

精确最小二乘相位解包裹算法

钱晓凡 饶帆 李兴华 林超 李斌

(昆明理工大学理学院激光研究所, 云南 昆明 650093)

摘要 路径无关算法是一类重要的相位解包裹算法,其中最常用的是各种最小二乘算法。由于最小二乘算法无法限制误差在空间中传播,因此不能直接获得精确的解包裹相位,其应用受到了限制。分析最小二乘相位解包裹算法误差的特点,提出了一种能得到精确解包裹相位的新算法,给出了相关的理论分析和具体算法,通过模拟计算和实验验证,证明了该新算法的可行性与有效性。

关键词 测量;相位解包裹;最小二乘;算法

中图分类号 O436.1

文献标识码 A

doi: 10.3788/CJL201239.0209001

Accurate Least-Squares Phase Unwrapping Algorithm

Qian Xiaofan Rao Fan Li Xinghua Lin Chao Li Bin

(Laser Institute, College of Science, Kunming University of Science and Technology,
Kunming, Yunnan 650093, China)

Abstract The path independent algorithm is one of the important phase unwrapping algorithms, and diverse types of least-squares phase unwrapping algorithms are used widely. Since least-squares phase unwrapping algorithm does not hold back the error diffusing in space, an accurate unwrapped phase cannot be obtained by this algorithm directly, which limits the applications of the algorithms. A novel accurate phase unwrapping algorithm and the corresponding theoretical analysis are presented by analyzing the error characteristics of least-squares phase unwrapping algorithm. The validity of this new algorithm is shown by simulation and experimental examples of unwrapping, and the obtained phase proves that this new algorithm is accurate.

Key words measurement; phase unwrapping; least-square; algorithm

OCIS codes 090.1760; 100.5088; 120.3180; 120.4120

1 引 言

在许多测量领域都需要计算相位,但直接计算得到的相位值一般被限制在 $(-\pi, \pi)$ 中,即相位被“截断”或“包裹”,实际测量时必须通过相位解包裹将其连接起来。能否正确和高精度地完成相位解包裹,直接关系到能否正确地得到所需的测量值,因而相位解包裹成为测量领域的一个研究热点。为了更好地完成相位解包裹运算,目前国内外学者已经提出了很多算法,归纳起来主要是两类:即寻求积分结果与路径无关条件的路径跟踪算法^[1~4]以及寻求满足最小范数解的路径无关算法^[5~8]。

尽管当噪声、阴影、条纹断裂以及欠采样严重等时,各种路径跟踪算法都遇到选择的积分路径或过

于简单、或错过部分极点、或不唯一等问题,恢复出来的相位不唯一或与真实的相位出现较大差异,导致得不到满意的结果,甚至形成所谓的“孤岛”而无法解包裹,但普遍认为只有路径跟踪算法能得到精确的解包裹相位。因此,如果希望得到精确的解包裹相位,几乎无一例外地都选用路径跟踪算法。

路径无关算法寻求的是满足最小范数的解,其中最常用的是各种最小二乘算法。尽管最小二乘算法无法限制不可靠数据点引起的相位误差在空间传播,得到的解包裹相位有峰削尖、谷填底、陡坡变缓的趋势,继而导致相位的全域性误差,但由于最小二乘算法具有全域性,能够提供平滑解,得到的解包裹相位在视觉上很好,加之运算速度也比较快,通常用

收稿日期: 2011-09-20; 收到修改稿日期: 2011-10-31

基金项目: 国家自然科学基金(61067004)资助课题。

作者简介: 钱晓凡(1963—),男,教授,主要从事光信息处理方面的研究。E-mail: qianxiaofan1@sina.com

作精确解包裹之前的预运算,这多少限制了该算法的应用。

在分析最小二乘相位解包裹算法特点的基础上,注意到尽管该算法不能直接提供精确的解包裹相位,但其误差通常比较小,只要做一些修改,也能得到精确的解包裹相位。将修改后的算法称为精确最小二乘相位解包裹算法。本文给出相关的理论分析和具体算法,并举例说明其有效性。

2 理论分析

设 $N \times M$ 个数据点的二维包裹相位值为 $g(n, m)$, $\varphi(n, m)$ 为对应的实际连续相位值(n, m 为二维分布相位对应矩阵的下标, $1 \leq n \leq N, 1 \leq m \leq M$), 则解包裹相位可以表示为

$$\varphi(n, m) = g(n, m) + 2k(n, m)\pi, \quad (1)$$

式中 $k(n, m)$ 为整数,它在二维空间构成不连续的平台——截断平台。解包裹其实是一个用不同方法计算正确的 $k(n, m)$ 的过程。

相位解包裹的最小二乘算法,在数学上等于求解具有 Neumann 边界条件的离散泊松方程,常用离散余弦变换或傅里叶变换求解该离散泊松方程。这就是目前常用的最小二乘离散泊松方程解包裹算法^[8]。由于在该算法中要用到余弦变换或傅里叶变换,因此只要包裹相位有一个噪声点,就一定会传播到空间中的其他点,从而导致所有的解包裹相位点都有误差,这就是通常直接用最小二乘算法得不到精确解的原因。

