基于改进遗传算法双重约束的 FBG 应变分布 重构研究

王 静^{1,2} 王正方¹ 隋青美^{1*} 施 dd^2 冯德军³ 陈 宵¹ 苗 飞¹ 贾 磊¹ 曹玉强¹

[1山东大学控制科学与工程学院,山东 济南 250061]

²南京大学地球科学与工程学院,江苏南京 210093

³山东大学信息科学与工程学院,山东 济南 250100

摘要 光纤布拉格光栅(FBG)已广泛应用于应变参数测量中,但非均匀应变易引起 FBG 光谱变形而无法进行波长检测,因此需重构沿 FBG 的应变分布。针对应变分布重构效果差且收敛速度慢的难题,在深入研究改进遗传算法的基础上,提出基于 FBG 光谱中心波长位置与反射率双重约束的应变分布重构理论,显著改善了重构的非唯一性和置信度。同时,假设应变分布为多项式形式,通过对多项式系数的重构实现应变分布的重构,大大提高了重构的速度。在此基础上开展了应变分布参数重构仿真实验,多项式系数重构误差均小于1.5%;结合两端固定压杆调谐光纤光栅实验,验证了该应变分布重构方法的有效性、适用性和可操作性,形成了一种快速有效的应变分布重构方法。 关键词 光栅;中心波长;反射率;双重约束;应变分布重构

中图分类号 TN253 文献标识码 A doi: 10.3788/CJL201239.0305004

Study of FBG Strain Distribution Reconstruction Based on Improved Genetic Algorithm Dual Constraint

Wang Jing^{1,2} Wang Zhengfang¹ Sui Qingmei¹ Shi Bin² Feng Dejun³ Chen Xiao¹ Miao Fei¹ Jia Lei¹ Cao Yuqiang¹

¹ School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan, Shandong 250061, China

² School of Earth Science and Engineering, Nanjing University, Nanjing, Jiangsu 210093, China

 3 School of Information Science and Engineering, Shandong University, Jinan, Shandong 250100, China $\}$

Abstract Optical fiber Bragg grating (FBG) has been widely used to detect strain. Nevertheless, uneven strain is easy to cause deformation of FBG spectrum, which will result in the invalidation of wavelength detection. Therefore, it is necessary to reconstruct the strain along FBG. In response to that traditional strain distribution reconstruction theory both have poor effect and slow convergence speed, strain distribution reconstruction theory based on FBG central wavelength and reflectivity of spectrum dual constraint is presented after deep research on improved genetic algorithm, which significantly improves the non uniqueness and the confidence of reconstruction. At the same time, assuming distribution of strain is polynomial, reconstruction of strain distribution reconstruction. And then strain parameters reconstruction numerical simulation experiments are comprehensively carried out, and the errors of the reconstructing polynomial coefficients are all less than 1.5%. Through tuning FBG by two ends fixed compression bar experiment, the validity, applicability and practicability of the novel reconstructing method have been verified. Consequently, a novel method of reconstructing strain distribution which is fast and efficient has been generated. **Key words** gratings; central wavelength; reflectivity; dual constraint; strain distribution reconstruction **OCIS codes** 050.2770; 060.2370; 060.2300; 350.2770

收稿日期: 2011-11-18; 收到修改稿日期: 2011-12-12

基金项目:国家 973 计划(2007CB209407,2011CB710605)资助课题。

作者简介:王 静(1983—),女,博士后,主要从事新型光纤传感器技术及其应用等方面的研究。

E-mail: wangjing329@mail.sdu.edu.cn

* 通信联系人。E-mail: qmsui@sdu.edu.cn

1 引 言

光纤布拉格光栅(FBG)传感器具有体积小、精 度高、本征无源等特点[1~4],已被广泛应用于大型结 构工程、电力和冶金等行业的关键参数检测中[5~8], 尤其在应变检测中应用的最为广泛。在应变检测中 当 FBG 应变传感器的尺寸远小干被测物体的尺寸 或者被测场的变化梯度较小时,在传感器长度范围 内被测参数变化很小,可认为传感器测量的是均匀 参量,此时传感器的光谱形状基本不变,可以根据布 拉格光栅中心波长的漂移确定被测参数的变化情 况^[9];但是当被测场变化梯度较大时,在传感器长度 范围内应变分布是非均匀的,则传感器的反射光谱 形状也会随之发生变化,所以仅通过测量传感器中 心波长的漂移进行应变测量将会造成测量结果精度 低,甚至引起测量数据失效^[10,11]。因此,需通过分 析 FBG 的光谱来重构其轴向的非均匀应变分布情 况,有效剔除啁啾效应的影响,以提高光纤光栅测量 的有效性与测量精度。

