

# 一种超越型激光强度函数及其数值拟合方法

袁文全 巩岩

(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所应用光学国家重点实验室, 吉林 长春 130033)

**摘要** 提出了一种超越型函数, 用来描述激光强度分布, 并给出了这种函数的拟合方法。该超越型函数是基于高斯类分布函数提出的, 并根据多变量寻优的方法, 采用方向搜索法及最小二乘法对该函数进行拟合。计算表明这种超越型函数比高斯类函数更适于描述激光强度分布; 且在算法方面, 采用方向搜索法的时间复杂度  $[O(\sum_{i=1}^4 N_i)]$  也较传统枚举法的时间复杂度  $[O(\prod_{i=1}^4 N_i)]$  有显著降低。

**关键词** 激光光学; 强度分布; 超越函数; 多变量寻优; 最小二乘法; 最陡下降法; 方向搜索法

**中图分类号** TN248; TN305.7 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201239.0302004

## A Transcendental Laser Intensity Function and Its Numerical Fitting Method

Yuan Wenquan Gong Yan

(State Key Laboratory of Applied Optics, Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun, Jilin 130033, China)

**Abstract** A transcendental function is proposed to describe laser intensity distribution, and its fitting method is given. The transcendental function which is based on Gaussian distribution function is fitted by multivariable optimization method, concretely by direction search method combined with least square method. The results show that the transcendental function is more suitable than Gaussian distribution function to describe laser intensity distribution; and the time complexity of direction search method  $[O(\sum_{i=1}^4 N_i)]$  is much smaller than that of traditional enumeration method  $[O(\prod_{i=1}^4 N_i)]$ .

**Key words** laser optics; intensity distribution; transcendental function; multivariable optimization; least square method; steepest descent method; direction search method

**OCIS codes** 110.5220; 140.3300; 140.3430

## 1 引言

在大功率激光器、光刻物镜等现代激光仪器中, 由于激光能量对光学元件的加热效应, 使光学元件产生了热变形<sup>[1,2]</sup>、热应力<sup>[3]</sup>, 并由此产生了光学材料的折射率改变<sup>[4,5]</sup>、应力双折射<sup>[6]</sup>、自聚焦效应<sup>[7]</sup>等各种热透镜效应。这类热透镜效应严重影响了光学仪器的成像性能, 因此在仪器设计的初期需要对光学元件的热透镜效应作相应的考虑。而在光学元件激光致热分析的诸多因素中, 激光光强的分布对

光学元件的热透镜效应影响较大, 实际计算时一般先用光学设计软件分析出各光学元件上的激光光强分布数据, 然后将这些离散数据拟合成激光强度函数, 并乘以材料的吸收系数作为热载荷条件施加于光学元件的有限元模型上。近年来开展的一些关于激光致热的研究中, 通常把激光光强分布假定为类高斯型<sup>[8~16]</sup>, 即包括圆形的亚高斯型、高斯型、超高斯型及椭圆形高斯分布。事实上, 由于激光类仪器内部光学元件的折射, 各光学元件上的激光强度并

收稿日期: 2011-11-15; 收到修改稿日期: 2011-12-10

基金项目: 国家科技重大专项(2009ZX02005)资助课题。

作者简介: 袁文全(1982—), 男, 硕士, 助理研究员, 主要从事精密光机结构设计与分析等方面的研究。

E-mail: yuanwenquan@tom.com

不完全服从类高斯型分布,因此采用上述类高斯型函数难以准确拟合光学设计软件输出的激光光强分布数据。

本文提出了一种超越型激光强度函数,且该形式的函数包容类高斯型函数,因此能够更好地模拟光学元件上的激光强度分布。但由于该分布函数无法直接拟合求解,本文采用多变量寻优的方法对函数中的参数进行确定,得到了光学表面的激光强度分布函数。

## 2 超越型激光强度函数的提出

在过去的一些激光致热的研究中<sup>[8~10]</sup>,通常采用圆形高斯型激光强度函数表示

$$I(x, y, z) = I_0 \exp\left[-2\left(\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right)\right], \quad (1)$$

式中  $I(x, y, z)$  为光照面  $z$  上点  $(x, y)$  处的激光强度,  $I_0$  为光照面  $z$  上激光强度的功率密度,  $w$  为光束的照射半径。

