量子噪声和非线性色抽运噪声共同驱动下单模激光的锁相

张 莉[1,2] 元秀华[1]

[1]华中科技大学光电子科学与工程学院，湖北 武汉 430074
[2]中南民族大学生物医学工程学院，湖北 武汉 430074

摘要 建立了一个由量子噪声和非线性色抽运噪声共同驱动下的单模激光立方模型，并将其在极坐标下分解为场幅和相位的朗之万方程(LE)。采用近似福克-普朗克方程的方法处理相位朗之万方程中的色噪声，使其马尔科夫化。将马尔科夫化后的相位朗之万方程与锁相条件相结合，得到稳定锁相值。详细讨论了量子噪声实虚部间的关联和抽运噪声实虚部间的关联对激光锁相的影响。结果表明激光锁相由量子噪声实虚部之间的关联引起，而抽运噪声实虚部间的关联和量子噪声实虚部间的关联均可改变这一锁相。

关键词 激光光学；锁相；关联噪声；非线性抽运噪声

中图分类号 TN20 **文献标识码** A **doi**：10.3788/CJL201239.0702005

Phase-Locked of Single-Mode Laser Driven by Quantum Noise and Nonlinear Colored Pump Noise

Zhang Li[1,2] Yuan Xiuhua[1]

[1] *College of Optoelectronic Science and Engineering，Huazhong University of Science and Technology，Wuhan，Hubei* 430074，*China*
[2] *College of Biomedical Engineering，South-Central University for Nationalities，Wuhan，Hubei* 430074，*China*

Abstract A cubic model of single-mode laser driven by quantum noise and nonlinear colored pump noise is founded，and the model is divided into amplitude Langevin equation (LE) and phase LE in polar coordinate. The approximate Fokker-Planck equation method is adopted to process the colored noise of phase LE，which makes the colored noise a Markovian process. Combined the equivalent phase LE which has been Markovian with phase locked conditions，the stable phase locked value is obtained. The effects of cross-correlation between the real and imaginary parts of pump noise and quantum noise on phase locked of single mode laser are discussed. Results reveal that the phase locked of laser is induced by the cross-correlation between the real and imaginary parts of quantum noise. However，the change of phase locked arises from the cross-correlation between the real and imaginary parts of pump noise or quantum noise.

Key words laser optics；phase locked；correlated noise；nonlinear pump noise

OCIS codes 140.3430；270.2500；000.5490

1 引 言

近 20 年激光系统中光场的涨落，引起了研究者们越来越多的关注[1~7]。光场的涨落大致以两种形式的噪声表现：一种是源于外界随机扰动的抽运噪声，另一种是源于自发辐射的量子噪声。在研究噪声间的关联对激光统计性质的影响时，通常只考虑

收稿日期：2012-01-13；**收到修改稿日期**：2012-03-19

基金项目：国家自然科学基金(61103248)资助课题。

作者简介：张 莉(1972—)，女，博士研究生，主要从事量子光学中的涨落和噪声、非平衡态统计物理、非线性系统的随机动力学等方面的研究。E-mail：zhangli1996@163.com

导师简介：元秀华(1957—)，博士，教授，主要从事光通信光电检测、光纤传感技术等方面的研究。
E-mail：yuanxh@mail.hust.edu.cn

抽运噪声与量子噪声间的关联[8,9]。直到1996年，周晓平等[10]提出在一个复光场中，复量子噪声的实部与虚部间可能存在关联。随后张莉等[11~14]发现在这种关联机制下，研究系统的统计性质能更好地符合实验结果。他们所导出的激光场幅方程覆盖了Fox等[15]提出的激光场幅方程，并指出量子噪声实虚部关联是导致激光锁相的原因。接下来为了研究抽运噪声实虚部间的关联效应，张莉等[16~18]又将非线性抽运噪声引入到激光系统，成功地建立了含有抽运噪声实虚部间关联系数的激光光场的朗之万方程(LE)。然而上述工作却仅仅局限于激光光场幅的统计特性研究，激光系统中抽运噪声实部与虚部间的关联对光场相位的影响，特别是对激光锁相的影响却至今未见报道。

