

# 基于角谱插值的数字全息在任意斜面的重建方法

潘卫清 朱勇建

(浙江科技学院理学院, 浙江 杭州 310023)

**摘要** 为了在任意非平行斜面上重建数字全息像,提出了一种基于角谱旋转变换和插值的数字处理方法,用角谱衍射理论进行了分析,给出了正反旋转两种数字插值方法,基于旋转变换信息量不变的原则分析了倾斜面上的抽样间隔取值范围,其大小取决于斜面带宽和全息图空间带宽积大小。实现了在  $71^\circ$  倾斜物面上的全息重建,消除了倾斜造成的局部离焦现象,同时验证了算法在斜面上抽样间隔取值范围。

**关键词** 全息;任意斜面;角谱插值;旋转变换

**中图分类号** O436 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/CJL201239.0809002

## Reconstructing Method of Digital Holograms on Arbitrarily Tilted Planes Based on Angular Spectrum Interpolation

Pan Weiqing Zhu Yongjian

(Department of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou, Zhejiang 310023, China)

**Abstract** To reconstruct a image on arbitrary tilted plane from a digital hologram, a reconstruction method based on angular spectrum transform and interpolation processing method is proposed. The angular spectrum diffraction theory is applied to analyze the proposed method. Two interpolation algorithms of forward and inverse spectrum rotations are presented. The sampling interval is analyzed based on the condition of information conservation of rotation transform. It's shown that the interval values depend on the bandwidth of the spectrum on tilted plane and the spatial-band width product of the hologram. The holographic reconstruction is realized on a  $71^\circ$  single axis rotation. The partially defocus blurred aberration resulted from the tilted object plane is removed by this method. Meanwhile the range of sampling interval on tilted plane is presented.

**Key words** holography; arbitrary tilted plane; angular spectrum interpolation; rotation transform

**OCIS codes** 090.1995; 090.2870; 070.7345

## 1 引 言

数字全息技术利用电荷耦合器件(CCD)等电子探测器代替全息干板记录全息图,然后通过计算机处理恢复记录面上的物波光场,通过数字衍射可方便地得到任意平面上的衍射场的振幅和相位分布。相比传统全息术而言,数字全息技术有许多显著的技术优势,比如记录方便、再现灵活、可量化测量和可获取相位信息<sup>[1]</sup>等。目前,数字全息技术已得到了广泛关注,并在多个领域得到应用和研究,如粒子场测量<sup>[2,3]</sup>、微电子机械和微光学分析<sup>[4,5]</sup>、微生物

相衬显微成像<sup>[6,7]</sup>、三维识别<sup>[8]</sup>以及信息加密等<sup>[9]</sup>。

数字全息中的再现像是由计算机通过数字重建而得到,常用的数字衍射算法有菲涅耳算法(FR)和角谱衍射算法(AS)<sup>[10]</sup>两种,这两种算法都是基于快速傅里叶变换(FFT)实现的,其中FR只需一次傅里叶变换,也叫单傅里叶变换算法(SFT),而AS则需要作两次傅里叶变换。然而这两种算法都是基于两平行平面来构造的,即光波输入的物面和衍射观察面必须是平行的。这给许多实际应用带来不便,比如不利于楔形物体的全息检测和对物体进行

**收稿日期:** 2012-03-02; **收到修改稿日期:** 2012-04-16

**基金项目:** 国家自然科学基金(51005212)和浙江省科技计划项目(2010C31095,2011C21003)和浙江科技学院交叉学科预研重点项目(F703108)资助课题。

**作者简介:** 潘卫清(1976—),男,博士,副教授,主要从事信息光学和光电测试等方面的研究。

E-mail: pan\_weiqing@163.com

多视角检测。对此文献[11,12]报道了光波经倾斜孔径或狭缝的夫琅禾费衍射理论和菲涅耳衍射理论。后来 Yu 等<sup>[13]</sup>在两非平行坐标系下引入一个传播方向角对菲涅耳衍射公式进行了重新推导,提出了一种可用于数字全息在任意视角下进行重建的方法。Matsushima 等<sup>[14]</sup>提出一种通过频谱旋转变换实现两非平行平面之间光场传播的方法,然而他未讨论完整的数字实现过程和理论。Nicola 等<sup>[15]</sup>将该方法用于消除简单的倾斜物面给数字全息重建带来的畸变。