同时,也有学者认为在高斯型激光强度函数中外加一个因子  $l$  可以更好地描述光照面上的激光强度分布<sup>[11~15]</sup>,具体形式为

$$I(x, y, z) = I_0 \exp\left[-2\left(\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right)^l\right], \quad (2)$$

式中  $l$  为正实数因子项。这样,当  $l < 1$  时,叫做亚高斯分布;当  $l = 1$  时,叫做高斯分布,此时与(1)式具有相同形式;而当  $l > 1$  时,叫做超高斯分布,且  $l \rightarrow \infty$  时,函数描述了一种均匀激光强度分布形式。

另外,(1)式的激光强度函数为圆形分布,有研究提出了一种椭圆形分布的高斯激光强度函数描述形式<sup>[16]</sup>:

$$I(x, y, z) = I_0 \exp\left[-2\left(\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2}\right)\right], \quad (3)$$

式中  $u, v$  分别为椭圆形激光光束的长轴及短轴半径。当  $u = v$  时,(3)式和(1)式具有相同的形式。

从上述函数形式来看,(2)、(3)式包容(1)式,因此也能更广泛地描述激光强度分布。但就公式形式来看,两个公式中指数项括号内的次数均为二次因子,这里采用两个正实数因子来描述这个二次项,形成一个超越型激光强度分布函数,即

$$I(x, y, z) = I_0 \exp\left[-2\left(\frac{|x|^j}{u^j} + \frac{|y|^k}{v^k}\right)^l\right], \quad (4)$$

式中  $j, k, l$  均为正实数因子项。当  $j = k = 2, l = 1$  时,(4)式与(3)式具有相同形式;当  $j = k = 2, u = v = w$  时,(4)式与(2)式具有相同形式。由此可见,对于激光强度的分布而言,(4)式所表示的超越型函数形式具有更广泛的适用性。

## 3 超越型激光强度函数的参数求解

### 3.1 超越型激光强度函数的变换

在离散数据的曲面拟合时,通常将拟合函数改写为线型函数的形式,然后采用最小二乘法进行函数的拟合。(4)式中,未知项为  $I_0, j, k, l, u, v$ ,对该公式实施变换有

$$\left\{ \left| -\frac{1}{2} \ln \left[ \frac{I(x, y, z)}{I_0} \right] \right| \right\}^{1/l} = \frac{|x|^j}{u^j} + \frac{|y|^k}{v^k}. \quad (5)$$

从(5)式的形式来看,公式的左右两边均含有未知项,因此无法采用最小二乘法对(4)式所表示的激光强度函数进行求解。

### 3.2 超越型激光强度函数的参数求解方法

事实上,由(4)式表示的激光强度函数  $I(x, y, z)$  与真实的离散数据之间的均方差可表示为

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left\{ I_0 \exp\left[-2\left(\frac{|x_i|^j}{u^j} + \frac{|y_i|^k}{v^k}\right)^l\right] - I(x_i, y_i, z_i) \right\}^2}{n}}, \quad (6)$$

式中  $i$  为离散点下标序号,共有  $n$  个离散点。则(4)式的参数求解过程也是求解使(6)式中  $S$  取最小值的一组  $I_0, j, k, l, u, v$  值的过程。这样可以假定  $I_0, j, k, l$  为已知数值,此时令  $C = \left\{ \left| -\frac{1}{2} \ln \left[ \frac{I(x, y, z)}{I_0} \right] \right| \right\}^{1/l}$ ,  $A = |x|^j, X = u^{-j}, B = |y|^k, Y = v^{-k}$ , (5)式即可变为

$$AX + BY = C, \quad (7)$$

上述的线性方程可以采用最小二乘法对  $X, Y$  求解,并最终确定  $u, v$  值。当然,如果事先对  $I_0, j, k, l$  的数值值域有一个合理的估计,并在各值域内采用枚举方法来遍历各假定的  $I_0, j, k, l$  值,可以通过上述方法求得一系列的  $u, v$  值并确定拟合函数;然后根据拟合函数并结合原始数据点,依据(6)式求解出拟合均方根误差  $S$ ,选择其中使均方根误差  $S$  最小的一组  $I_0, j, k, l, u, v$ ,即为该函数的最佳参数解,从而