当噪声不严重时,用最小二乘算法,噪声将分配到所有的点上,每个点实际分担的噪声并不多,因而各点处计算得到的解包裹相位 $\varphi'(n, m)$ 与真实相位 $\varphi(n, m)$ 之间的误差并不大,往往远小于 $\pm 2\pi$, 所以通过比较 $\varphi'(n, m)$ 和 $g(n, m)$, 可以找到正确的 $k(n, m)$,再叠加上 $g(n, m)$ 就可以得到精确的解包裹相位。

当噪声比较严重时,最小二乘算法同样将噪声分配到所有的点上,但每个点实际分担的噪声并不相同,即误差主要集中在原来有噪声(噪声源)及相位值较大(峰值)的点附近,因而其他各点处计算得到的解包裹相位 $\varphi'(n, m)$ 与真实相位 $\varphi(n, m)$ 之间的误差也不大,一般小于 $\pm 2\pi$, 对这些点通过比较 $\varphi'(n, m)$ 和 $g(n, m)$, 也可以找到正确的 $k(n, m)$ 。当然,对于噪声源和峰值附近的点, $\varphi'(n, m)$ 和 $\varphi(n, m)$ 之间的误差会比较大,通常可以达到甚至超过 $\pm 2\pi$, 从而在这些区域形成不连续“斑块”。换句话

说,在这些点附近,计算得到的 $k'(n, m)$ 与实际的 $k(n, m)$ 之间相差一个绝对值大于等于 1 的整数,如果能用合适的方法找到这个整数,从而得到正确的 $k(n, m)$, 当然也就可以得到精确的解包裹相位。

当噪声非常严重时,尽管噪声被分配到了所有的点上,但由于噪声非常严重,每个点或大量的点处计算得到的解包裹相位 $\varphi'(n, m)$ 与真实相位 $\varphi(n, m)$ 之间的误差都很大,即都大于 $\pm 2\pi$, 这时很难再用合适的方法找到每个点处正确的 $k(n, m)$, 至少在效率上是不值得这么做的,当然也就得不到精确的解包裹相位。

3 算 法

首先用最小二乘算法得到的解包裹相位 $\varphi'(n, m)$ 计算 $k'(n, m)$ 。作运算

$$k'(n, m) = \text{INT}\{[\varphi'(n, m) - g(n, m)]/2\pi\}, \quad (2)$$

式中 $\text{INT}\{\}$ 为取整运算。接着判断 $k'(n, m)$ 是否就是待求的 $k(n, m)$ 。作运算

$$\varphi''(n, m) = g(n, m) + k'(n, m) \times 2\pi. \quad (3)$$

将得到的 $\varphi''(n, m)$ 直接显示其图像,如果是连续的,说明 $k'(n, m) = k(n, m)$, $\varphi''(n, m)$ 就是待求的精确解包裹相位,这通常发生在噪声不严重的情况下。

当噪声比较严重时, $\varphi''(n, m)$ 在大部分区域图像是连续的,只有一些离散的点和部分区域不连续(呈现斑块),说明这些离散点和区域 $k'(n, m) \neq k(n, m)$ 。用下面的算法处理离散的不连续点。作运算

$$\overline{\varphi''(n, m)} = \text{MEDFILT2}\{\varphi''(n, m)\}, \quad (4)$$

$$\overline{k'(n, m)} = \text{INT}\{[\overline{\varphi''(n, m)} - \varphi''(n, m)]/2\pi\}, \quad (5)$$

$$\varphi'''(n, m) = \overline{\varphi''(n, m)} + 2\pi \times \overline{k'(n, m)}. \quad (6)$$

式中 $\text{MEDFILT2}\{\}$ 为中值滤波,窗口的大小可以取 $3 \times 3, 5 \times 5$, 甚至 9×9 等。(4)式对 $\varphi''(n, m)$ 做中值滤波,可以平滑离散的不连续点,结果用 $\overline{\varphi''(n, m)}$ 表示。(5)式可以计算出这些点处 $k'(n, m)$ 的值,结果用 $\overline{k'(n, m)}$ 表示。最终的解包裹相位用(6)式计算,并用 $\varphi'''(n, m)$ 表示。经过(4)~(6)式的运算,原来相位连续的点依然连续,而不连续的离散点会变得连续,同时,不连续区域的边缘会变得平滑,范围也会缩小。如果噪声比较严重,这个过程需要重复数次才能得到理想的效果,并且运算效率较高。