本文针对数字全息在任意斜面进行重建和多视角检测,提出一种通过角谱插值采样的简单数字处理方法。并通过实验对该方法进行了严格验证。

## 2 角谱插值原理及数字处理方法

### 2.1 角谱插值原理

在任意斜面上数字全息的重建过程如图 1 所示。其中  $(\xi-\eta)$  是全息面坐标,  $(x-y)$  是一般重建平面坐标,称之为原平面,该坐标与全息面坐标是平行的,两平面间的距离为重建距离  $d$ ,通过角谱重建算法或菲涅耳重建算法可得到该重建平面上的全息像场分布  $f(x,y)$ 。 $(\hat{x}-\hat{y})$  坐标是一个相对  $(x-y)$  坐标绕  $x$  轴和  $y$  轴做坐标旋转后的一个任意斜面,称之为参考平面,为了在该斜面上重建全息像  $\hat{f}(\hat{x},\hat{y})$ ,需要找到光场在  $(\hat{x}-\hat{y})$  坐标和  $(x-y)$  坐标之间的变换关系。

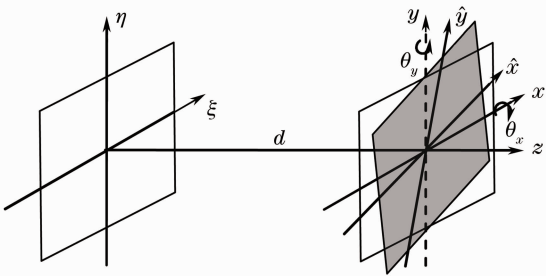


图 1 数字全息在任意斜面重建坐标示意图

Fig.1 Schematic illustration for digital holographic reconstruction on arbitrarily tilted plane

根据角谱衍射理论,任意相干光场  $f(x,y)$  都可分解为沿各个方向传播的平面波,而这些平面波的复振幅为该光场的角谱,可由相干光场的傅里叶变换得到:

$$F(u,v) = \mathcal{F}\{f(x,y)\} = \iint f(x,y) \times \exp[-2\pi(ux + vy)] dx dy, \quad (1)$$

式中  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  表示傅里叶变换,  $F(u,v)$  是光场的角谱,

与角谱对应的平面波波矢为

$$\mathbf{k} = 2\pi[u \ v \ \omega(u,v)], \quad (2)$$

式中  $\omega(u,v) = (\lambda^{-2} - u^2 - v^2)^{1/2}$ ,同理,假设同一光场在参考面上的场分布为  $\hat{f}(\hat{x},\hat{y})$ ,则其相应角谱为  $\hat{F}(\hat{a},\hat{v}) = \mathcal{F}\{\hat{f}(\hat{x},\hat{y})\}$ ,空间波矢为  $\hat{\mathbf{k}} = 2\pi[\hat{a} \ \hat{v} \ \hat{\omega}(\hat{a},\hat{v})]$ ,其中  $\hat{\omega}(\hat{a},\hat{v}) = (\lambda^{-2} - \hat{a}^2 - \hat{v}^2)^{1/2}$ 。由于原平面和参考平面表示同一光场,因此同一角谱平面波分量在两不同平面坐标系下可进行相互变换表示:

$$\begin{cases} \mathbf{k} = \mathbf{T}^{-1} \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{T} \mathbf{k} \end{cases}, \quad (3)$$

式中  $\mathbf{T}$  为坐标旋转变换矩阵<sup>[16]</sup>,假设参考面相对原平面绕  $y$  轴旋转了  $\theta_y$  角,则旋转变换矩阵为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix}, \quad (4)$$

所以参考平面上的光场角谱可由原平面光场角谱经坐标变换得到,即

$$\hat{F}(\hat{a},\hat{v}) = F(\cos \theta_y \hat{a} + \sin \theta_y \hat{v}, \hat{v}). \quad (5)$$