本文研究抽运噪声实部虚部间的关联对激光锁相的影响。首先引入非线性色抽运噪声到激光理论，在此基础上表述模型，并将激光复电场 $E(E=r\exp(\mathrm{i}\varphi)$，$r$ 为光场幅，φ 为激光场的周相) 的LE分解为 r 和 φ 的LE；然后将曹力等[19,20]提出的非线性外噪声驱动系统的近似福克-普朗克方程(AFPE)的理论方法用到本文模型，即处理既有非线性外噪声(这里就是非线性抽运噪声)又有加法量子噪声驱动的激光系统，得到 φ 的AFPE，使 φ 的LE马尔科夫化；最后研究激光场的锁相。结果发现激光锁相由量子噪声实部与虚部之间的关联引起，抽运噪声实虚部间的关联和量子噪声实虚部间的关联均可改变这一锁相，因而可以分别利用抽运噪声或量子噪声实虚部间的关联实现对单模激光锁相的控制。

2　模　　型

单模激光立方模型为

$$\dot{E}=aE-A|E|^2E+[\xi^2(t)+2b\xi(t)]E+q(t),\tag{1}$$

式中 a,b 和 A 均为实数，a 是净增益系数，$b^2=a$，A 是自饱和系数。$q(t)$，$\xi(t)$ 分别代表复量子噪声和复色抽运噪声，$[\xi(t)^2+2b\xi(t)]E$ 为非线性抽运噪声项。考虑到一个复噪声的实部和虚部起源于同一个噪声源，因而复噪声的实部和虚部在某些情况下可能相互关联。设量子噪声 $q(t)$ 与抽运噪声 $\xi(t)$ 不关联，但 $q(t)$ 的实部虚部以及 $\xi(t)$ 的实部虚部各自关联，其统计性质为

$$\langle q(t)\rangle=\langle\xi(t)\rangle=0,\tag{2}$$

$$\langle q_i(t)q_j(t')\rangle=[\delta_{ij}+\lambda_q(1-\delta_{ij})]D\delta(t-t'),\tag{3}$$

$$\langle\xi_i(t)\xi_j(t')\rangle=[\delta_{ij}+\lambda_p(1-\delta_{ij})]\times\frac{Q}{\tau}\exp(-|t-t'|/\tau),\tag{4}$$

$$\langle q_i(t)\xi_j(t')\rangle=0.\tag{5}$$

式中 $i,j=I,R$，而 I,R 分别代表噪声的实部和虚部。λ_q，λ_p 分别为量子噪声和抽运噪声实虚部间的关联系数，$|\lambda_q|\leqslant 1$，$|\lambda_p|\leqslant 1$。D 为量子噪声强度，Q 为抽运噪声强度，τ 为色抽运噪声自相关时间。

将朗之万方程(1)用极坐标表示为$[E=r\exp(\mathrm{i}\varphi)]$，得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=ar-Ar^3+\eta_r(t)r+\varepsilon_r(t),\tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\eta_\varphi(t)+\frac{\varepsilon_\varphi(t)}{r},\tag{7}$$

式中

$$\eta_r(t)=\xi_R^2(t)-\xi_I^2(t)+2b\xi_R(t),\tag{8}$$

$$\eta_\varphi(t)=2\xi_R(t)\xi_R(t)+2b\xi_I(t),\tag{9}$$

$$\varepsilon_r(t)=q_I(t)\sin\varphi+q_R(t)\cos\varphi,\tag{10}$$

$$\varepsilon_\phi(t)=q_I(t)\cos\varphi-q_R(t)\sin\varphi.\tag{11}$$

3　锁　　相

由于(7)式中 $\langle\varepsilon_\varphi(t)\rangle\neq 0$，$\langle\eta_\varphi(t)\rangle\neq 0$，故将 $\varepsilon_\varphi(t)$ 和 $\eta_\varphi(t)$ 重写成[21]

$$\varepsilon_\varphi(t)=-\frac{D}{2r}\lambda_q\cos 2\varphi+\tilde{\varepsilon}_\varphi(t),\tag{12}$$

$$\eta_\varphi(t)=2\lambda_p\frac{Q}{\tau}+\tilde{\eta}_\varphi(t),\tag{13}$$

式中 $\tilde{\varepsilon}_\varphi(t)$ 和 $\tilde{\eta}_\varphi(t)$ 是具有零平均的纯噪声，并具有关联形式：

$$\langle\tilde{\varepsilon}_\varphi(t)\tilde{\varepsilon}_\varphi(t')\rangle=D(1-\lambda_q\sin 2\varphi)\delta(t-t'),\tag{14}$$

$$\langle\tilde{\eta}_\varphi(t)\tilde{\eta}_\varphi(t')\rangle=4(1+\lambda_p^2)\frac{Q^2}{\tau^2}\exp\left(-\frac{2|t-t'|}{\tau}\right)+4b^2\lambda_p\frac{Q}{\tau}\exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right),\tag{15}$$