目前,国内外很多专家进行应变分布参数重构 理论方法的研究,大多采用遗传算法、模拟退火算 法、自适应退火算法、粒子群优化算法等智能算 法^[12~16],且大多采用对应波长处计算光谱与目标光 谱反射率差别的P范数作为目标函数^[17],同时将应 变沿空间分成多个小单元^[18],以上研究在光栅本征 参数重构与应变分布重构中取得了令人满意的结 果,有效实现了非均匀应变的分布式测量,尤其在计 算光谱与目标光谱反射峰位置较接近或重合情况下 效果更佳。但在实际工程中,在光栅长度范围内应 变分布基本不会产生突变,应变分布几乎都可以用 三次多项式函数进行拟合,因此仅重构三次多项式 的四个系数即可实现应变分布的重构。而将沿光栅 的应变分布离散化,再将每段光栅上的应变作为一 个参数,重构的参数将增至几十个甚至上百个,严重 降低了应变分布重构的计算速度与计算精度^[19]。

基于上述讨论与分析,本文提出了一种应变分 布重构的新方法——基于 FBG 中心波长位置与反 射率双重约束的应变分布参数重构理论及方法,采 用改进的遗传算法(GA)进行应变分布系数的重构。

2 应变分布重构原理

2.1 改进遗传算法

遗传算法是目前应用较为广泛的一种优化算法,力图在自然特性的基础上模拟个体种群的适应性,并采用一定的变换规则通过搜索空间求解,并可 采用初始群体近似均布产生、最优保存策略、变异与 交叉概率自适应调整等一系列改进方法对遗传算法 进行改进,有效提高遗传算法的局部搜索能力和后 期优化速度。

在应变分布重构过程中首先采集 FBG 的光谱 数据,并输入目标观测参数(应变分布函数的系数) 范围,获得应变分布系数的初始种群。采用 FBG 应 变传感模型进行正向计算,得出理论观测参数,对理 论观测参数与目标观测参数进行比较,进而得出目 标函数值,输出本代计算的最优本征参数与最优计 算光谱,并执行最优保存策略。依次进行选择、交 叉、变异等操作,直至总的误差范围小于一个足够小 的数或者"进化"代数超出设定范围,最终取得最优 的计算光谱与对应的最优应变分布系数。该过程如 图 1 所示。



图 1 FBG 应变分布重构流程图

Fig. 1 Flow chart of FBG strain distribution reconstruction

由于重构参数是在给定区间范围内随机生成 的,并且参数区间范围较大,致使参数重构初期部分 个体与目标值有较大的差别。若仅采用计算光谱与 目标光谱反射率之差作为进化选择的唯一标准,无 法全面客观地评价重构参数的优劣,导致重构过程 中无法实现对优良参数的搜索和优选,大大影响了 重构效果。

2.2 基于双重约束的应变分布重构理论

提出了基于中心波长位置与反射率双重约束的 应变分布重构理论,同时采用基于 FBG 光谱反射率 与中心波长的差异作为目标函数,二者共同决定应 变参数的"进化"过程,二者在选择中的作用通过权 值来控制。该目标函数可表示为

$$E(R) = \sqrt{\sum_{m} [R_{\text{cale}}(\lambda_{m}, a, b, c, d) - R_{\text{targ}}(\lambda_{m})]^{2}} + w |\lambda_{\text{cacl}} - \lambda_{\text{targ}}|, \qquad (1)$$

式中E为目标函数, R_{calc} 与 R_{targ} 分别为FBG 计算光 谱与目标光谱的反射率函数,λ_{calc} 与λ_{targ} 分别为计算 光谱与目标光谱的中心波长,m为传输矩阵法中光 栅的段数, w 为权值。假设荷载沿光栅呈三次函数分 布,a、b、c、d 分别代表应变分布函数的常数项、一次 项、二次项与三次项系数。

