I(\rho, \varphi, z) = K(r, z) \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} r_2 J_n(\beta r_2) \exp(in\theta_2) H(\rho, \varphi) M(\rho, \varphi) dr_2 d\theta_2, \\ H(\rho, \varphi) = \frac{[-ib\rho \exp(-i\varphi) + r_2 T(\alpha, z) \exp(-ir_2)]^n}{[D(\rho, \varphi)]^{n/2}}, \\ M(\rho, \varphi) = J_n \left\{ \frac{D(\rho, \varphi)^{1/2} \beta}{B} \right\} \times \exp \left\{ -\frac{kr_2^2}{\omega_0^2} - \frac{[ibk + \frac{kT(\alpha, z)}{\omega_0^2} - 2br_2 \rho \left(\frac{ik}{\omega_0^2} + b \right) \cos(\varphi - \theta_2)]}{B} \right\}, \quad (10) \\ D(\rho, \varphi) = -b\rho^2 + T^2(\alpha, z)r_2^2 - 2ib\rho r_2 \cos(\varphi - \theta_2) T(\alpha, z), \\ K(r, z) = \frac{b^2}{\pi B} \exp\left(-\frac{\beta^2 + 4b^2 \rho^2}{4B}\right).$$

式中 $b = k/2z, B = \frac{k}{\omega_0^2} - in + T(\alpha, z), \omega_0$ 为光束的束腰半径。

3 数值模拟及分析

(7)式中由于交叉项的存在所以推算出解析表达式极为困难, 但近年来数学软件的发展以及各种数值积分算法的出现为此提供了极大的方便, 使得(7)式可以通过 Matlab 进行数值求解, 取一维分布, 且 $\varphi = 0$, 根据上面湍流模型的分析, 可以看出, 当

$3 < \alpha < 3.08$ 时, T 值逐渐增大。当 $\alpha \rightarrow 4$ 时, $T \rightarrow 0$ 。在较近距离(1 km, 如图 3 和图 4 所示)和较远的距离上(10 km, 如图 5 和图 6 所示), 对于不同的横向分量 β 的 0, 2, 4 阶 BGB 光源的传输表达式通过数值积分, 求解出其在接收面上的一维归一化光强分布形式。在如图 3 所示每一组仿真图中, 分别取不同大小的幂律所对应的不同强弱的湍流干扰下的 4 种光强分布情况: (a) $\alpha = 3.01$; (b) $\alpha = 3.08$; (c) $\alpha = 3.30$; (d) $\alpha = 3.50$ 。其他光源的参数为: 波长 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$, 光束的束腰半径 $\omega_0 = 0.02 \text{ m}$ 。

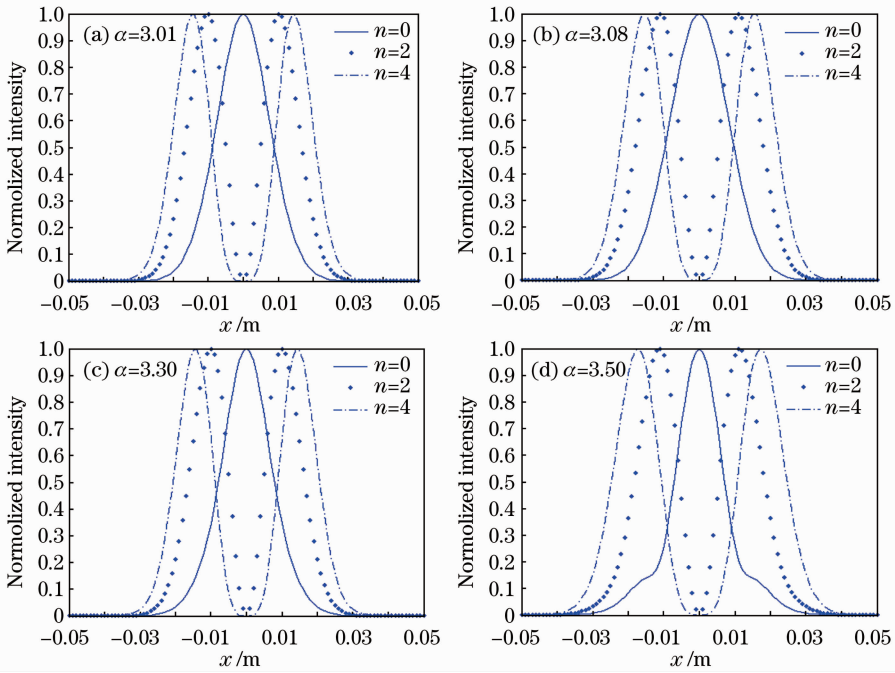


图 3 横向参数 $\beta=300 \text{ m}^{-1}$ 的 BGB 光束在 $z=1 \text{ km}$ 处光强分布特性

Fig. 3 Transverse intensity distribution of $\beta=300 \text{ m}^{-1}$ for BGB beam at $z=1 \text{ km}$