将(12)和(13)式代入(7)式，得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\frac{D}{2r^2}\lambda_q\cos\varphi+2\lambda_p\frac{Q}{\tau}+\frac{\tilde{\varepsilon}_\varphi(t)}{r}+\tilde{\eta}_\varphi(t).\tag{16}$$

这一LE的特点是：(7)式中的 $\varepsilon_\varphi(t)$ 及 $\eta_\varphi(t)$ 的非零平均部分在(16)式中表现为漂移项，而零平均的 $\tilde{\varepsilon}_\varphi(t)$ 及 $\tilde{\eta}_\varphi(t)$ 为纯噪声驱动项。从(16)式可看出，正是由于 λ_q 的存在，激光光场的周相 φ 将锁定在由(16)式确定的稳定定态上。为了确定 φ 的稳定锁相值，首先需对(16)式取马尔科夫近似。这是因为 $q(t)$ 虽是白噪声，但 $\xi(t)$ 是ornstein-uhlenbeck(O-U)噪声，因此由(16)式支配的 φ 经历的是非马尔科夫过程。如何对过

程(16)式进行马尔科夫化，得到(16)式在马尔科夫近似下的φ的LE呢？由于$\tilde{\eta}_{\varphi}(t)$代表非线性噪声项，通常的统一色噪声近似或小$\tau$小$D$近似等皆不能用，故采用文献[19]关于非线性外噪声驱动系统有效福克-普朗克方程(FPE)的理论方法，处理既有非线性抽运噪声又有加法量子噪声的情形，将(16)式转化为AFPE。经此马尔科夫近似后，就可得到与之等效的白噪声驱动的φ的LE，再根据所得到的φ的LE，结合锁相条件，确定稳定锁相值。

3.1 马尔科夫化

在小涨落近似下，(16)式中的r可取确定论定态值$r_0=\sqrt{a/A}$。根据文献[19]，可以得到与(16)式对应的AFPE：

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\varphi,t)=-\frac{\partial}{\partial\varphi}K_1(\varphi)P(\varphi,t)+\frac{\partial^2}{\partial^2\varphi}K_2(\varphi)P(\varphi,t), \tag{17}$$

式中

$$K_1(\varphi)=-\frac{D}{2r_0^2}\lambda_q\cos 2\varphi+2\lambda_p\frac{Q}{\tau}, \tag{18}$$

$$K_2(\varphi)=\frac{D}{r_0^2}(1-\lambda_q\sin 2\varphi)+2(1+\lambda_p^2)\frac{Q^2}{\tau}+4b^2\lambda_p Q, \tag{19}$$

从而写出与AFPE(17)式等价的φ的LE：

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{D}{2r_0^2}\lambda_q\cos 2\varphi+2\lambda_p\frac{Q}{\tau}+f\Gamma(t), \tag{20}$$

式中$\Gamma(t)$为高斯白噪声，其统计性质为

$$\langle\Gamma(t)\rangle=0, \tag{21}$$

$$\langle\Gamma(t)\Gamma(t')\rangle=\delta(t-t'), \tag{22}$$

而

$$f=\left[\frac{D}{r_0^2}(1-\lambda_q\sin 2\varphi)+2(1+\lambda_p^2)\frac{Q^2}{\tau}+4b^2\lambda_p Q\right]^{1/2}. \tag{23}$$

3.2 稳定锁相值 φ_{sL}

(20)式表明当量子噪声实部与虚部间的关联$\lambda_q\neq 0$和抽运噪声实部与虚部间的关联$\lambda_p\neq 0$时，存在一个相位回复力$\left(-\frac{D}{2r_0^2}\lambda_q\cos 2\varphi+2\lambda_p\frac{Q}{\tau}\right)$，它将导致场相位的锁定。根据锁相的条件$\langle d\varphi/dt\rangle=0$，由(20)式得

$$\lambda_q\cos 2\varphi_L=4\lambda_p\frac{a}{A}\frac{Q}{\tau D}, \tag{24}$$

同时，稳定锁相值φ_{sL}还必须满足[22]

$$\frac{\partial\langle(d\varphi)/(dt)\rangle}{\partial\varphi}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\langle[f\Gamma(t)]^2\rangle<0, \tag{25}$$

