

# 负折射介质中非线性色散效应对调制不稳定性的影响

张景贵<sup>1,2</sup> 项元江<sup>2</sup> 章礼富<sup>2</sup> 李勇帆<sup>1</sup>

<sup>1</sup>湖南第一师范学院信息科学与工程系, 湖南长沙 410205  
<sup>2</sup>湖南大学计算机与通信学院微纳光电器件及应用教育部重点实验室, 湖南长沙 410082

**摘要** 研究了负折射介质中非线性色散效应对调制不稳定性的影响, 揭示了若干新的不稳定性现象。得到了有任意高阶线性与非线性色散效应情形下调制不稳定性增益谱的表达式, 结果表明: 所有偶次非线性色散不但会影响原来的不稳定性, 而且可能会导致新的不稳定性区域; 而所有的奇次非线性色散将始终抑制调制不稳定性, 且与其符号的正负无关。进一步研究了由色散磁导率所诱导的二阶非线性色散效应对调制不稳定性的影响。研究发现它不但能使在常规介质中不可能出现的调制不稳定性现象也能出现, 而且可能会导致在无限带宽的调制频率范围内发生新的不稳定性现象, 且其增益值将随调制频率的增大而单调增大。

**关键词** 非线性光学; 负折射介质; 调制不稳定性; 超短脉冲传输

**中图分类号** O437; O441.4 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201239.0706004

## Influence of Nonlinear Dispersion Effects on Modulation Instability in Metamaterials

Zhang Jinggui<sup>1,2</sup> Xiang Yuanjiang<sup>2</sup> Zhang Lifu<sup>2</sup> Li Yongfan<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Information Science and Engineering, Hunan First Normal College, Changsha, Hunan 410205, China  
<sup>2</sup>Key Laboratory for Micro/Nano Optoelectronic Devices of Ministry of Education, School of Computer and Communication, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China

**Abstract** The influence of nonlinear dispersion effects on modulation instability (MI) in nonlinear metamaterials (MMs) is investigated and some new instability phenomena are revealed. Firstly, a general expression for MI gain, taking account of the effects of arbitrary high-order nonlinear dispersions, is derived. It is shown that all even-order nonlinear dispersion not only deforms the original instability regions, but also may lead to the appearance of new instability regions; while all odd-order nonlinear dispersion always suppresses MI irrespective of their signs. Then, the influence of second-order nonlinear dispersion (SND) induced by dispersive magnetic permeability is further analyzed. It is found that SND not only leads to the occurrence of MI inaccessible in ordinary materials, but also opens up a new instability window with an infinite modulation frequency range and the gain value increases monotonically with increasing modulation frequencies.

**Key words** nonlinear optics; metamaterials; modulation instability; ultrashort pulse propagation

**OCIS codes** 060.4370; 160.3918; 190.5530

## 1 引 言

调制不稳定性(MI)是非线性色散系统中一种非常普遍而重要的物理现象<sup>[1]</sup>, 在非线性光学、流体力学、等离子体物理等许多领域都可以观察到。其中非线性光学中的调制不稳定性起源于介质色散和

非线性效应或衍射和非线性的相互作用结果<sup>[1~4]</sup>, 它最重要的特征是使迭加在均匀平面波上的弱调制在传输过程中呈指数增长, 这种增长使边带放大从而使本来均匀的平面波分裂。并且调制不稳定性是孤子产生的先兆: 如果在非线性介质中存在调制不

收稿日期: 2012-02-16; 收到修改稿日期: 2012-04-05

基金项目: 湖南省高校科技创新团队支持计划(湘教通[2010]212号)和湖南省科技计划(2010GK3049)资助课题。

作者简介: 张景贵(1977—), 男, 博士, 讲师, 主要从事超短脉冲传输及孤子等方面的研究。E-mail: zjg51@163.com

稳定性,则表明在这种介质中有可能形成亮孤子;反之,若要产生暗孤子,则要求介质不支持平面波的调制不稳定性<sup>[1,4]</sup>。

近年来,一种全新的人工合成电磁材料——“负折射介质”——因具有许多天然物质所不具有的特性(如负的折射率、倏逝波放大、电磁隐身等)引起了全世界众多领域的研究者的兴趣<sup>[5~7]</sup>,现已成为非常热门的研究领域之一。最近几年负折射材料的发展迅猛,现已能制备出从微波到光波段、从一维到三维、从线性到非线性的负折射介质<sup>[5~10]</sup>。目前国内外许多研究者从多方面展开了对负折射介质的研究工作,并取得了许多重要进展。非线性负折射介质的实现,将大大拓展传统非线性光学的研究领域,并将导致开发出大量的新型光电子器件,该领域已经成为当今负折射介质研究的主流方向之一。国外已有很多关于负折射介质中的非线性现象的研究报道,其中最初研究工作主要体现在建立了各种用于描述电磁脉冲在负折射介质中传输的数学模型<sup>[11~13]</sup>,最近几年许多研究者进一步发现负折射介质蕴含大量不同于常规介质的反常传输现象和物理规律,如调制不稳定性、孤子、谐波产生、参量放大以及光学稳态性等等<sup>[11~16]</sup>。国内湖南大学 Wen 等<sup>[17~26]</sup>研究了超短脉冲在非线性负折射介质中的传输特性。他们建立了适合于几个光学周期脉冲在负折射介质中传输的物理模型,并且证明了介质的色散磁导率可导致其出现可正可负的自陡(SS)效应以及高阶非线性色散效应,因而这与常规光学介质中的传输模型存在很大差异;他们进一步揭示可以通过非线性色散特性来操控孤子脉冲传输及调制不稳定性的物理规律。此外,国内还有许多其他课题组在负折射介质中超短脉冲传输研究领域做了许多前期理论探索工作<sup>[27~30]</sup>。尽管如此,负折射介质的发展毕竟只是近几年的事情,还有大量的基础理论问题值得去研究,特别是大量的传统非线性光学现象需要重新思考。