对(5)式作逆傅里叶变换,即可得到与之对应的斜面光场分布。然而由于两坐标系之间的坐标旋转变换是非线性的,如图 2 所示,所以在数字处理中会在其中一个平面上出现非等间隔抽样数据,而 FFT 只适用于等间隔抽样情况,因此为了得到任意斜面上的光场分布,需要对角谱数据进行插值抽样处理。

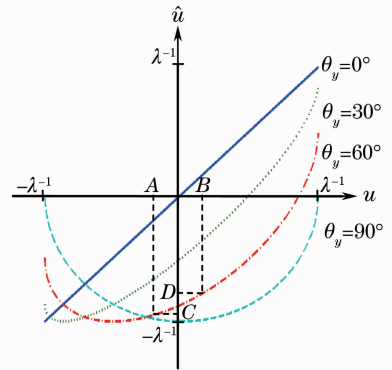


图 2 原平面频谱变换到参考面的坐标变换曲线

Fig.2 Curves for transforming Fourier frequency in source coordinates into reference coordinates

### 2.2 角谱插值数字处理方法

为了得到任意斜面上等间隔采样的角谱数据,可采用两种数字处理方法。第一种方法是任意斜面作为参考面,由原平面旋转到参考面,具体步骤为:1) 确定参考面上角谱的采样间隔和采样数目,对频率坐标进行离散化采样,得到一个以零频为中

心的二维离散空间频率坐标矩阵  $[\hat{u}_m, \hat{u}_n]$  和对应原平面频率坐标的参考频率坐标矩阵  $[\hat{u}'_m, \hat{u}'_n]$ , 其中  $\hat{u}'_m = \hat{u}_m - \sin \theta_y \omega(0, 0)$ ,  $\hat{v}'_n = \hat{v}_n$ ; 2) 由坐标变换公式  $u = \cos \theta_y \hat{u}'_m + \sin \theta_y \hat{v}'_n$ ,  $v = \hat{v}'_n$  计算参考频率坐标对应的原平面频率坐标矩阵, 并对原平面的离散角谱进行插值采样, 从而得到参考面上的等间隔采样角谱; 3) 对参考面离散角谱进行逆傅里叶变换, 最终得到所在斜面上的全息光场分布。

在该处理方法中, 确定参考面上角谱的采样间隔和数目是关键。根据图 2, 当频谱坐标由原平面变换到参考面时, 其频谱宽度将随之变窄, 即由  $l_{AB}$  变为  $l_{CD}$ 。而坐标变换不会改变图像的信息量, 即频谱的信息自由度或空间带宽积应该维持不变, 所以为了充分采样参考面频谱的采样点数目不应少于原平面的采样点数。假设原平面光场的宽度为  $L_x, L_y$ , 频谱宽度为  $B_x, B_y$ , 由坐标变换确定的参考面频谱宽度为  $\hat{B}_x, \hat{B}_y$ , 则根据奈奎斯特采样定理参考面上的采样间隔应满足

$$\begin{aligned} \hat{B}_x/M \leq \Delta \hat{u} \leq \hat{B}_x/(L_x B_x), \hat{B}_y/N \leq \\ \Delta \hat{v} \leq \hat{B}_y/(L_y B_y), \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $M, N$  是抽样点数。由于变换后频谱带宽被压缩, 所以参考面上的再现光场将被相应放大。

第二种方法是对第一种方法的反向旋转, 即由参考面旋转到原平面, 具体步骤为: 1) 确定原面上角谱的采样间隔和采样数目, 对频率坐标进行离散化采样, 得到一个以零频为中心的二维离散空间频率坐标矩阵  $[u_m, u_n]$ ; 2) 由坐标变换关系式  $\hat{u} = \cos \theta_y u_m - \sin \theta_y [\omega(u_m, v_n) - \omega(0, 0)]$ ,  $\hat{v} = v_n + \cos \theta_y [\omega(u_m, v) - \omega(0, 0)]$ , 计算原平面频率坐标对应的参考平面频率坐标矩阵, 并对参考平面的离散角谱进行插值采样, 从而得到原面上的等间隔采样角谱; 3) 对原平面离散角谱进行逆傅里叶变换, 最终得到所在原平面上的全息光场分布。