最后用下面的算法处理少数遗留下来的不连续

区域。作运算

$$ss = \text{EDGE}\{\varphi'''(n, m)\}, \quad (7)$$

式中 $\text{EDGE}\{\}$ 为查找边缘运算, ss 为查找的结果, 是一个 $N \times M$ 的 0,1 矩阵。利用该矩阵, 使用数字图像处理中的填充算法, 逐个在不连续区域填充 2π 或 -2π , 即对这些区域的 $\overline{k'(n, m)}$ 作 $+1$ 或 -1 运算, 使之等于待求的 $k(n, m)$, 最终得到精确的解包裹相位。

需要说明的是, 经过填充运算, 在不连续区域的边缘往往还会遗留部分离散点没有被填充, 同时, 也会有部分连续点被误填充, 原因是 ss 可能不闭合并

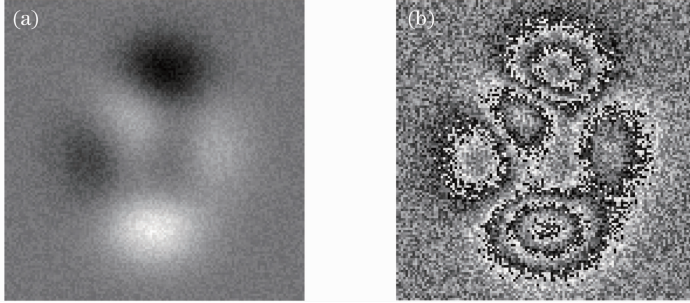


图 1 用于模拟计算的(a)原始相位 $\varphi(n, m)$ 及(b)其包裹相 $g(n, m)$

Fig. 1 (a) Phase $\varphi(n, m)$ and (b) wrapped phase $g(n, m)$ for simulation

先用最小二乘算法计算其解包裹相位, 然后用第 3 节所述的算法完成精确解包裹相位计算, 并与路径跟踪洪水填充算法的结果相比较, 结果如图 2 所示。

图 2(a) 是用最小二乘算法直接得到的解包裹相位 $\varphi'(n, m)$, 可以看到它是连续的。用原始相位 $\varphi(n, m)$ 减去 $\varphi'(n, m)$ 求出其绝对误差, 如图 2(i) 所示, 几乎每一点的误差均不为 0, 但相位峰值附近误差最大。图 2(b) 是用(2)式计算得到的 $k'(n, m)$, 而图 2(c) 是用(3)式计算得到的 $\varphi''(n, m)$, 可以看到它们在 3 个区域和部分离散点处不正确, 呈现明显的斑块。图 2(d) 是用(4)~(6)式计算得到的 $\varphi'''(n, m)$, 离散的不正确点已经消除, 3 个斑块的大小缩小, 且边缘变得光滑。图 2(e) 是用(7)式查找到的边缘, 图 2(f) 是经填充运算得到的相位, 边缘遗留一些没有被填充的离散点, 部分连续点被误填充, 该相位再经(4)~(6)式的计算, 结果为图 2(g), 可以看到只有一个小片区域相位不正确, 再对该相位重复查找边缘、填充, 并进行(4)~(6)式的计算, 可以得到最终的精确解包裹相位, 如图 2(h) 所示。图 2(j) 给出了精确解包裹相位的绝对误差值, 其数量级为 10^{-15} rad。图 2(k) 给出了同一模拟相位用洪水填充算法解包裹的结果, 可以看到有 3 个区域以及一些离散点没能完成解包裹。

有误判点, 这时可以用得到的相位重复(4)~(6)式描述的过程, 需要的话, 再重复(7)式的运算和填充, 一般只要经过 1~2 次重复, 就能得到精确的解包裹相位。

4 模拟验证

用 Matlab 中的 peaks 函数乘以 2, 再叠加一个数值在 $-1.8 \sim 1.8$ rad 间变化的随机相位(用以模拟噪声), 构建一个含噪声的二维相位 $\varphi(n, m)$ (矩阵大小为 128×128), 如图 1 所示。

通过模拟计算可知, 尽管最小二乘算法不能直接提供精确的解包裹相位, 但利用其结果, 做一些修改, 也能得到精确的解包裹相位。

5 实验验证

为了检验最小二乘精确相位解包裹算法的效果, 用一组实验数据对该方法进行检验。数据来自一个石膏嘴唇模型的投影栅测试实验, 系统如图 3 所示: 用计算机生成一组正弦型投影栅, 并用投影仪直接投射到待测石膏模型上, 用数字摄像头和图像采集卡采集变形条纹图并输入计算机进行相位解包裹运算。