本文利用传统的线性稳定性分析方法,得到了有任意高阶线性与非线性色散效应情形下增益谱表达式的普适形式,提炼出色散磁导率所导致的一系列高阶非线性色散效应对调制不稳定性影响的一般性规律,最后以常规介质中不具有的二阶非线性色散(SND)为例,详细地分析了其对调制不稳定性的影响,发现了在以前的研究工作中未报道过的调制不稳定性现象。

## 2 理论模型

超短脉冲电场包络  $E(\xi, \tau)$  在具有克尔型非线性电极化的负折射介质中传输满足如下修正的非线性薛定谔方程<sup>[17]</sup>:

$$\partial_{\xi} E = i \sum_{m=2}^{\infty} \frac{i^m \beta_m}{m!} \partial_{\tau}^m E + i\gamma \left( 1 + i \sum_{j=1}^{\infty} i^j \bar{s}_j \partial_{\tau}^j \right) |E|^2 E, \quad (1)$$

这里已采用移动坐标系,  $\xi = z, \tau = t - z/v_g, \beta_1 = 1/v_g$ , 式中  $v_g$  为群速度,  $\gamma$  为克尔非线性系数,  $\beta_m$  为  $m$  阶线性色散系数,  $\bar{s}_j$  为  $j$  阶非线性色散系数, 这里给出自陡及二阶非线性色散的表达式为

$$\bar{s}_1 = s \left( 2 - \sigma + \frac{\nu_1 \omega_0}{\nu_0} \right), \quad (2)$$

$$\bar{s}_2 = s^2 \left[ (1 - \sigma)^2 + \frac{(2 - \sigma) \omega_0 \nu_1}{\nu_0} + \frac{\omega_0^2 \nu_2}{2\nu_0} \right], \quad (3)$$

式中  $\nu_j = \partial^j \mu_r / \partial \omega^j |_{\omega=\omega_0}$  ( $j = 0, 1, 2, \mu_r$  为介质相对磁导率),  $\sigma$  为相速度与群速度比值,  $s = 1/\omega_0$  为常规介质自陡系数。其他参量的表达式可参阅文献<sup>[17]</sup>。将(1)式与常规光纤中超短脉冲传输方程进行比较发现,前者除了存在自陡项,还存在额外的二阶非线性色散以及一系列高阶非线性色散项。此外,(1)式中的自陡峭系数与常规的脉冲传输方程的自陡峭系数也是不完全相同的,后者没有  $1 - \sigma + \nu_1 \omega_0 / \nu_0$  这一项。如果介质是无磁性介质即  $\mu_r = 1$ , 并且假设群速度与相速度相等即  $\sigma = 1$ , 此时  $s_1 = 1/\omega_0, s_j = 0 (j \geq 2)$ , (1)式完全还原为超短脉冲在光纤中的传输方程。因此色散磁导率与非线性相互作用导致负折射介质中超短脉冲传输模型有别于常规介质。

为便于计算,将方程进行归一化处理,这里定义  $L_{NL} = 1/(\gamma |E_0|^2)$  为克尔非线性长度,  $L_{DS} = |\tau_0^2 / \beta_2|$  为色散长度,  $L_n = \tau_0^n / (\gamma |E_0|^n \bar{s}_n)$  为  $n$  阶非线性色散长度,其中  $\tau_0$  和  $E_0$  分别表示初始入射脉冲的时间宽度(1/e)与光束初始电场包络振幅。对(1)式做归一化处理  $Z = \xi / L_{DS}, T = \tau / \tau_0, U = E / E_0$ , 从而将(1)式写成下列归一化形式:

$$\partial_Z U = i \sum_{m=2}^{\infty} i^m b_m \partial_T^m U + i\nu p \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} i^j s_j \partial_T^j \right) |U|^2 U, \quad (4)$$

式中  $b_m = L_{DS} \beta_m / \tau_0^m m!$  为  $m$  阶归一化线性色散系数,  $s_j = L_{NL} / L_n$  为  $n$  阶非线性色散系数,  $p = L_{DS} / L_{NL}$  为归一化克尔非线性系数。参量  $\nu = \pm 1$  分别代表介质为自聚焦介质与自散焦介质,  $\text{sgn}(b_2) = \pm 1$  分别代表脉冲处在正常色散区域与反常色散区域。