与第一种方法类似, 根据信息量不变原理, 原平面上的采样点数应该与参考面相同, 而且采样间隔也应该满足(6)式, 但由于反向变换会使频谱展宽, 所以原平面上的再现光场将被相应地缩小。

### 3 实 验

实验采用透射式离轴数字全息记录光路, 如图 3 所示。所采用的激光器为氦氖激光器, 波长为 632.8 nm, 激光经透镜系统扩束准直后形成平面波, 再由分束镜 BS1 分成两束平行光, 一束经反射镜 M1 反射作为参考光 R, 另一束经中性衰减片

(NF) 做光强衰减调整, 然后照射透明胶片形成物波 O, 物波再经分束器 BS2 反射后与参考光 R 发生干涉, 产生干涉条纹全息图, 适当调整 BS2 的方位角度, 使 CCD 上的干涉条纹满足充分采样条件, 记录全息图。实验中所使用的记录物体是一张透明胶片, 上面打印了“浙江科技学院”几个汉字, 如图 3 所示。胶片相对 CCD 记录面绕垂直于平台的  $y$  轴旋转了  $71^\circ$ 。实验所选用的 CCD 为型号 scA1390-17gm 的单色 CCD, 尺寸为 6.47 mm × 4.84 mm, 像素数为 1392 pixel × 1040 pixel。实验记录到的全息图和频谱如图 4(a) 和 (b) 所示。在该频谱中设置的矩形滤波窗口为  $61.82 \text{ mm}^{-1} \times 41.32 \text{ mm}^{-1}$ , 然后用角谱重建算法分别在 106 mm 和 115.2 mm 处得到图 4(c) 和 (d) 两个再现全息像。由图中可看出, 由于物面倾斜放置, 所以在平行于 CCD 记录面的原平面上只能对再现像进行局部聚焦, 而其他区域则会产生严重的离焦模糊现象。从再现图上测得再现像的空间尺寸为 3.99 mm × 1.36 mm, 总抽样像素数为 400 pixel × 200 pixel。

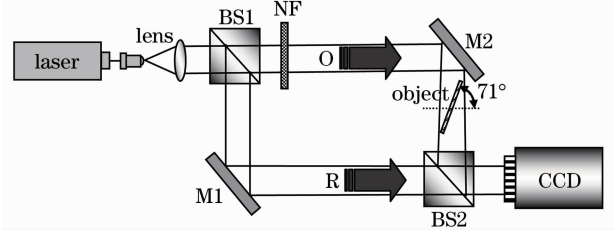


图 3 离轴数字全息记录光路图

Fig. 3 Recording configuration of off-line digital holography

要得到完整的清晰再现像需要将再现光场做  $71^\circ$  旋转, 到倾斜的参考面上进行重建。用(3)式计算确定原平面变换到参考面的频谱带宽为  $\hat{B}_x = 21.09 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\hat{B}_y = 41.12 \text{ mm}^{-1}$ , 然后根据空间带宽积不变原则确定参考面的抽样点数为  $400 \times 200$ , 从而由(6)式得到抽样间隔的取值范围为  $0.0527 \leq \Delta \hat{u} \leq 0.0854, 0.2056 \leq \Delta \hat{v} \leq 0.7342$ 。然后在距离为 111.5 mm 处用三次插值算法<sup>[17]</sup>得到  $71^\circ$  斜面上的重建全息像及频谱如图 5 所示。其中图 5(a) 和 (b) 是抽样间隔取下限值即  $\Delta \hat{u} = 0.0527, \Delta \hat{v} = 0.2056$  的重建像及频谱, 此时频谱正好充满整个计算窗口, 所以没有信息损失, 由于重建是在参考面即胶片所在平面上完成的, 所以所有的文字都同时被清晰聚焦。图 5(c) 和 (d) 是抽样间隔取上限值即  $\Delta \hat{u} = 0.0854, \Delta \hat{v} = 0.7342$  时对应的重建像和频谱, 此时重建像被放大, 刚好充满整个计算窗口, 从该图中可