(1)式的物理意义可以用图 2 的形式来表达。 D_R 表征重构光谱与目标光谱的反射率"距离",在文 中用重构光谱与目标光谱的反射率之差的平方和表 示;D₄ 表征重构光谱与目标光谱的中心波长"距 离",用重构光谱与目标光谱的中心波长之差的绝对 值表示。将 D_{R} 与 D_{λ} 的加权之和作为目标函数,实 现了 FBG 反射率与中心波长的双重约束(增加了中 心波长约束),不仅有利于改善应变分布参数的重构 精度与置信度,而且有利于提高重构效率。

通过调节权值w可以有效调节反射率与中心

1.0

0.8

0.7

0.5

0.40.3

0.20.1n

1549.0

Reflectivity 0.6

(a) 0.9



图 2 反射率与中心波长约束目标函数示意图 Fig. 2 Sketch of target function constrained by

refractive index and central wavelength 波长在目标函数中的作用。当计算光谱与目标光谱 的中心波长接近时可以使 w 取较小的值,当计算光 谱与目标光谱的中心波长差别较大时可以使 w 取 较大的值,进而使得在应变重构过程中更为有效地 选择最优个体。

应变分布重构仿真实验 3

根据施加荷载后 FBG 的反射谱对应变的分布 系数进行重构。假设光栅轴向沿z方向,光栅起始 端坐标为 0,同时令种群个数为 40,进化代数上限为 100,光栅分段数为 50,目标函数的波长调节权值 w 为2×10⁸,对三次函数分布系数进行了重构。

3.1 均匀应变荷载

令应变分布的常数项 a 为 0.001,即荷载为 1000 με 的均匀应变时,采用三次多项式对该应变分 布进行重构,仿真计算所得原始光谱与重构光谱如 图 3(a)所示,施加的原始应变函数与重构的应变函 数如图 3(b)所示。





Fig. 3 Reconstructing conclusions when strain is 1000 $\mu\epsilon$. (a) Spectrum; (b) strain

由图 3 可以看出,重构光谱与原始光谱吻合得 很好,并且原始应变与重构应变函数也基本重合,应 变最大误差为 2.376 με,均方根误差为1.092 με。 说明采用该应变分布重构方法能很好实现均匀应变 荷载下应变分布的重构。

1550.0

3.2 线性分布应变荷载

令应变分布函数的一次项系数为 0.4, 即光栅 末端所受应变最大为 4000 με 的线性应变时,采用 三次多项式对该应变分布进行重构,仿真计算所得 原始光谱与重构光谱如图 4(a)所示,施加的原始应





Fig. 4 Reconstructing conclusions when strain is 0.4z. (a) Spectrum; (b) strain

仿真实验结果表明,线性分布的应变荷载条件 下重构光谱与原始光谱吻合得很好,并且原始应变 与重构应变函数也基本重合,应变最大误差为 4.641 με,均方根误差为 2.092 με。说明采用该应 变分布重构方法能很好地实现线性应变荷载条件下 应变分布的重构。

3.3 二次函数分布应变荷载

令应变分布函数的二次项系数为40而其他各 项系数为0时,光栅所受应变沿光栅轴线方向逐渐

令沿光栅的应变分布为 $\epsilon(z) = 500z^3 + 10z^2 +$

增大,并且应变梯度也随之增大,光栅末端所受应变 最大为4000 $\mu \varepsilon$ 。仍采用三次多项式对该应变分布 进行重构,仿真计算所得原始光谱与重构光谱如 图 5(a)所示,重构光谱与原始光谱的主峰及其他谐 振峰都非常吻合。施加的原始应变与重构应变如 图 5(b)所示,重构应变的最大误差为3.898 $\mu \varepsilon$,均 方根误差为2.194 $\mu \varepsilon$ 。数值仿真结果显示采用该应 变分布重构方法仍能实现二次函数分布应变荷载的 精确重构。



图 5 应变分布为 40z² 时的重构结果。(a)光谱图;(b)应变分布

Fig. 5 Reconstructing conclusions when strain is $40z^2$. (a) Spectrum; (b) strain

3.4 三次多项式分布应变荷载

0.2z+0.001, 仿真计算所得原始光谱与重构光谱如 图 6(a) 所示, 原始应变与重构应变的对比曲线如



图 6 应变分布为三次函数时的重构结果。(a)光谱图;(b)应变分布

Fig. 6 Reconstructing conclusions for cubic polynomial load. (a) Spectrum; (b) strain