本文将采用无损的德鲁德型描述负折射介质的线性与非线性电磁特性,其介电常数与磁导率的数学表达式分别为  $\epsilon_r(\omega) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$ ,  $\mu_r(\omega) = 1 - \omega_{pm}^2/\omega^2$ , 其中  $\omega_{pe}$  和  $\omega_{pm}$  分别为负折射介质的电与磁等离子频率。基于德鲁德模型所描述的负折射介质的群速度色散(GVD)系数  $\beta_2$ 、自陡系数  $s_1$  与二阶非线性色散系数  $s_2$  的表达式分别为

$$\beta_2 = \frac{1}{cn\omega} \left( 1 + \frac{3\omega_{pe}^2\omega_{pm}^2}{\omega^4} \right) - \frac{(1 - \omega_{pe}^2\omega_{pm}^2/\omega^4)^2}{cn^3\omega}, \quad (5)$$

$$s_1 = s \left( 1 + \frac{\omega_{pm}^2\omega_{pe}^2 - \omega^4}{n^2\omega^4} - \frac{\omega_{pm}^2 + \omega^2}{\omega_{pm}^2 - \omega^2} \right), \quad (6)$$

$$s_2 = s^2 \left[ \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{pm}^2} - \frac{1}{4n^2} \left( 1 + \frac{3\omega_{pe}^2\omega_{pm}^2}{\omega^4} \right) + \frac{1}{4n^4} \left( 1 - \frac{\omega_{pe}^2\omega_{pm}^2}{\omega^4} \right)^2 \right], \quad (7)$$

式中  $s = 1/\omega_0\tau_0$ 。为了揭示负折射介质中的调制不稳定性现象,图1给出了  $s_1$ 、 $s_2$  与  $\beta_2$  随归一化频率  $\omega/\omega_{pe}$  变化的关系,从图中发现负折射介质中的自陡与二阶非线性色散系数可正可负,甚至变得非常大,而在常规介质中的自陡系数比较小,且始终是正值。其零色散点位于  $\omega/\omega_{pe} \approx 0.707$ , 零自陡系数位于  $\omega/\omega_{pe} \approx 0.634$ 。此外,对比常规介质,负折射介质另一个重要特征是可以改变材料结构单位即电与磁等离子频率大小来控制各个参量值的大小,这为人操控负折射介质超短脉冲传输及调制不稳定性提供了新的手段。

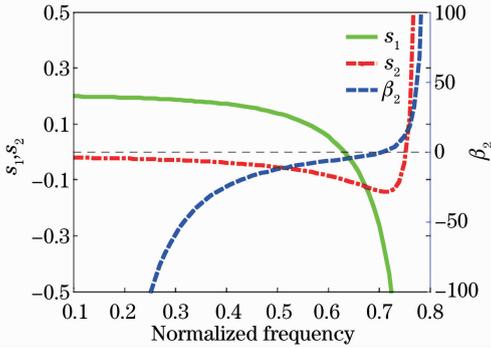


图1 自陡系数  $s_1$ 、二阶非线性色散系数  $s_2$  及群速度色散系数  $\beta_2$  随归一化频率  $\omega/\omega_{pe}$  变化关系,  $s = 0.2$ ,  $\omega_{pm}/\omega_{pe} = 0.8$ ,  $\beta_2$  的单位是  $1/c\omega_{pe}$

Fig. 1 SS coefficient  $s_1$ , SND coefficient  $s_2$  and GVD coefficient  $\beta_2$  versus normalized frequency  $\omega/\omega_{pe}$ ,  $s = 0.2$ ,  $\omega_{pm}/\omega_{pe} = 0.8$ ,  $\beta_2$  is calculated in units of  $1/c\omega_{pe}$

基于(4)式来讨论负折射介质中的调制不稳定性特性。很明显,该式的解析求解是非常困难的,一般只能求数值解。然而可以简单地考虑它的稳态解

或准稳态解来分析其不稳定性问题,这里利用标准的线性稳定性分析方法<sup>[1]</sup>。假设方程的平面波解  $U(T, Z) = U_0 \exp(iI_0 Z)$ , 其中  $U_0$  是平面波的振幅,  $I_0 = \rho U_0^2$ 。在稳态解上施加微扰项,  $U(T, Z) = U_0 [1 + a(T, Z)] \exp(iI_0 Z)$ , 代入(4)式并使  $a$  线性化,得

$$\partial_Z a = \sum_{m=2}^{\infty} i^{m+1} b_m (\partial_T^m + i\epsilon \partial_T^{m+1}) a + i\nu I_0 (a + a^*) + i\nu I_0 \sum_{j=1}^{\infty} i^j s_j (2\partial_z^j a + \partial_z^j a^*), \quad (8)$$