得到原始离散数据点的最佳拟合函数。

从上述方法来看,如果假定  $I_0, j, k, l$  的数值分别有  $N_i (i = 1, 2, 3, 4)$  个,那么其时间复杂度为  $[O(\prod_{i=1}^4 N_i)]$ ;显然当  $N_i (i = 1, 2, 3, 4)$  的数值较大时,该方法求解效率非常差,甚至是不可行的。

然而,观察发现(6)式可看作一个关于  $S$  的函数,且该函数是连续可微的。此时若假定一组初始  $I_0, j, k, l$  值,结合(7)式采用最小二乘法求解  $u, v$  值,然后求解此处该函数梯度

$$\nabla S = \left[ \frac{\partial S}{\partial I_0}, \frac{\partial S}{\partial j}, \frac{\partial S}{\partial k}, \frac{\partial S}{\partial l} \right]. \quad (8)$$

即可采用最陡下降法使  $I_0, j, k, l$  值沿着负梯度方向变化并采用最小二乘法确定  $u, v$  值,重复上述步骤即可最终求出使  $S$  最小的一组  $I_0, j, k, l, u, v$  值。这样,(6)式中求  $S$  最小问题转化为  $S$  函数的多变量寻优问题。

在实际的计算过程中,(6)式的梯度求解并不容

易,可以采用对  $I_0, j, k, l$  值变化进行方向搜索的办法来近似模拟最陡下降法,这样也有利于编程上的简化,其具体实现步骤如下:

1) 首先假定一组  $I_0, j, k, l$  的数值并采用最小二乘法求解出  $u, v$  值;然后根据拟合函数并结合原始数据点求解出拟合均方根误差  $S$ ,同时记录  $I_0, j, k, l, u, v, S$  到主数据区中。

2) 在其他参数不变的情况下,使  $I_0, j, k, l$  进行一次微小量变化,采用最小二乘法对变化后的函数进行拟合得到  $u, v$  值并求解拟合方差  $S_i (i = 1, 2, \dots, 8)$ ,然后对这些方差  $S_i (i = 1, 2, \dots, 8)$  进行比较以获得最小方差值  $S_{\min}$ ,并将此时对应的  $I_0, j, k, l, u, v, S_i$  (此处  $S_i = S_{\min}$ ) 记录到临时数据区中。

3) 比较  $S$  与  $S_{\min}$  值的大小,若  $S \leq S_{\min}$ ,则主数据区中的  $I_0, j, k, l$  即为所求参数值;若  $S > S_{\min}$ ,则令  $S = S_{\min}$ ,同时将临时数据区中的  $I_0, j, k, l$  及  $S$  存储到主数据区,然后执行步骤 2) 直至  $S \leq S_{\min}$ 。