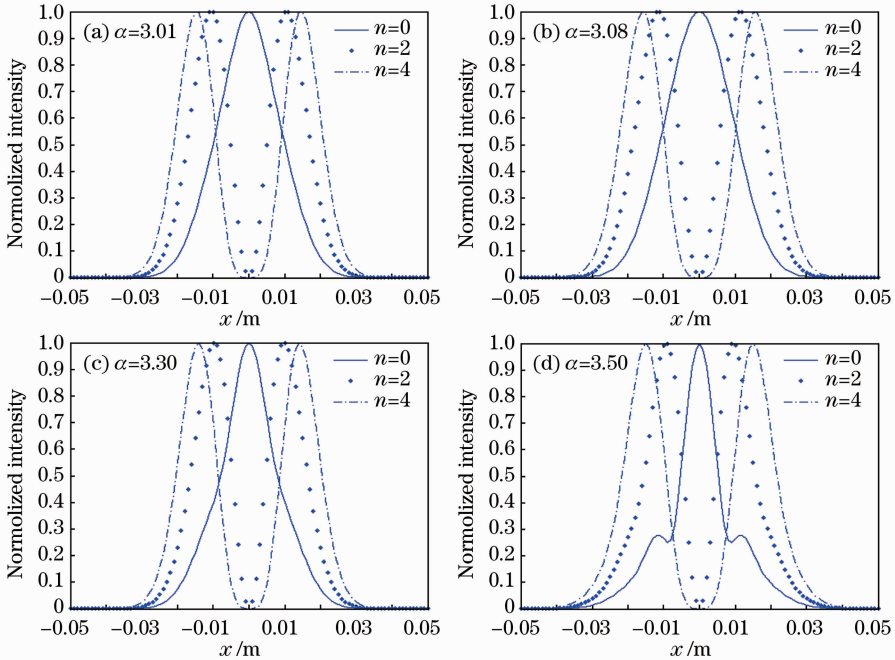


图 4 横向参数 $\beta=200 \text{ m}^{-1}$ 的 BGB 光束在 $z=1 \text{ km}$ 处的光强分布特性

Fig. 4 Transverse intensity distribution of $\beta=200 \text{ m}^{-1}$ for BGB beam at $z=1 \text{ km}$

针对以上仿真结果可以得到,对于相同参数的光源,在 1 km 时(图 3 和图 4),接收面上的光斑半径在 0.05 m 之内,而在 10 km 时(图 5 和图 6),光斑半径已经大于 0.1 m。且这两个距离上,光强分布的差别非常明显,因此将在 1 km 和 10 km 两种情况下,分别比较横向分量和湍流干扰项的幂律项

α 对光强分布的影响。

当 $z=1 \text{ km}$ 时,比较图 3(d)和图 4(d)发现,在 $\alpha=3.5$ 的情况下,0 阶 BGB 光束的分布受到横向参量 β 的影响较为明显,主要表现为旁瓣的消弱程度上,大 β 值的光束会受到更大的消弱。在 1 km 的距离及更大的湍流干扰情况下($\alpha \leq 3.3$),0 阶 BGB 光