式中  $a^*$  为  $a$  的共轭。设微扰解的形式为  $a = a_1 \exp[i(Kz - \Omega T)] + a_2 \exp[-i(Kz - \Omega T)]$ ,  $\Omega$  与  $K$  分别是微扰的频率和波数, 将其代入(8)式, 经计算得到调制不稳定性增益谱表达式为

$$G = \left[ \left( - \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \Omega^{2m} - \nu I_0 \sum_{j=1}^{\infty} \Omega^{2j} s_{2j} \right) \times \left( \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \Omega^{2m} + 2\nu I_0 + 3\nu I_0 \sum_{j=1}^{\infty} \Omega^{2j} s_{2j} \right) - I_0^2 \left( \sum_{j=1}^{\infty} \Omega^{2j-1} s_{2j-1} \right)^2 \right]^{0.5}. \quad (9)$$

从(9)式可以得到两个显而易见的结论:首先它涵盖了以前已得到的关于常规介质及负折射介质中的时间不稳定性的结果<sup>[1, 2, 20~23]</sup>;其次,若不考虑高阶非线性色散效应,则(9)式与以前负折射介质及常规介质中的调制不稳定性结果一致<sup>[20~23]</sup>, 但比以前的结果更具普遍性。在以下的分析中,将基于(9)式研究负折射介质中的调制不稳定性。

### 3 非线性色散效应对调制不稳定性的影响

基于增益谱表达式(9)分析负折射介质中调制不稳定性现象,首先总结出任意阶线性与非线性色散效应对调制不稳定性影响的一般性规律,然后以色散磁导率所导致的在常规介质中不存在的 SND 为例,详细分析其对调制不稳定性的影响。

#### 3.1 一般性规律

在负折射介质的中,增益谱表达式(9)式清楚表明,所有高阶线性色散效应对调制不稳定性的影响与常规介质中对应的情形完全相同,即所有奇数阶色散效应对调制不稳定性不产生影响而所有偶数阶色散效应都将改变调制不稳定性特性<sup>[2]</sup>。因此文中将重点分析由介质色散磁导率所导致的非线性色散效应对调制不稳定性的影响。很明显从(9)式可知,与所有奇次非线性色散项不同的是,所有偶次非线

性色散项的符号将影响不稳定频谱的范围。更有趣的是,当  $\text{sgn}(b_{2j})$  与  $\text{sgn}(us_{2j})$  两者具有相同的符号时,所有偶次非线性色散项与对应的偶次线性色散项对称,因此两者对不稳定性也应产生类似的影响。故可以得到这样的结论:所有偶次非线性色散不但会影响原来不稳定频谱的范围,而且会导致新的不稳定性区域。换句话说,如果将更高阶非线性色散效应如第  $2(j+1)$  阶考虑进来,则第  $2(j+1)$  阶非线性色散不仅改变由所有第 1 到  $2j+1$  阶非线性色散导致的不稳定性区域,而且还有可能导致出现新的第  $(j+1)$  个不稳定性区域。尤其值得注意的是某一任意高次偶数阶非线性色散的出现有可能使本来不可能出现不稳定性情形发生改变。例如以前的文献<sup>[22,23]</sup>已经证明,在有正常群速度色散自聚焦介质中,如果介质存在二阶非线性色散效应,则有可能产生调制不稳定性。这个结果可看作是文中的普遍结论的一个特例。对比而言,与对应的偶次非线性色散项不同的是所有的奇次非线性色散项通过降低不稳定性数值从而抑制不稳定性区域。进一步分析不稳定性表达式(9)式表明,尽管奇次非线性色散的符号不会影响原来的不稳定性增益谱,但是如果将更高阶非线性色散效应如第  $2j+1$  阶考虑进来,则第  $2j+1$  阶非线性色散符号将改变由所有第 1 到  $2j$  阶非线性色散导致的不稳定性区域。此外,当调制不稳定性发生时,最关心的是最快增长频率与最大增益,其最快增长频率与最大增益可以通过式  $\partial G/\partial \Omega=0$  得到,当不考虑非线性色散效应时,最大增益保持恒定数值,而与线性色散效应大小无关<sup>[2]</sup>。而当考虑非线性色散效应时,尽管此时不能得到最大增益的解析表达式,但发现非线性色散效应将导致最大增益值随其大小的变化而变化,因此可以通过调控非线性色散值的大小来控制调制不稳定性的最大增益,这为自由操控负折射介质中调制不稳定性提供了新的手段。

### 3.2 二阶非线性色散对调制不稳定性的影响

已有研究表明,无论是常规介质还是负折射介质,正负自陡效应都会抑制介质中的调制不稳定性产生<sup>[22,23]</sup>,因此在本小节将重点分析由色散磁导率所导致的在传统超短脉冲传输方程中不存在的二阶非线性色散效应对调制不稳定性的影响。为讨论简单起见,这里假设  $\nu=-1$ ,即介质为自散焦非线性介质,其他参数的取值根据德鲁德模型确定,此外,为了突出负折射介质的二阶非线性色散效应对调制不稳定性的影响,在以下分析中首先设自陡系数