清晰地看出打印字体中不均匀的喷墨细节。图 5(e)和(f)是抽样间隔超出下限值即  $\Delta\hat{u}=0.0379, \Delta\hat{v}=0.0566$  的重建图像和频谱,此时频谱宽度已小于原始全息图的带宽,其效果相当于低通滤波,所以重建文

字中的细节信息已经丢失。图 5(g)和(h)是抽样间隔超过上限值即  $\Delta\hat{u}=0.1004, \Delta\hat{v}=0.8842$  的重建图像和频谱,显然该抽样间隔已经不满足充分采样条件,所以重建图像出现了严重的折叠现象。

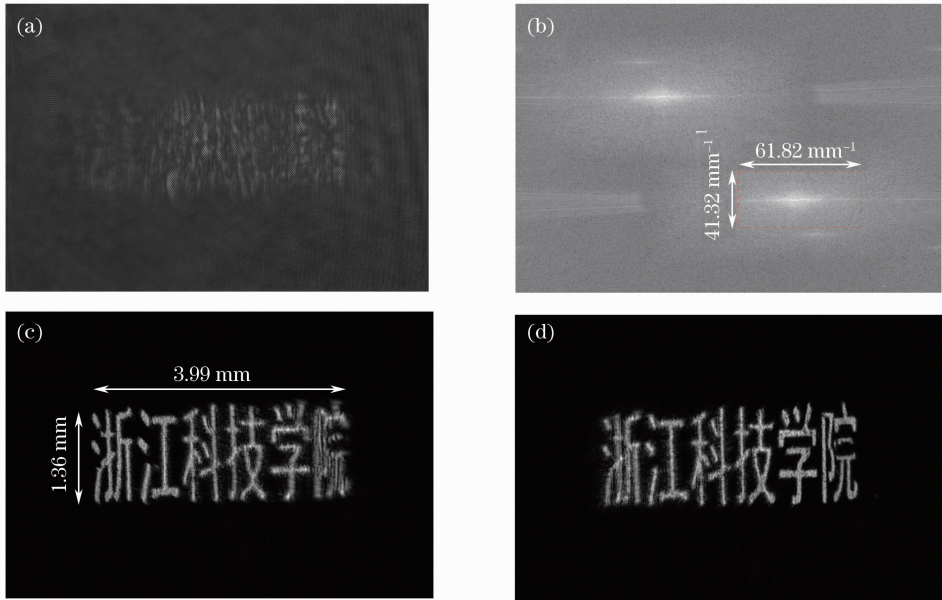


图 4 任意斜面的打印文字数字全息(a),全息频谱及  $61.82 \text{ mm}^{-1} \times 41.32 \text{ mm}^{-1}$  的滤波窗口(b),在 106 mm (c)和 115.2 mm (d)处的平行平面上的重建图像

Fig. 4 Digital hologram of (a) the printing characters on tilted plane, (b) holographic spectrum with filtering window of  $61.82 \text{ mm}^{-1} \times 41.32 \text{ mm}^{-1}$ , reconstruction amplitude image on parallel CCD plane at (c) 106 mm and (d) 115.2 mm