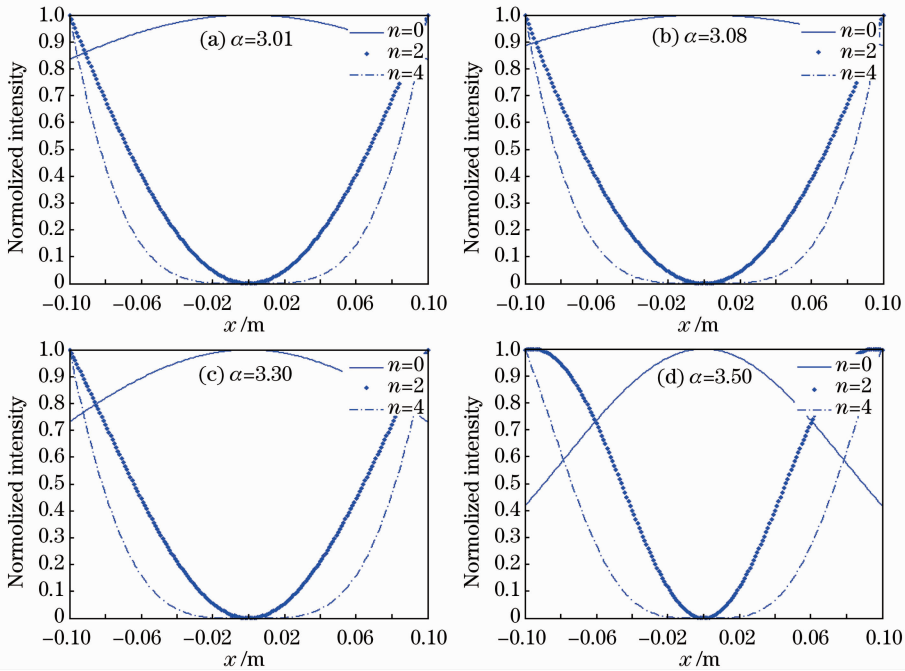


图 5 横向参数 $\beta=300 \text{ m}^{-1}$ 的 BGB 光束在 $z=10 \text{ km}$ 处的光强分布特性

Fig. 5 Transverse intensity distribution of $\beta=300 \text{ m}^{-1}$ for BGB beam at $z=10 \text{ km}$

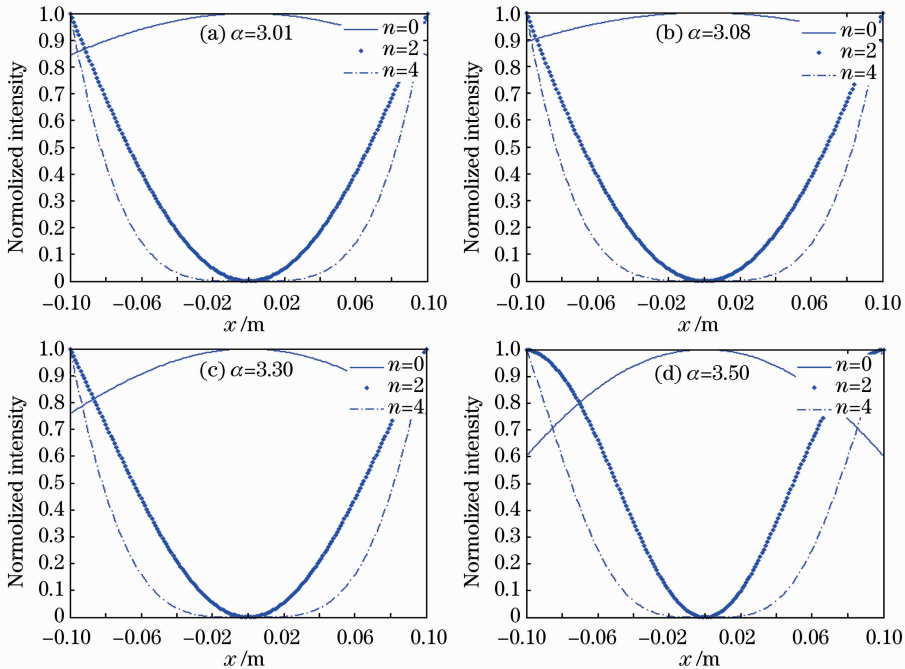


图 6 横向参数 $\beta=200 \text{ m}^{-1}$ 的 BGB 在距离 $z=10 \text{ km}$ 处的光强分布特性

Fig. 6 Transverse intensity distribution of $\beta=200 \text{ m}^{-1}$ for BGB beam at $z=10 \text{ km}$

束只留下中央最大值区域,比较图 3 和图 4 的(a)~(c)三种情况发现,较大的 β 值中央区域的光强分布更为发散。而 2 阶和 4 阶 BGB 光束在 1 km 的距离上分布均无明显变化。

当 $z=10 \text{ km}$ 时,图 5 和图 6 的各种情况都显示光束发散现象,主要表现为 0 阶光束中央区域的扩

展和消弱,在 $\alpha \leq 3.10$ 的情况下,0 阶光束的中央极大值已经很不明显,而 2 阶和 4 阶光束的中央暗斑区域面积也有了很大扩展。在这种情况下 β 值对光强分布的影响已经很小。在湍流干扰较弱的情况下 [图 5(d)和图 6(d)],0 阶 BGB 光束中央区域虽然有了很大扩展,但极大值仍然很明显,在这种情况

下,横向参量的影响较为明显,0阶光束小 β 值的光束发散程度小于大 β 值的光束。在10 km距离上,各阶光束的分布受到湍流的影响要大于横向参量的影响。2阶和4阶光束的在湍流影响越大的情况下扩展也更大。