$s_1=0$ ,然后将进一步同时考虑自陡与二阶非线性色散共同作用情形下负折射介质中的调制不稳定性现象。

当脉冲中心频率处在反常群速度色散时,由图 1 可知,此时二阶非线性色散系数  $s_2$  恒为负。根据其大小可将调制不稳定性特性分为三种情形讨论,主要特征总结如表 1,对应增益谱形状如图 2 所示,其中图 2(a)和(b)分别代表  $-1 < I_0 s_2 < -1/3$  与  $I_0 s_2 < -1$  情形下不稳定性增益随调制频率变化关系图,而图 2(c)给出了调制不稳定性增益随参量  $I_0$  大小变化的关系图。从表 1 及图 2 易发现负折射介质中调制不稳定性存在一些不寻常特征。首先,对于反常群速度色散自散焦情形,当不考虑二次非线性效应时调制不稳定性是不存在的。而图 2 清楚表明,通过选择适当大小的二阶非线性色散值,使本来不可能产生的调制不稳定性也发生了,这一性质为自散焦反常群速度色散情形产生超短光脉冲串提供了一种新的思路,这对将来超短光脉冲串产生、孤子等许多实际应用领域的研究具有重要的指导意义。其次,表 1 及图 2 表明,当  $-1/3 < I_0 s_2 < 0$  时,即使考虑二阶非线性效应,调制不稳定性仍然不会发生;当  $I_0 s_2 < -1$  时,不稳定性增益谱形状与传统介质情形完全相同,其最大增益为  $g_{\max} = I_0 \sqrt{(1+I_0 s_2)/(1+3I_0 s_2)}$ ,对应的最快增长频率为  $\Omega^2 = -I_0/(1+3I_0 s_2)$ ;当  $-1 < I_0 s_2 < -1/3$  时,调制不稳定性特征明显不同于传统介质情形,由于二阶非线性色散效应的作用,负折射介质中调制不稳定性最明显的特征是其调制时间窗口延伸到无穷远处,也就是说在无限带宽范围内调制不稳定性现象都将发生,且其增益值将随着调制的时间频率的增大而增大,此外发现在低频处存在一个截止频率  $\Omega^2 = -2I_0/(1+3I_0 s_2)$ 。众所周知,传统调制不稳定性一般发生在有限调制频率范围,且其调制最大增益一般为一恒定数值。因此负折射介质中这种由二阶非线性色散引起的不寻常的调制不稳定性现象将在实际中有广泛的应用前景,比如可以通过增大时间调制频率来增大其调制增益值,而不必通过提高其入射脉冲的功率。最后,从不稳定性增益随参量  $I_0$  变化的关系图[图 2(c)]发现,当  $I_0 s_2 < -1$  时,发生不稳定性调制频率的带宽将随  $I_0$  的减小而减小,而最大增益将随其减小而增大;当  $-1 < I_0 s_2 < -1/3$  时,其不稳定性的截止频率将随  $I_0$  的增大而增大,从而缩小了低频不稳定性区域,且对于相同的调制频率,不稳定性增益值将随  $I_0$  的增大而增大。当同

时考虑自陡与二阶非线性色散共同作用情形下的调制不稳定性现象时,图 2 清楚地表明自陡效应始终减小了调制增益值从而缩小了调制频谱范围,特别

是对于无限时域窗口增益谱情形,自陡效应由于始终抑制不稳定性增长从而将导致其截止频率向高频方向移动。

表 1 反常群速度色散情形下调制不稳定发生条件

Table 1 Condition for the occurrence of MI in anomalous GVD region

| $I_0 s_2$             | $s_1 = 0, s_2 \neq 0$                 | $s_1 \neq 0, s_2 \neq 0$  |
|-----------------------|---------------------------------------|---|
| $-1/3 < I_0 s_2 < 0$  | No MI                                 | No MI   |
| $-1 < I_0 s_2 < -1/3$ | $\Omega^2 > \frac{-2I_0}{1+3I_0 s_2}$ | $\Omega^2 > \frac{-2I_0}{1+3I_0 s_2} - \frac{I_0^2 s_1^2}{(1+I_0 s_2)(1+3I_0 s_2)}$ |
| $I_0 s_2 < -1$        | $\Omega^2 < \frac{-2I_0}{1+3I_0 s_2}$ | $\Omega^2 < \frac{-2I_0}{1+3I_0 s_2} - \frac{I_0^2 s_1^2}{(1+I_0 s_2)(1+3I_0 s_2)}$ |