由(25)式和(20)～(23)式导出

$$\lambda_q\sin 2\varphi_s>0. \tag{26}$$

故同时满足(24)和(26)式的φ_{sL}为稳定锁相值。

3.3 讨 论

1) 由(24)式知，$\cos 2\varphi_{sL}=4\frac{\lambda_p}{\lambda_q}\frac{a}{A}\frac{Q}{\tau D}$，故当$\lambda_p\neq 0$和$\lambda_q\neq 0$时，对给定的$\lambda_q$，当$|\lambda_p|$值超过$\lambda_c=\frac{|\lambda_q|A\tau D}{4aQ}$时，$|\cos 2\varphi_{sL}|>1$，锁相被解除，激光回归到相位的自由扩散，可利用这一特点对单模激光的锁相进行控制。

2) (24)式和(26)式是稳定锁相的充要条件，同时满足这两式的φ_{sL}为稳定锁相值。联合(24)式和(26)式得到$4\lambda_p\frac{a}{A}\frac{Q}{\tau D}\tan 2\varphi_{sL}>0$，故当抽运噪声实部虚部间的关联系数$\lambda_p>0$(正关联)时，并综合1)的结果，得到只有当$0<\lambda_p<\lambda_c$时，激光相位将被锁定，并锁定在$\frac{k\pi}{2}<\varphi_{sL}<\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{4}\pi$的范围。而当抽运噪声实部虚部间的关联系数$\lambda_p<0$(负关联)和$\lambda_p>-\lambda_c$时，即$-\lambda_c<\lambda_p<0$，激光相位被锁定，并锁定在$\frac{k\pi}{2}-\frac{1}{4}\pi<\varphi_{sL}<\frac{k\pi}{2}$的范围。

3) 作为一个重要特例，当$\lambda_p=0$，$\lambda_q\neq 0$时，由(24)式得$\cos 2\varphi_{sL}=0$，代入(26)式，得

$$\lambda_q\sin 2\varphi_{sL}=|\lambda_q|, \tag{27}$$

此时稳定锁相值回到文献[11]的结果。由此可见，在锁相问题上，只要抽运噪声实部虚部不关联，锁相的规律就和未考虑抽运噪声的文献[11]的结果相同。说明激光锁相由量子噪声实部虚部之间的关联λ_q引起，而抽运噪声实虚部间的关联和量子噪声实虚部间的关联均可改变这一锁相值。

4) 当$\lambda_q=0$时，即量子噪声的实部与虚部间不存在关联，从φ的LE(20)式可看出，激光场的相位自由扩散。

5) 由于稳定锁相条件(24)式和(26)式中，没出现(1)式中反映线性抽运噪声的系数b，故线性抽运噪声对激光锁相不产生影响，只有当抽运噪声为非线性噪声时，抽运噪声的实部与虚部间的关联系数λ_p才能改变激光锁相。

4 结 论

研究了抽运噪声实部虚部间的关联系数λ_p和量子噪声实部虚部间的关联系数λ_q对激光锁相的影响。结果表明，激光锁相是由量子噪声实部虚部

之间的关联系数 λ_q 引起，即无论抽运噪声实部虚部是否关联，仅当 $\lambda_q \neq 0$ 时，激光的相位才会被锁定的一个稳定值；当抽运噪声为非线性噪声时，抽运噪声实虚部间的关联系数 λ_p 与量子噪声实虚部间的关联系数 λ_q 一样，均可改变锁相值；当 $-\lambda_c < \lambda_p < 0$ 时，相位锁定在 $\frac{k\pi}{2} - \frac{1}{4}\pi < \varphi_{sL} < \frac{k\pi}{2}$ 的范围，当 $0 < \lambda_p < \lambda_c$ 时，相位锁定在 $\frac{k\pi}{2} < \varphi_{sL} < \frac{k\pi}{2} + \frac{1}{4}\pi$ 范围。

参　考　文　献

1 S. Hofferberth, I. Lesanovsky, T. Schumm *et al*.. Probing quantum and thermal noise in an interacting many-body system [J]. *Nature Physics*, 2008, **4**: 489～495

2 Y. Jia, J. R. Li. Reentrance phenomena in a bistable kinetic model driven by correlated noise[J]. *Phys. Rev. Lett*., 1997, **78**(6): 994～997