图 6(b)所示,重构应变的最大误差为 6.526 με,均 方根误差为 3.241 με。其原始应变与重构应变的分 布系数及误差分析如表 1 所示。由表 1 可以看出, 应变分布系数重构的误差均小于 1.5%,因此采用 该应变重构方法可以很好地实现应变系数的重构。

表1 原始应变与重构应变分布系数的对比

Table 1Correlation table of primary strain distributionand reconstructing strain distribution coefficient

	а	b	С	d
Origin parameter	0.001000	0.200	10.000	500.000
Reconstruction parameter	0.001002	0.203	9.898	500.823
Error / %	0.2	1.5	1.02	0.16

对应变参数重构过程中每代的最优目标函数进行了详细的研究与分析,如图 7 所示。数值实验结 果表明最优目标函数值随着进化代数的增加逐渐减 小,从 0.076 降低至 0.015。进化 24 代以后最优目 标函数值变化很小,当进化至 40 代时最优目标函数 值降低至 0.011,已经能够满足应变分布重构的要求。





3.5 不同分布形式应变重构实验对比分析

应变分布形式不同时,其应变重构误差也不同, 如表 2 所示。实验结果表明,应变分布重构误差与 重构系数的数量及 FBG 的啁啾程度有关。重构系 数越少,误差越小,因此在误差允许范围内,拟合应 变分布的多项式系数越少越好,不易采用高次多项 式。同时,FBG 的啁啾程度越高,目标光谱越复杂, 应变重构的误差越大。

表 2 不同分布形式应变重构的误差对比 Table 2 Correlation table of different distribution

strain reconstructing errors

Strain distribution	1000 με	0.4z	$40z^{2}$	$500z^{3} + 10z^{2} + 0.2z + 0.001$
Maximum error /με	2.376	4.641	3.898	6.526
Rms error $/\mu\epsilon$	1.092	2.092	2.194	3.241

与文献[12]的实验结果相比,基于 FBG 光谱中 心波长位置与反射率双重约束的应变分布重构结果 在收敛速度与重构精度方面都有显著的提高。文献 [12]中采用了混沌遗传算法对不同的应变分布进行 了重构,收敛代数为 500 代,线性应变分布重构的最 大误差为 6.099 με,均方根误差为2.785 με,均大于 本文的4.641 με与 2.092 με。

4 压杆调谐实验

为了研究非均匀应变分布参数重构效果,并验证仿真实验结果,研制了两端固定压杆调谐光纤光 栅实验装置,如图 8 所示。其中压杆为一截面为矩 形的扁平弹性杆,为日本住友有机玻璃材料,其长度 为 20 cm,厚度为 1.5 mm,宽度为 5 mm。可将光栅 贴在压杆的上表面或下表面,将压杆一端固定,另一 端固定在移动平台上,步进电机推动平台沿平行导 轨移动,弹性压杆会弯成类似高斯脉冲的形状。



图 8 FBG 压杆调谐装置。(a)调谐实验示意图;(b)调谐装置实物图

Fig. 8 Compression bar tuning FBG equipment. (a) Tuning experiment; (b) tuning equipment 沿压杆下表面的应变分布可以表示为

$$\varepsilon = d \frac{d^2 \eta(y)}{dy^2} = d \frac{1}{\pi} \sqrt{\Delta Y(Y - \Delta Y)} \left(\frac{2\pi}{Y - \Delta Y}\right)^2 \cos \frac{2\pi y}{Y - \Delta Y}.$$
(2)



$$\delta\lambda_{\rm B} = \lambda_{\rm B} (1 - p_{\rm e}) d \frac{1}{\pi} \times \sqrt{\Delta Y (Y - \Delta Y)} \left(\frac{2\pi}{Y - \Delta Y}\right)^2 \cos \frac{2\pi y}{Y - \Delta Y}.$$
 (3)

(2),(3)式中 $p_e = 0.22, \eta(y)$ 为沿杆任意位置 y 处的挠度,d 为压杆厚度的 $1/2, \Delta Y$ 为移动平台的位移量,Y 为弹性杆的长度^[20]。

从图 9 可以看出弹性压杆的中点处应变最大, 当光纤光栅粘贴在弹性杆的下表面中间位置时,光 纤光栅处于压应变调谐状态。将光栅粘贴在压杆下 表面中点处进行非均匀应变调谐实验。