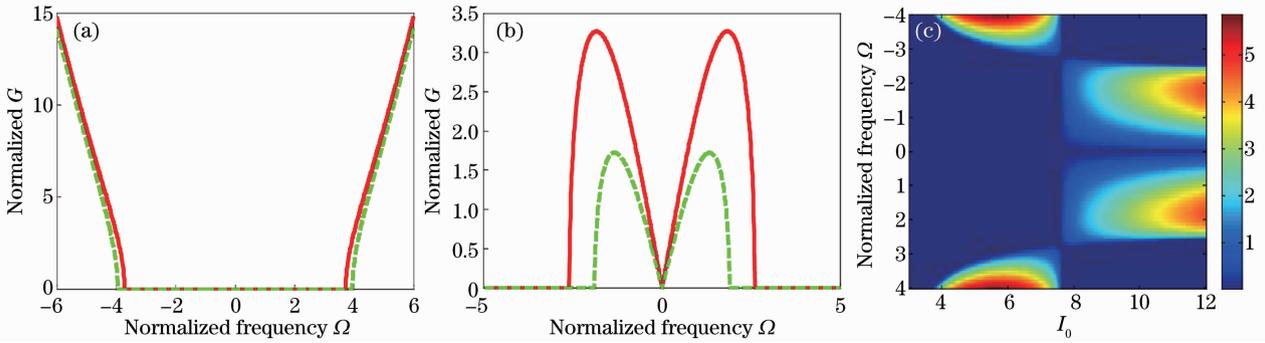


图 2 反常群速度色散情形下归一化不稳定性增益  $G$  随归一化频率的变化。(a)  $-1 < I_0 s_2 < -1/3$ ,  $I_0 = 4$ ; (b)  $I_0 s_2 < -1$ ,  $I_0 = 10$ ; (c) 归一化不稳定性增益随参量  $I_0$  的变化。 $\omega/\omega_{pe} = 0.685$ , 实线代表  $s_2 \neq 0, s_1 = 0$ , 虚线代表  $s_2 \neq 0, s_1 \neq 0$

Fig. 2 Normalized instability gain  $G$  as a function of the normalized frequencies in anomalous GVD region. (a)  $-1 < I_0 s_2 < -1/3$ ,  $I_0 = 4$ ; (b)  $I_0 s_2 < -1$ ,  $I_0 = 10$ ; (c) variation of normalized gain with  $I_0$ .  $\omega/\omega_{pe} = 0.685$ , solid curve represents  $s_2 \neq 0, s_1 = 0$  and dashed curve represents  $s_2 \neq 0, s_1 \neq 0$

当脉冲中心处在正常色散区域时,二阶非线性色散系数  $s_2$  可正可负(图 1 所示),根据其大小仍可将负折射介质中调制不稳定性分为三种情形。其主要特征总结如表 2,对应的频谱图如图 3 所示,其中图 3(a)与(b)分别代表  $1/3 \leq I_0 s_2 < 1$  与  $I_0 s_2 < 1/3$  情形不稳定性增益随调制频率变化关系图,而图 3(c) 给出了调制不稳定性增益随参量  $I_0$  大小变

化的关系图。从图中发现,在正常群速度色散区,当  $I_0 s_2 > 1$  时,二阶非线性色散将完全抑制负折射介质中调制不稳定性的产生。当  $I_0 s_2 < 1/3$  时,不稳定性增益谱形状与传统介质情形一样,其最大增益为  $g_{\max} = I_0 \sqrt{(1 - I_0 s_2)/(1 - 3I_0 s_2)}$ ,所对应的最快增长频率为  $\Omega^2 = I_0/(1 - 3I_0 s_2)$ 。当  $1/3 \leq I_0 s_2 < 1$  时,这种不寻常的不稳定性频谱特征与前文所讨论

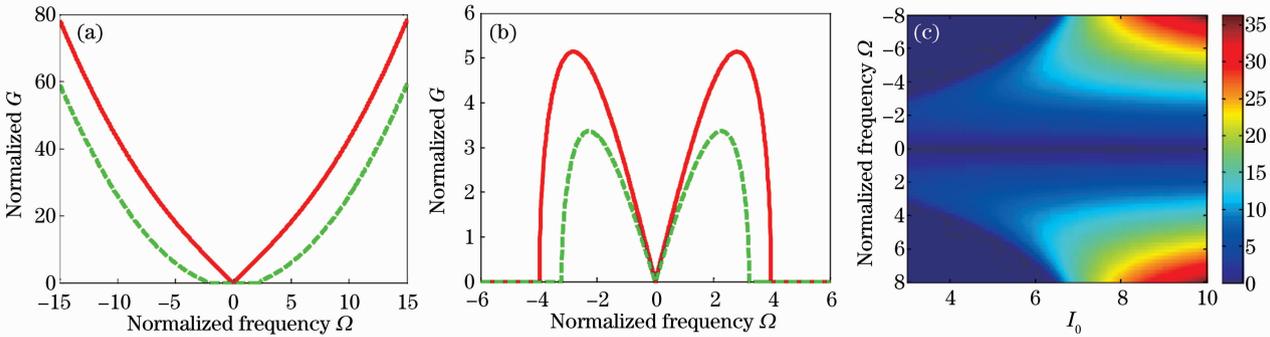


图 3 正常群速度色散情形下归一化不稳定性增益  $G$  随归一化频率的变化。(a)  $1/3 < I_0 s_2 < 1$ ,  $I_0 = 9$ ; (b)  $I_0 s_2 < 1/3$ ,  $I_0 = 4$ ; (c) 不稳定性增益随参量  $I_0$  的变化。 $\omega/\omega_{pe} = 0.756$ , 实线代表  $s_2 \neq 0, s_1 = 0$ , 虚线代表  $s_2 \neq 0, s_1 \neq 0$