4 结 论

在非柯尔莫哥诺夫湍流下,距离决定了各阶BGB光束的发散程度,也是光强分布变化的主要影响因素。非柯尔莫哥诺夫湍流的指数项 α 对光束的影响在较远的距离之外才有明显体现。而对于光源的参数,横向分量 β 在湍流干扰比较小时,才可以看出其对光强分布的影响。对于2阶和4阶BGB光束来说,它们对干扰的大小所呈现出的变化要小于0阶BGB,在较强的湍流和较远的距离上,0阶光束的极大值已经不明显,而2阶和4阶光束的在中央暗斑区域之外仍然有较为明显的峰值区域。因此,高阶BGB在非柯湍流模型中有着更好的传输性质。

参 考 文 献

- 1 J. Durnin, J. J. Miceli, Jr. J. H. Eberly. Diffraction-free beam [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(13): 1499~1501
- 2 P. L. Greene. Properties and diffraction of vector Bessel-Gauss beams[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1998, **15**(12): 3020~3027
- 3 T. Hakkaraine, A. Hakola, J. Jalava *et al.*. Generation of Bessel-Gauss beams and pulses with diode-pumped Nd:GdVO₄ laser[R]. Optics and Molecular Material. Helsinki University of Technology, 2007
- 4 J. Arlt, K. Dholakia. Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon[J]. *Opt. Commun.*, 2000, **177**(1-6): 297~301
- 5 H. T. Eyyuboglu. Propagation of higher order Bessel-Gaussian beams in turbulence [J]. *Appl. Phys. B*, 2007, **88**(2): 259~265
- 6 H. T. Eyyuboglu, F. Hardlac. Propagation of modified Bessel-Gaussian beams in turbulence[J]. *Optics & Laser Technology*,

- 2008, **40**(2): 343~351
- 7 Baosuan Chen, Ziyang Chen, Jixiong Pu. Propagation of partially coherent Bessel-Gaussian beams in turbulent atmosphere [J]. *Optics & Laser Technology*, 2008, **40**(6): 820~827
- 8 Fu Wenyu, Li Gaoqing, Liu Xiaojun. Propagation of partially coherent vortex beams[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(11): 2958~2962
- 付文羽, 李高清, 刘小军. 部分相干涡旋光束在大气湍流中的远场传输特性[J]. *光学学报*, 2009, **29**(11): 2958~2962
- 9 Ma Xiubo, Li Enbang. Propagation of SGB beam in turbulent atmosphere [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2009, **17**(12): 2919~2923
- 马秀波, 李恩邦. 超高斯贝塞尔光束在湍流大气中的传输[J]. *光学精密工程*, 2009, **17**: 2919~2923
- 10 Ma Xiubo, Li Enbang. Influence of atmospheric turbulence on the axial intensity of Bessel-Gauss beams. [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2009, **36**(6): 42~45
- 马秀波, 李恩邦. 大气湍流对贝塞尔高斯光束轴上光强的影响[J]. *光电工程*, 2009, **36**(6): 42~45
- 11 Xuemei He, Dalu Bai. Propagation of partially coherent flat-topped vortex beams through non-kolmogorov atmospheric turbulence[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2011, **28**(9): 1941~1948
- 12 I. Toselli, B. Agrawal, S. Restaino. Light propagation through anisotropic turbulence[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2011, **28**(3): 483~488
- 13 B. E. Stribling, B. M. Welsh, M. C. Roggemann. Optical propagation in non-kolmogorov atmospheric turbulence [C]. *SPIE*, 1995, **2471**: 181~196
- 14 Qian Xianmei, Zhu Wenyue, Rao Ruizhong. Selection of C_0^2 for simulating laser propagation along an inhomogeneous turbulence path[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(10): 1856~1860
- 钱仙妹, 朱文越, 饶瑞中. 非均匀湍流路径光传播数值模拟中相位屏间 C_0^2 的选取[J]. *光学学报*, 2008, **28**(10): 1856~1860
- 15 Du Wenhe, Tan Liying, Ma Jing. Theory study on beam wander for laser beam propagation through non-Kolmogorov turbulence [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(s2): 1856~1860
- 都文和, 谭立英, 马晶. 非柯尔莫哥诺夫湍流光束漂移理论的研究[J]. *光学学报*, 2008, **28**(s2): 1856~1860
- 16 Peng Qi, Chen Hongbin, Wang Jihong *et al.*. Analysis of solving power of telescopes for non-Kolmogorov turbulence[J]. *Chinese J. Lasers*, 2012, **39**(1): 01130021
- 彭起, 陈洪斌, 王继洪等. 非柯尔莫哥诺夫湍流下望远镜的分辨力分析[J]. *中国激光*, 2012, **39**(1): 0113002