该光栅的中心波长为 1560.711 nm,反射率为 0.931,3 dB带宽为0.160 nm,并且其栅区长度为



图 9 沿弹性压杆下表面的应变分布



调谐 5 mm 与 20 mm 时,分别对该光栅的光谱 与应变分布进行了重构,所得实际测量光谱与重构 光谱的对比图及理论计算原始应变与重构应变的对 比结果分别如图 10 与图 11 所示。





通过对图 10 与图 11 中实测光谱与重构光谱的 分析可以看出,随着压应变绝对数值的增大及沿光 栅应变差的增大,光栅反射光谱的中心波长逐渐减 小,并且 3 dB 带宽逐渐增大,同时反射率逐渐降低。 由图 10(b)与图 11 (b)可以看出,在光栅的起始端 重构的应变值较大,而在光栅末端重构的应变值较 小,这是由光栅粘贴位置误差引起的。

 $1538.0 \ 1539.0 \ 1540.0 \ 1541.0 \ 1542.0 \ 1543.0 \ 1544.0$

Wavelength /nm

5 结 论

0

2

在研究应变分布重构理论的基础上,提出了基 于 FBG 光谱反射率与中心波长双重约束的应变分 布重构方法,采用改进的遗传算法对应变分布系数 进行重构,并通过调节权值控制二者在选择中作用, 显著改善了重构的非唯一性和置信度。采用该方法 对均匀应变、线性分布应变、二次函数分布应变及三

6

L/mm

4

8

10

12

次多项式分布形式的应变进行了重构,仿真实验结 果表明应变分布系数重构的误差小于1.5%。通过 自行设计的两端固定压杆调谐光纤光栅装置进行非 均匀应变调谐,采用实测的FBG反射光谱进行沿光 栅的应变分布重构,通过对比压杆下表面中点处的 理论应变与重构应变,验证了该应变分布重构方法 的有效性。

参考文献

- 1 Fan Fan, Zhao Jianlin, Wen Xixin *et al.*. Sensitivity analysis on strain sensor based on Fabry-Perot interferometer with intensity interrogation[J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(6): 1525~1531 樊 帆,赵建林,文喜星等.强度解调型光纤光栅法布里-珀罗干涉仪的应变传感灵敏度分析[J]. 中国激光,2010, **37**(6): 1525~1531
- 2 Wang Yiping, Wang Ming, Huang Xiaoqin. Transverse pressure sensor based on the polarization properties of fiber grating[J]. *Chinese J. Lasers*, 2011, **38**(6): 0405004
 汪弋平,王鸣,黄晓琴. 基于光纤光栅偏振特性的横向压力传感器[J]. 中国激光, 2011, **38**(6): 0405004
- 3 Wang Jing, Feng Dejun, Sui Qingmei *et al.*. Study of optical-fiber Bragg grating seepage pressure sensor based on draw-bar structure[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(3): 686~691
 王 静, 冯德军,隋青美等. 基于拉杆结构的光纤光栅渗压传感器研究[J]. 光学学报, 2010, **30**(3): 686~691
- 4 Agostino Iadicicco, Andrea Cusano, Stefania Campopiano et al.. Thinned fiber Bragg gratings as refractive index sensors [J]. IEEE Sensors Journal, 2005, 5(6): 1288~1295
- 5 Y. M. Gebremichael, W. Li, B. T. Meggitt *et al.*. A field deployable, multiplexed Bragg grating sensor system used in an extensive highway bridge monitoring evaluation tests[J]. *IEEE* Sensors Journal, 2005, **5**(3): 510~519
- 6 Mousumi Majumder, Tarun Kumar Gangopadhyay, Ashim Kumar Chakraborty *et al.*. Fibre Bragg gratings in structural health monitoring-present status and applications[J]. *Sensors and Actuators A*: *Physical*, 2009, **147**(1): 150~164
- 7 A. Kerrouche, W. J. O. Boyle, T. Sun *et al.*. Strain measurement using embedded fiber Bragg grating sensors inside an anchored carbon fiber polymer reinforcement pre-stressing rod for structural monitoring [J]. *IEEE Sensors Journal*, 2009, 9(11): 1456~1461
- 8 Meng Ling, Jia Lei, Jiang Mingshun et al.. On-line temperature monitoring systems for aluminum reduction based on fiber Bragg grating[J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators, 2011, 24(2): 204~208