Fig. 3 Normalized instability gain  $G$  as a function of the normalized frequencies in normal GVD region. (a)  $1/3 < I_0 s_2 < 1$ ,  $I_0 = 9$ ; (b)  $I_0 s_2 < 1/3$ ,  $I_0 = 4$ ; (c) variation of normalized gain with  $I_0$ .  $\omega/\omega_{pe} = 0.756$ , solid curve represents  $s_2 \neq 0, s_1 = 0$ ,  $s_1 \neq 0$  and dashed curve represents  $s_2 \neq 0, s_1 \neq 0$

的  $-1 < I_0 s_2 < -1/3$  情形类似,但不同的是后者在低频处存在一个截止频率  $\Omega^2 = -2I_0/(1 + 3I_0 s_2)$ ,而此处无截止频率,如图 3(a) 所示。此外,从图 3(c) 所给出的不稳定增益随  $I_0$  的变化关系进一步发现,当  $I_0 s_2 < 1/3$  时,随着  $I_0$  值逐渐减小,不稳定性增益带宽以及最大增益都将变小,而当  $1/3 < I_0 s_2 < 1$  时,对于相同的调制时间频率,不稳定性增益值将随

$I_0$  的增大而增大。进一步考虑自陡效应,图 3 清楚地表明其作用主要通过降低增益值从而缩短了调制不稳定性发生区域。特别是当  $1/3 \leq I_0 s_2 < 1$  时,自陡效应由于抑制低频处频谱分量从而在不稳定性窗口出现一个临界截止频率,很明显,自陡效应越强,临界截止频率越向高频方向移动越多。

表 2 正常群速度色散情形下调制不稳定发生条件

Table 2 Condition for the occurrence of MI in normal GVD region

| $I_0 s_2$           | $s_1 = 0, s_2 \neq 0$                  | $s_1 \neq 0, s_2 \neq 0$   |
|---------------------|--|--|
| $I_0 s_2 > 1$       | No MI                                  | No MI  |
| $1/3 < I_0 s_2 < 1$ | All $\Omega^2$                         | $\Omega^2 > \frac{2I_0}{1 - 3I_0 s_2} - \frac{I_0^2 s_1^2}{(1 - I_0 s_2)(1 - 3I_0 s_2)}$ |
| $I_0 s_2 < 1/3$     | $\Omega^2 < \frac{2I_0}{1 - 3I_0 s_2}$ | $\Omega^2 < \frac{2I_0}{1 - 3I_0 s_2} - \frac{I_0^2 s_1^2}{(1 - I_0 s_2)(1 - 3I_0 s_2)}$ |

## 4 结 论

研究了非线性色散效应对负折射介质中的调制不稳定性的影响,揭示了若干新的不稳定性现象。首先得了有任意高阶线性与非线性色散效应情形下调制不稳定性增益谱的表达式。进一步分析了所有这些高阶非线性色散效应对调制不稳定性的影响,提炼出了一些一般性规律。研究表明,所有偶次非线性色散不但会影响原来的不稳定性,而且可能导致新的不稳定性区域;而所有的奇次非线性色散不管其符号是正或负,它始终通过降低不稳定性增益值从而抑制调制不稳定性产生,最终缩短原来的不稳定性增益区域。最后以德鲁德模型为例,详细讨论由色散磁导率诱导的在常规介质中所不具有的二阶非线性色散效应对调制不稳定性的影响。研究发现它不但会导致本来在常规介质中不可能发生的调制不稳定性也能发生,而且可能会导致在无限带宽的调制频率范围内发生不稳定性现象,且其增益值将随调制频率的增大而单调增大,这种不寻常的调制不稳定性现象在以前的研究工作中未曾报道过。这些研究结果对将来超短光脉冲串产生、孤子等许多实际应用领域研究具有重要的指导意义。

## 参 考 文 献

- 1 G. P. Agrawal. Nonlinear Fiber Optics [M]. San Diego: Academic Press, 2009
- 2 S. Wen, D. Fan. Spatiotemporal instabilities in nonlinear Kerr media in the presence of arbitrary higher-order dispersions[J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2002, **19**(7): 1653~1659
- 3 W. Krolikowski, O. Bang, J. J. Rasmussen *et al.*. Modulational instability in nonlocal nonlinear Kerr media[J]. *Phys. Rev. E*, 2001, **64**(1): 016612