从上述步骤来看,拟合函数与实际输入数据的方

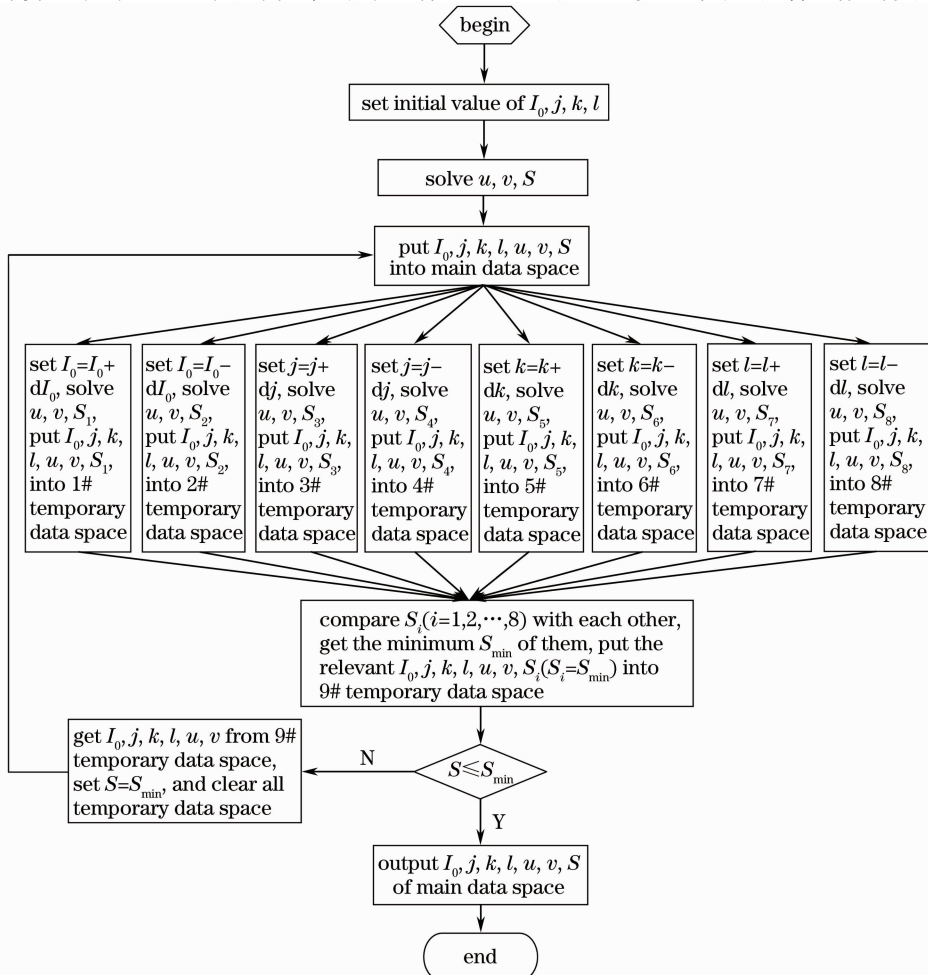


图1 算法说明图

Fig. 1 Illustration of the arithmetic

差  $S$  始终沿着  $I_0, j, k, l$  各单值变化方向中最快下降的方向。这样,在对求解参数设置合理的步长后,其时间复杂度为各参数子步数的累加  $[O(\sum_{i=1}^4 N_i)]$ , 远小于枚举法的时间复杂度  $[O(\prod_{i=1}^4 N_i)]$ 。具体的算法如图 1 所示。图 2 则为采用该算法实现本文算例 3 的计算过程,该图中的方差即沿着使均方差最快变小的方向改变各参数,图中的小箭头长度表示  $I_0$  值,小球的直径表示方差  $S$  的大小。

### 4 算 例

依照 3.2 节中的方法,采用超越型函数(4)式对一种 193 nm 光刻物镜系统内的激光强度分布数据进行函数拟合,并将原型数据和拟合函数作对比。由于该函数包容圆形、椭圆形高斯类分布函数,这里不再举例说明圆形、椭圆形高斯类的激光光强分布情况。图 3~6 分别对该物镜中一些光学元件上的特殊光强分布进行函数拟合的结果。同时,为了表

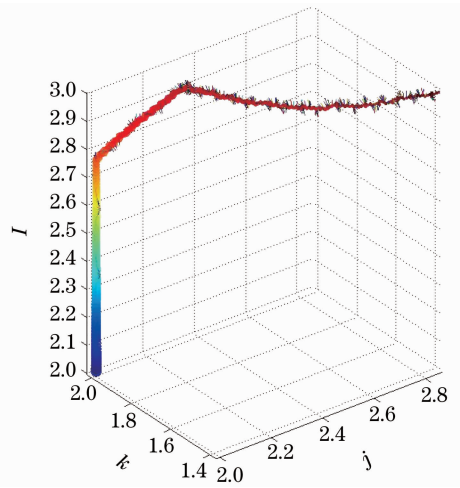


图 2 计算过程示意图

Fig. 2 Schematic of computing process

达上的方便,采用网格的绘制方法来表达真实原型数据分布及拟合函数的轮廓形状,而各函数的具体形式及激光强度的最小均方差  $S$  则如表 1 所示。另外,图 3~6 及表 1 中  $x, y$  的单位为 mm,其他则遵循 SI 制。