孟 玲, 贾 磊, 姜明顺等.基于光纤光栅的铝电解槽温度在线 检测系统[J].传感技术学报,2011,24(2):204~208

9 Wu Fei, Li Lixin, Li Zhiquan. Theoretical analysis of fiber Bragg grating characterization by applying transverse force[J]. *Chinese* J. Lasers, 2006, 33(4): 472~476 吴 飞,李立新,李志全.均匀光纤布拉格光栅横向受力特性的 理论分析[J].中国激光,2006,**33**(4):472~476

- 10 Turan Erdogan. Fiber grating spectra [J]. J. Lightwave Technol., 1997, 15(8): 1277~1294
- 11 Yun Binfeng, Wang Yiping, Li Anmin *et al.*. Simulated annealing evolutionary algorithm for the fiber Bragg grating distributed strain sensor [J]. *Meas. Sci. Technol.*, 2005, 16(12): 2425~2430
- 12 Zhang Rongxiang, Zheng Shijie, Xia Yanjun. The reconstruction of the of non-uniform strain profile by using chaos genetic algorithm[J]. Journal of Optoelectronics • Laser, 2009, 20(8): 1058~1062

张荣祥,郑世杰,夏彦君.基于混沌遗传算法的非均匀应变分布 重构研究[J].光电子·激光,2009,20(8):1058~1062

13 Mu Kejun, Zhou Xiaojun, Ren Guorong *et al.*. Reconstruction of parameters of fiber gratings from time-delay characteristics using the genetic algorithm [J]. *Chinese J. Lasers*, 2007, **34** (5): 688~693

穆柯军,周晓军,任国荣等.用遗传算法从时延特性重构光纤光 栅参数[J].中国激光,2007,**34**(5):688~693

- 14 P. Dong, J. Azan a, A. G. Kirk. Synthesis of fiber Bragg grating parameters from reflectivity by means of a simulated annealing algorithm [J]. Opt. Commun., 2003, 228 (46): 303~308
- 15 C. Z. Shi, N. Zeng, M. Zhang *et al.*. Adaptive simulated annealing algorithm for the fiber Bragg grating distributed strain sensing[J]. Opt. Commun., 2003, 226: 167~173
- 16 Wei Fuya, Liu Hongwu, Fu Chunlin. Reconstruction of fiber grating parameters from reflectivity using quantum particle swarm optimization algorithm [J]. *Chinese J. Lasers*, 2011, **38**(2): 153~158
 韦芙芽,刘洪武,付春林. 基于量子粒子群优化算法的光纤光栅

市美牙,刈洪武,何春杯.基丁重于粒丁群优化算法的光纤光栅 参数重构[J].中国激光,2011,38(2):153~158

- 17 Federico Casagrande, Paola Crespi, Anna Maria Grassi et al.. From the reflected spectrum to the properties of a fiber Bragg grating: a genetic algorithm approach with application to distributed strain sensing [J]. Appl. Opt., 2002, 41 (25): 5238~5244
- 18 Chen Zhemin, Chen Jun, Shu Ruijun. Simulation and reconstruction for nonuniform strain profile of fiber Bragg grating sensor[J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators, 2006, 19(6): 2439~2444 陈哲敏,陈 军, 舒睿俊. Bragg 光纤光栅传感器内不均匀应力 分布的模拟和重构[J]. 传感技术学报, 2006, 19(6): 2439~2444
- 19 Yun Binfeng, Lü Changgui, Wang Zhuyuan *et al.*. Numiercal analysis of fiber Bragg grating under inhomogeneous strain fields [J]. *Journal of Optoelectronics* • *Laser*, 2006, **17**(2): 151~154 恽斌峰, 吕昌贵, 王著元等. 非均匀应变场中布拉格光纤光栅的 数值分析[J]. 光电子·激光, 2006, **17**(2): 151~154
- 20 Luo Yaogang, Gao Lingxia, Liu Guili. Theory of Materials Mechanics[M]. Beijing: Science Press, 2004 罗跃纲, 高凌霞, 刘贵立. 材料力学[M]. 北京: 科学出版社, 2004

栏目编辑:李文喆