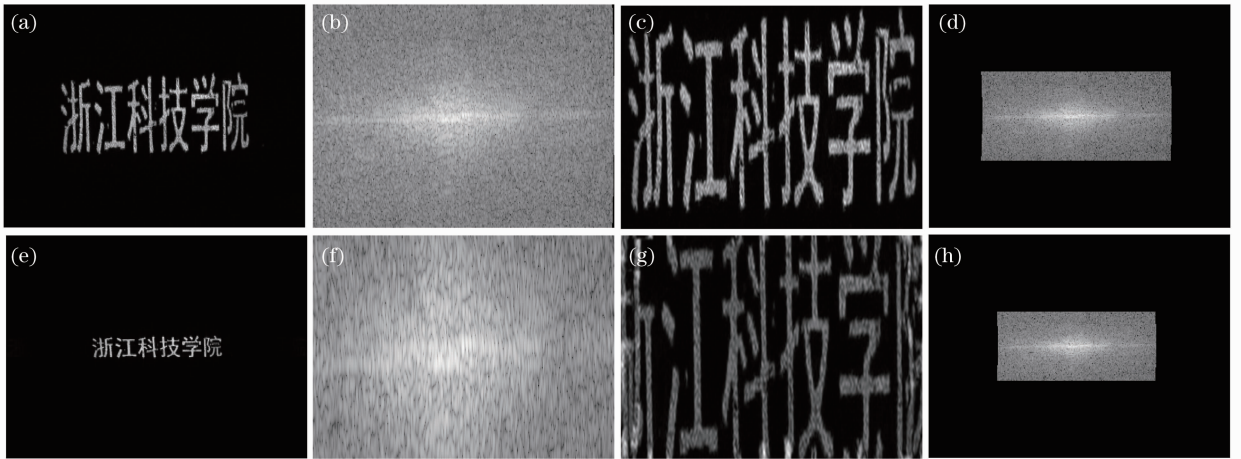


图 5 在  $71^\circ$ 斜面上抽样间隔取下限值  $\Delta\hat{u}=0.0527, \Delta\hat{v}=0.2056$  的(a)重建图和(b)频谱,抽样间隔取上限值  $\Delta\hat{u}=0.0854, \Delta\hat{v}=0.7342$  的(c)重建图和(d)频谱,抽样间隔超出下限值即  $\Delta\hat{u}=0.0379, \Delta\hat{v}=0.0566$  的(e)重建图和(f)频谱,抽样间隔超过上限值即  $\Delta\hat{u}=0.1004, \Delta\hat{v}=0.8842$  的(g)重建图和(h)频谱

Fig. 5 (a) Reconstruction amplitude image and (b) spectrum by setting the interval as the lower limit  $\Delta\hat{u}=0.0527, \Delta\hat{v}=0.2056$ , (c) reconstruction image and (d) spectrum by setting the interval as the upper limit  $\Delta\hat{u}=0.0854, \Delta\hat{v}=0.7342$ , (e) reconstruction image and (f) spectrum by setting the interval lower than the lower limit  $\Delta\hat{u}=0.0379, \Delta\hat{v}=0.0566$ , (g) reconstruction image and (h) spectrum by setting the interval higher than the upper limit  $\Delta\hat{u}=0.1004, \Delta\hat{v}=0.8842$  on a  $71^\circ$  tilted plane

为了验证第二种算法,将图 5(a)和(b)对应的参考面上的重建像进行反向旋转插值,其结果如

图 6所示。图 6(a)是由倾斜参考面变换到平行平面的再现像,图 6(b)是由全息图直接在平行平面上重

建的再现像,从图中看不出两者的显著差别,说明反向变换重建的算法是可靠的,图 6(c)是图 6(a)和(b)相减的绝对误差,从中可看出两再现像在远离

中心处误差较大,这主要是由旋转变换中的两次插值操作引起的。



图 6 (a)由倾斜面到平行平面的反向插值重建图;(b)由全息图直接在相同平行平面上的重建图;  
(c)两幅图相减的绝对误差图

Fig. 6 Reconstruction image on parallel plane from (a) the tilted plane and (b) the original recording hologram;  
(c) the error image by subtracting image (a) and image (b)

## 4 结 论

提出了一种通过角谱旋转变换和数字插值在任意斜面上进行数字全息重建的方法。该方法操作简单,只需傅里叶变换和插值运算。用该方法可实现光场从记录面到任意倾斜物面的旋转变换及反变换。详细讨论了角谱旋转变换和插值的原理,并给出了两种实现角谱插值的数字处理方法,具体分析了插值过程中的抽样间隔和抽样数目的选取方法,结果表明若倾斜面上的抽样数目应该不小于原平面的抽样点数,则抽样间隔大小取决于变换后斜面上的角谱带宽和全息图的空间带宽积。实验结果表明,本文所提方法可将倾斜物面上的所有文字同时清晰聚焦,从而得到完整的清晰再现像。当抽样间隔小于给出的下限值时,则会出现类似低通滤波的效果,导致再现的像细节丢失,反之会出现欠采样现象,导致再现像折叠。反向旋转插值方法可以实现光场从斜面到原平面的还原。其误差主要来源于插值运算。该方法操作简单而且效率高,可广泛应用于楔形元件的表面检测和多视角数字全息,现实。