3 L. Cao, D. J. Wu. Cross-correlation of multiplicative noise and additive noise in a single-mode laser white-gain-noise model and correlated noises induced transitions[J]. *Phys. Lett. A*, 1999, **260**(1-2): 126～131

4 F. Rana, R. J. Ram. Photon noise and correlations in semiconductor cascade lasers[J]. *Appl. Phys. Lett*., 2000, **76**(9): 1083～1085

5 Chen Xinglin, Zheng Yanhong, Wang Yan. Influence of spot noise in inter-satellite optical communications and suppression algorithm[J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(3): 743～747
陈兴林，郑燕红，王　岩. 光斑噪声对星间光通信的影响及抑制算法[J]. 中国激光, 2010, **37**(3): 743～747

6 Xu Jiancheng, Wang Hui, Chai Liqun *et al*.. Technique of ring source for reducing coherent noise[J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(12): 3081～3085
徐建程，王　辉，柴立群 等. 抑制相干噪声的环形光源技术[J]. 中国激光, 2010, **37**(12): 3081～3085

7 Qian Xiaofan, Rao Fan, Lin Chao *et al*.. Speckle noise reduction algorithm based on principle of shearing interferometry[J]. *Chinese J. Lasers*, 2011, **38**(7): 0708003
钱晓凡，饶　帆，林　超 等. 基于剪切干涉原理的散斑噪声降噪算法[J]. 中国激光, 2011, **38**(7): 0708003

8 A. Fulinski, T. Telejko. On the effect of interference of additive and multiplicative noises[J]. *Phys. Lett. A*, 1991, **152**(1-2): 11～14

9 A. J. R. Madureira, P. Jung, P. Hanggi. Dye laser with pump noise and quantum noise[J]. *Phys. Rev. A*, 1996, **54**(1): 755～759

10 X. P. Zhou, W. J. Gao, S. Q. Zhu. Fluctuations in a nonlinear laser field with coupling of additive noise terms[J]. *Phys. Lett. A*, 1996, **214**(3-4): 131～138

11 L. Zhang, L. Cao, D. J. Wu. Effect of the cross-correlation between the real and imaginary parts of quantum noise in the transient properties of single-mode laser[J]. *Phys. Lett. A*, 2003, **309**(1-2): 29～38

12 L. Zhang, L. Cao, D. J. Wu. The research of single-mode laser driven by multiplicative colored noise with cross-correlation between the real and imaginary parts of quantum noise[J]. *Physica A*, 2004, **332**: 207～218

13 S. Z. Ke, L. Cao, D. J. Wu *et al*.. Stationary properties in a single-mode laser with cross-correlation between quantum noise terms[J]. *Phys. Lett. A*, 2001, **281**(2-3): 113～118

14 S. Z. Ke, L. Cao, D. J. Wu *et al*.. Numerical analysis of the effects of cross-correlated quantum noise terms in a single-mode laser[J]. *Phys. Lett. A*, 2005, **344**(2): 91～96

15 R. F. Fox, R. Roy. Steady-state analysis of strongly colored multiplicative noise in a dye laser[J]. *Phys. Rev. A*, 1987, **35**(4): 1838～1842

16 L. Zhang, L. Cao, D. J. Wu. Steady-state analysis of a single-mode laser with cross-correlation between the real and imaginary parts of pump noise[J]. *Physica A*, 2006, **363**(2): 181～186

17 L. Zhang, L. Cao. Dynamical properties of single-mode laser driven by quadratic pump noise[J]. *Chin. Phys. Lett*., 2007, **24**(2): 436～439

18 L. Zhang. Stochastic resonance in a single-mode laser driven by quadratic pump noise and amplitude-modulated signal[J]. *Chin. Phys. B*, 2009, **18**(4): 1389～1393

19 L. Cao, D. J. Wu, H. X. Wan. Theory of nonlinear external noise[J]. *Phys. Lett. A*, 1988, **133**(9): 476～482

20 P. Hanggi, P. Jung. Colored noise in dynamical systems[J]. *Adv. Chem. Phys*., 1995, **89**: 239～326

21 M. Sargent III, M. O. Scully, W. E. Lamb Jr. Laser Physics [M]. Indianapolis: Addison-Wesley, 1974. 319～342

22 Q. Long, L. Cao, D. J. Wu *et al*.. Phase lock and stationary fluctuations induced by correlation between additive and multiplicative noise terms in a single-mode laser[J]. *Phys. Lett. A*, 1997, **231**(5-6): 339～343

栏目编辑：宋梅梅