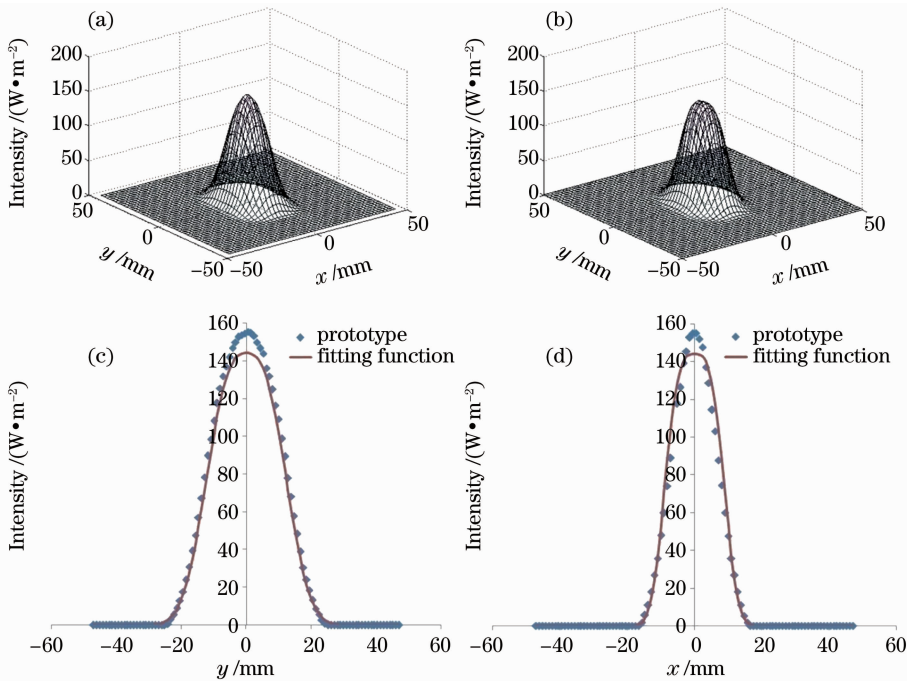


图 3 算例 1 说明图。(a)原型数据网格;(b)拟合函数网格;(c)  $x=0$  处拟合函数与原型数据对比;(d)  $y=0$  处拟合函数与原型数据对比

Fig. 3 Illustration of example 1. (a) Grid of prototype data; (b) grid of fitting function; (c) comparison between prototype data and fitting function at  $x=0$ ; (d) comparison between prototype data and fitting function at  $y=0$

从上述计算来看,(4)式所表示的超越型函数对一些特殊的典型激光光强分布也能够较好地表达。因此,这种超越型函数比高斯类函数有更好的适用性,且计算中所采用的拟合方法也是切实、有效、可