## 参 考 文 献

- Pan Weiqing, Zhu Yongjian, Lang Haitao. Phase-contrast imaging technology with digital holographic microscope based system calibration [J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(7): 1812~1820  
潘卫清,朱勇建,郎海涛. 基于系统标定的相衬显微数字全息方法[J]. *中国激光*, 2010, **37**(7): 1812~1820
- S. Murata, M. Yasuda. Potential of digital holography in particle measurement[J]. *Opt. Laser Technol.*, 2000, **32**(8): 567~574
- Wu Yingchun, Wu Xuecheng, Wang Zhihua *et al.*. Reconstruction of digital inline hologram with compressed sensing [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(11): 1109001

- 吴迎春,吴学成,王智化等. 压缩感知重建数字同轴全息[J]. *光学学报*, 2011, **31**(11): 1109001
- G. Coppola, P. Ferraro, M. Iodice *et al.*. A digital holographic microscope for complete characterization of microelectromechanical systems[J]. *Meas. Sci. Technol.*, 2004, **15**(3): 529~539
- J. Kühn, F. Charrière, T. Colomb *et al.*. Digital holographic microscopy for nanometric quality control of micro-optical components[C]. *SPIE*, 2007, **6475**: 64750V
- P. Marquet, B. Rappaz, J. Magistretti *et al.*. Digital holographic microscopy: a noninvasive contrast imaging technique allowing quantitative visualization of living cells with subwavelength axial accuracy[J]. *Opt. Lett.*, 2005, **30**(5): 468~470
- Zhao Jie, Wang Dayong, Li Yan *et al.*. Experimental study on the quantitative phase-contrast imaging of the biological samples by digital holographic microscopy[J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(11): 2906~2911  
赵洁,王大勇,李艳等. 数字全息显微术应用于生物样品相衬成像的实验研究[J]. *中国激光*, 2010, **37**(11): 2906~2911
- A. Sten, B. Javidi. Theoretical analysis of three dimensional imaging and recognition of micro-organisms with a single-exposure on-line holographic microscope[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2007, **24**(1): 163~168
- X. Wang, D. Zhao, F. Jing *et al.*. Information synthesis (complex amplitude addition and subtraction) and encryption with digital holography and virtual optics[J]. *Opt. Express*, 2006, **14**(4): 1476~1486
- T. M. Kreis, M. Adams, W. P. O. Jüptner. Methods of digital holography: a comparison[C]. *SPIE*, 1997, **3098**: 224~233
- S. Ganci. Fourier diffraction through a tilted slit[J]. *Eur. J. Phys.*, 1981, **2**(3): 158~160
- D. Leseberg, C. Frère. Computer-generated holograms of 3-D objects composed of tilted planar segments[J]. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(14): 3020~3024
- L. Yu, Y. An, L. Cai. Numerical reconstruction of digital holograms with variable viewing angles[J]. *Opt. Express*, 2002, **10**(22): 1250~1257
- K. Matsushima, H. Schimmel, F. Wyrowski. Fast calculation method for optical diffraction on tilted planes by use of the angular spectrum of plane waves[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2003, **20**(9): 1755~1762
- S. De Nicola, A. Finizio, G. Pierattini *et al.*. Angular spectrum

- method with correction of anamorphism for numerical reconstruction of digital holograms on tilted planes [J]. *Opt. Express*, 2005, **13**(24): 9935~9940
- 16 Writing group of Handbook of Mathematics. Handbook of Mathematics [M]. Beijing: Higher Education Press, 1979. 329~330
- 《数学手册》编写组. 数学手册 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1979. 329~330
- 17 R. Keys. Cubic convolution interpolation for digital image processing [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing, Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1981, **29**(6): 1153~1160

栏目编辑:何卓铭