- 4 Zhong Xianqiong, Xiang Anping. Modulation instability induced by cross-phase modulation in case of high-order dispersion and saturable nonlinearity [J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(2): 391~397
- 钟先琼, 向安平. 高阶色散和饱和非线性下的交叉相位调制不稳定性[J]. *中国激光*, 2009, **36**(2): 391~397
- 5 V. G. Veselago. The electrodynamic of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$  [J]. *Sov. Phys. Usp.*, 1968, **10**(4): 509~514
- 6 J. B. Pendry. Negative refraction makes a perfect lens [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **85**(18): 3966~3969
- 7 J. B. Pendry, D. Schurig, D. R. Smith. Controlling electromagnetic fields [J]. *Science*, 2006, **312**(5781): 1780~1782
- 8 V. M. Shalaev. Optical negative-index metamaterials [J]. *Nature Photonics*, 2006, **1**(1): 41~48
- 9 J. Valentine, S. Zhang, T. Zentgraf *et al.*. Three-dimensional optical metamaterial with a negative refractive index[J]. *Nature*, 2008, **455**(7211): 376~379
- 10 A. A. Zharov, I. V. Shadrivov, Y. S. Kivshar. Nonlinear properties of left-handed metamaterials[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2003, **91**(3): 037401
- 11 M. Scalora, M. S. Sychin, N. Akozbek. Generalized nonlinear Schrödinger equation for dispersive susceptibility and permeability: application to negative index materials[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, **95**(1): 013902
- 12 N. Lazarides, G. P. Tsironis. Coupled nonlinear Schrödinger field equations for electromagnetic wave propagation in nonlinear left-handed materials[J]. *Phys. Rev. E*, 2005, **71**(3): 036614
- 13 N. L. Tsitsas, N. Rompotis, I. Kourakis *et al.*. Higher-order effects and ultrashort solitons in left-handed metamaterials[J]. *Phys. Rev. E*, 2009, **79**(3): 037601
- 14 M. W. Klein, C. Enkrich, M. Wegener *et al.*. Second-harmonic generation from magnetic metamaterials [J]. *Science*, 2006, **313**(5786): 502~504
- 15 D. A. Powell, I. V. Shadrivov, Y. S. Kivshar. Asymmetric parametric amplification in nonlinear left-handed transmission lines[J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2009, **94**(8): 084105
- 16 N. M. Litchinitser, I. R. Gabitov, A. I. Maimistov. Optical bistability in a nonlinear optical coupler with a negative index channel[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, **99**(11): 113902
- 17 S. Wen, Y. Xiang, X. Dai *et al.*. Theoretical models for

- ultrashort electromagnetic pulse propagation in nonlinear metamaterials[J]. *Phys. Rev. A*, 2007, **75**(3): 033815
- 18 J. Zhang, S. Wen, Y. Xiang *et al.*. Spatiotemporal electromagnetic soliton and spatial ring formation in nonlinear metamaterials[J]. *Phys. Rev. A*, 2010, **81**(2): 023829
- 19 J. Zhang, S. Wen, Y. Xiang. General features of spatiotemporal instability induced by arbitrary high-order nonlinear dispersions in metamaterials[J]. *J. Mod. Opt.*, 2010, **57**(10): 876~884
- 20 S. Wen, Y. Xiang, W. Su *et al.*. Role of the anomalous self-steepening effect in modulation instability in negative-index material[J]. *Opt. Express*, 2006, **14**(4): 1568~1575
- 21 S. Wen, Y. Wang, W. Su *et al.*. Modulation instability in nonlinear negative-index material [J]. *Phys. Rev. E*, 2006, **73**(3): 036617
- 22 Y. Xiang, S. Wen, X. Dai *et al.*. Modulation instability induced by nonlinear dispersion in nonlinear metamaterials[J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2007, **24**(12): 3058~3063
- 23 Dai Xiaoyu, Wen Shuangchun, Xiang Yuanjiang. Influence of dispersive magnetic permeability on modulation instability in metamaterials[J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, **57**(1): 186~193  
戴小玉, 文双春, 项元江. 色散磁导率对异向介质中的调制不稳定性的影响[J]. *物理学报*, 2008, **57**(1): 186~193
- 24 Zhang Jinggui, Wen Shuangchun, Xiang Yuanjiang *et al.*. Influence of dispersive magnetic permeability on spatiotemporal instability in metamaterials [J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(11): 2908~2913
- 张景贵, 文双春, 项元江等. 负折射介质中色散磁导率对时空不稳定性的影响[J]. *中国激光*, 2009, **36**(11): 2908~2913
- 25 Yi Peng, Xiang Yuanjiang, Dai Xiaoyu *et al.*. Spatiotemporal instabilities in nonlinear asymmetric oppositely directional coupler with a negative-index metamaterial channel [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(4): 0419001  
易鹏, 项元江, 戴小玉等. 含负折射介质的反向定向耦合器的时空不稳定性研究[J]. *光学学报*, 2012, **32**(4): 0419001
- 26 Wen Shuangchun, Dai Xiaoyu, Xiang Yuanjiang. Research advances in nonlinear optics of metamaterials [J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(6): 803~810  
文双春, 戴小玉, 项元江. 超常介质非线性光学研究进展[J]. *中国激光*, 2008, **35**(6): 803~810
- 27 Cui Weina, Zhu Yongyuan, Li Hongxia *et al.*. Dark solitons and their head-on collisions in nonlinear metamaterials [J]. *Phys. Lett. A*, 2009, **374**(2): 380~385
- 28 P. Li, R. Yang, Z. Xu. Gray solitary-wave solutions in nonlinear negative-index materials [J]. *Phys. Rev. E*, 2010, **82**(4): 046603
- 29 X. Zhong, T. Tang, A. Xiang *et al.*. Modulation instability in negative refractive metamaterials with exponential saturable nonlinearity and self-steepening effects [J]. *Opt. Commun.*, 2011, **284**(19): 4727~4731
- 30 R. Yang, Y. Zhang. Exact combined solitary wave solutions in nonlinear metamaterials[J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2011, **28**(1): 123~127