行的。

### 5 结 论

提出了一种超越型函数来描述光学元件上的激

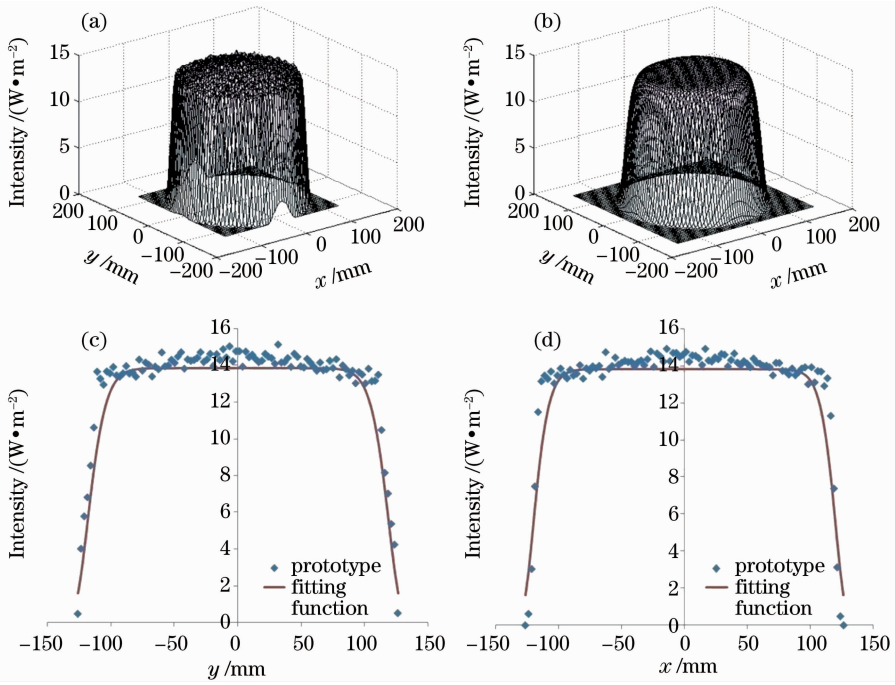


图4 算例2说明图。(a)原型数据网格;(b)拟合函数网格;(c)  $x=0$ 处拟合函数与原型数据对比;(d)  $y=0$ 处拟合函数与原型数据对比

Fig. 4 Illustration of example 2. (a) Grid of prototype data; (b) grid of fitting function; (c) comparison between prototype data and fitting function at  $x=0$ ; (d) comparison between prototype data and fitting function at  $y=0$

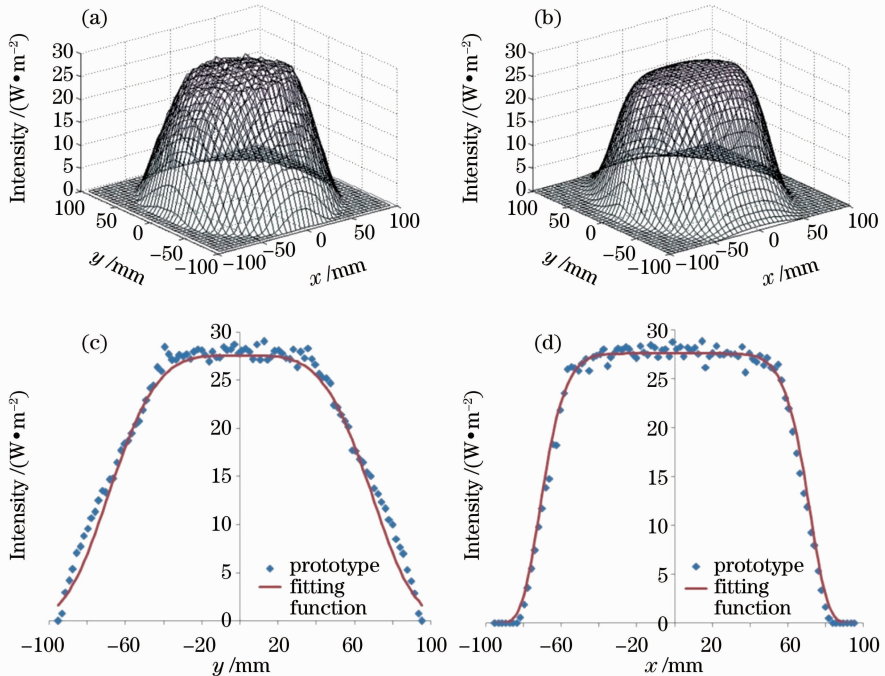


图5 算例3说明图。(a)原型数据网格;(b)拟合函数网格;(c)  $x=0$ 处拟合函数与原型数据对比;(d)  $y=0$ 处拟合函数与原型数据对比

Fig. 5 Illustration of example 3. (a) Grid of prototype data; (b) grid of fitting function; (c) comparison between prototype data and fitting function at  $x=0$ ; (d) comparison between prototype data and fitting function at  $y=0$

光强度分布,并依据多变量寻优的方法对函数进行了拟合。首先假定部分参数,以拟合数据方差最小作为拟合原则,采用最小二乘法对函数的其他参数

进行拟合求解,然后以这部分假定参数为变量,结合最陡下降法思想,采用方向搜索法使方差沿着最快下降的单参数变化方向来进行参数的微小量改变,

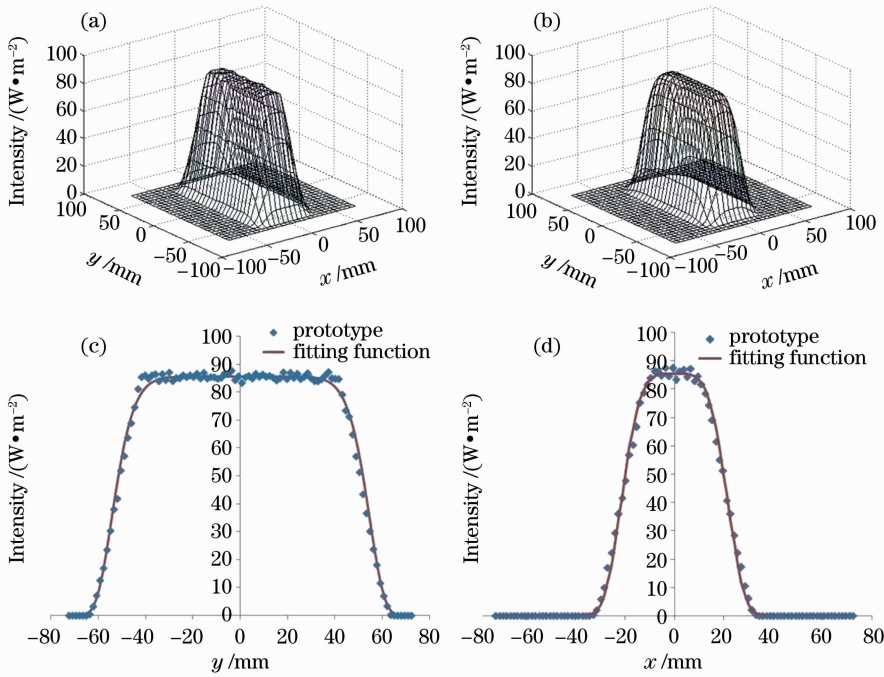


图 6 算例 4 说明图。(a)原型数据网格;(b)拟合函数网格;(c)  $x=0$  处拟合函数与原型数据对比;(d)  $y=0$  处拟合函数与原型数据对比

Fig. 6 Illustration of example 4. (a) Grid of prototype data; (b) grid of fitting function; (c) comparison between prototype data and fitting function at  $x=0$ ; (d) comparison between prototype data and fitting function at  $y=0$

表 1 各算例的函数表达

Table 1 Functions of the examples

Item	Function	S	Figure
Example 1	$I(x, y, z) = 144.2 \exp \left[ -2 \left( \frac{ x ^{1.96}}{12.32^{1.96}} + \frac{ y ^{2.36}}{18.86^{2.36}} \right)^{1.39} \right]$	2.820	Fig. 3
Example 2	$I(x, y, z) = 13.84 \exp \left[ -2 \left( \frac{ x ^{2.27}}{125.7^{2.27}} + \frac{ y ^{1.89}}{125.5^{1.89}} \right)^{7.31} \right]$	1.160	Fig. 4
Example 3	$I(x, y, z) = 27.56 \exp \left[ -2 \left( \frac{ x ^{2.86}}{78.88^{2.86}} + \frac{ y ^{1.38}}{87.7^{1.38}} \right)^{2.99} \right]$	0.9993	Fig. 5
Example 4	$I(x, y, z) = 85.61 \exp \left[ -2 \left( \frac{ x ^{3.32}}{27.08^{3.32}} + \frac{ y ^{7.49}}{59.04^{7.49}} \right)^{1.29} \right]$	2.749	Fig. 6

并最终求得使方差最小的超越型激光强度函数。计算表明在描述激光光强分布方面,这种超越型函数比高斯类函数有更好的适用性;而在算法方面,在各变量的子步数为  $N_i (i = 1, 2, 3, 4)$  的情况下,本文所用方法的时间复杂度  $[O(\sum_{i=1}^4 N_i)]$  也较传统枚举法的时间复杂度  $[O(\prod_{i=1}^4 N_i)]$  有显著降低,具有较强的可实现性。

参 考 文 献

1 Zhang Yinke, Fan Su, Yang Hao. Simplified method for thermal distortion of end-pumped laser crystal with circular cross-section [J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(8): 1928~1931  
张引科, 樊素, 杨浩. 端面抽运圆截面激光晶体热变形量的

简便求解方法[J]. *中国激光*, 2009, **36**(8): 1928~1931  
2 Feng Zhiqing, Bai Lan, Zhang Zengbao *et al.*. Thermal deformation compensation of high-energy laser mirrors[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2010, **18**(8): 1781~1787  
冯志庆, 白兰, 张增宝等. 高能激光反射镜热变形补偿[J]. *光学精密工程*, 2010, **18**(8): 1781~1787  
3 Liu Jian, Lu Jian, Ni Xiaowu *et al.*. Thermal stress cleaving of  $Al_2O_3$  ceramic plate by pulsed laser[J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(5): 1398~1403  
刘剑, 陆建, 倪晓武等. 脉冲激光热应力切割  $Al_2O_3$  陶瓷板[J]. *中国激光*, 2010, **37**(5): 1398~1403  
4 Chen Haitao, Yang Huajun, Zou Xuefang *et al.*. The refractive index changes derived from thermal effects in Bragg fiber laser [J]. *Optik*, 2011, **122**(16): 1478~1480  
5 Pierre Mathey. Thermal strain distributions and change of refractive indices in 4 mm crystals illuminated with Gaussian cw laser beams[J]. *Opt. Commun.*, 2011, **193**(1-6): 217~226  
6 Xiao Haosu, Zhang Yunqiang, Fan Zhigang *et al.*. Precision analysis of polarization interference method for measuring stress birefringence of crystal[J]. *Infrared and Laser Engineering*,

- 2011, **40**(2): 271~276
- 肖吴苏, 张运强, 范志刚等. 偏振干涉法测量晶体应力双折射精度分析[J]. 红外与激光工程, 2011, **40**(2): 271~276
- 7 Li Kun, Zhang Bin, Li Keyu *et al.*. Nonlinear self-focusing by intense UV laser in fused silica[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2006, **18**(10): 1653~1656
- 李琨, 张彬, 李格宇等. 熔石英介质中强紫外激光自聚焦效应研究[J]. 强激光与粒子束, 2006, **18**(10): 1653~1656
- 8 Dharani Sowdari, Pradip Majumdar. Finite element analysis of laser irradiated metal heating and melting processes[J]. *Optics & Laser Technology*, 2010, **42**(6): 855~865
- 9 Song Xiaolu, Li Bingbin, Guo Zhen *et al.*. Influences of pump beam distribution on thermal lensing spherical aberration in an LD end-pumped Nd:YAG laser[J]. *Opt. Commun.*, 2009, **282**(24): 4779~4783
- 10 Wu Lixiong, Ye Xisheng, Wang Lijun *et al.*. Reflection of epoxy/organsilicone composite coating at 1.3  $\mu\text{m}$  under laser irradiation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(8): 0814002
- 吴丽雄, 叶锡生, 王立君等. 激光作用下环氧/硅树脂复合涂层的1.3  $\mu\text{m}$  反射特性研究[J]. 光学学报, 2011, **31**(8): 0814002
- 11 Xu Yangbin, Hao Jinbo, Wang Liangshen *et al.*. Influence of laser distribution on the thermal effect of Nd:GdVO<sub>4</sub> laser crystals[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(6): 1336~1339
- 徐仰彬, 郝劲波, 王良甚等. 不同激光分布下 Nd:GdVO<sub>4</sub> 晶体热焦距分析[J]. 光子学报, 2009, **38**(6): 1336~1339
- 12 Shi Peng, Chen Wen, Li Long *et al.*. Influence of laser distribution on thermal effect of Nd:YVO<sub>4</sub> crystal[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2008, **16**(2): 197~201
- 史彭, 陈文, 李隆等. 激光分布对抽运 Nd:YVO<sub>4</sub> 晶体热效应的影响[J]. 光学精密工程, 2008, **16**(2): 197~201
- 13 Wang Weiping, Lü Baida, Luo Shirong. Influence of laser spatial profile on laser heating material[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2001, **13**(3): 313~316
- 王伟平, 吕百达, 罗时荣. 激光束光强分布对材料激光加热的影响[J]. 强激光与粒子束, 2001, **13**(3): 313~316
- 14 Lü Baida, Luo Shirong. Beam propagation factor of apertured super-Gaussian beams[J]. *Optik*, 2001, **112**(11): 503~506
- 15 Yu Zhan, Ma Haotong, Du Shaojun. Adaptive near-field beam shaping based on simulated annealing algorithm[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(3): 0314003
- 余湛, 马浩统, 杜少军. 基于模拟退火算法的自适应近场光束整形[J]. 光学学报, 2011, **31**(3): 0314003
- 16 Yan Xingpeng, Gong Mali, He Fahong *et al.*. Numerical modeling of the thermal lensing effect in a grazing-incidence laser[J]. *Opt. Commun.*, 2009, **282**(9): 1851~1857

栏目编辑: 宋梅梅