由于正弦型投影栅用计算程序生成, 通过调整程序参数容易实现正弦投影栅每次精确相移 $\pi/2$ 。为了处理数据方便, 取投影栅的方向垂直于 x 轴。

先用联合移相式相位测量剖面术(PSP)和改进的傅里叶变换轮廓术(IFTP)相位解调算法^[9]得到包裹相位, 然后用前面所述的精确算法完成相位解包裹计算, 结果如图 4 所示(图像大小均为 $512 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$)。图 4(a) 是实验所得包裹相位; 图 4(b) 是经(4)~(6)式的运算得到的 $\varphi'''(n, m)$, 石膏嘴唇模型上的相位已经没有误差点, 仅在底座上有几个区域相位不连续; 图 4(c) 是查找边缘并作填充运算后得到的相位; 图 4(d) 是最终的精确

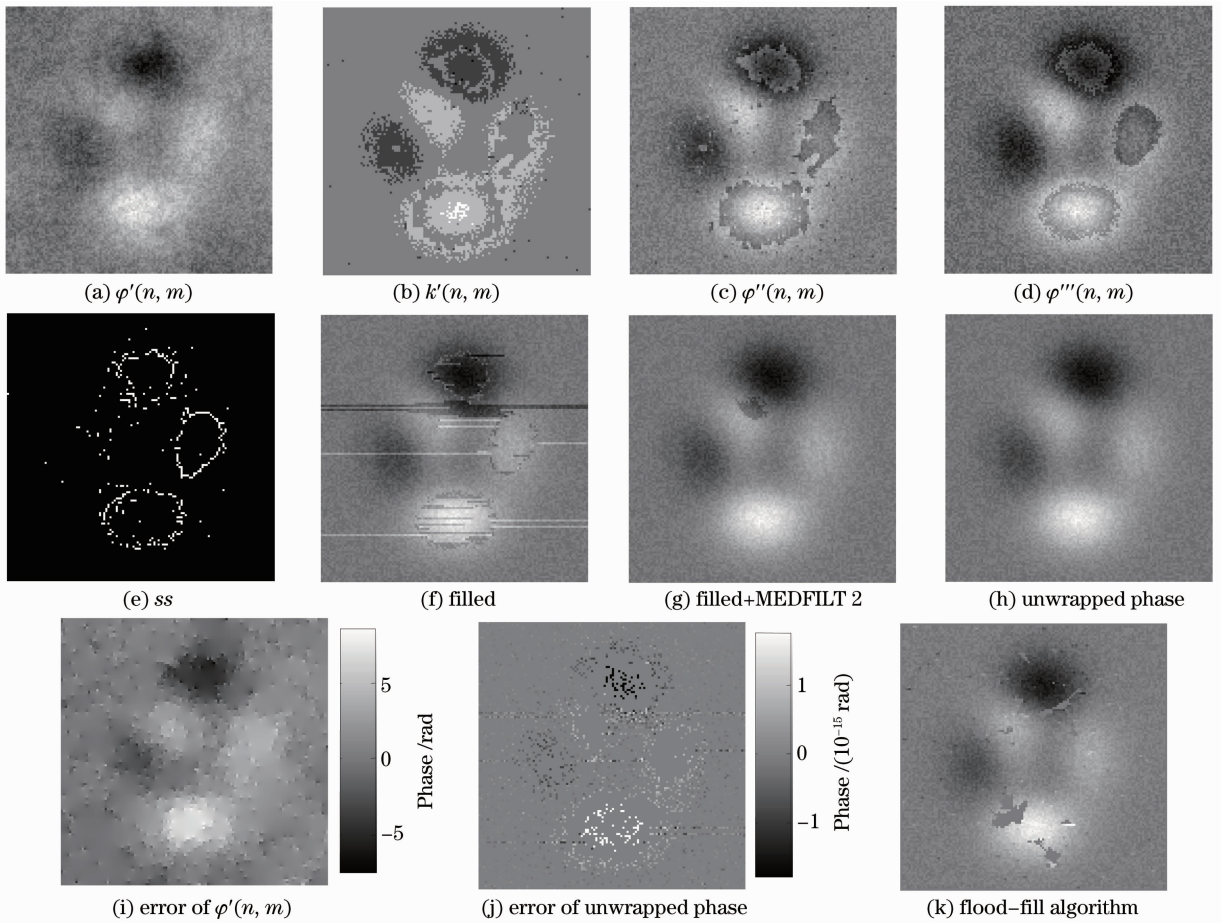


图 2 精确最小二乘解包裹算法模拟计算结果及其与洪水填充算法的比较(128 pixel×128 pixel)
 Fig. 2 Simulation results by accurate least-squares phase unwrapping algorithm and comparison with flood-fill phase unwrapping algorithm, 128 pixel×128 pixel

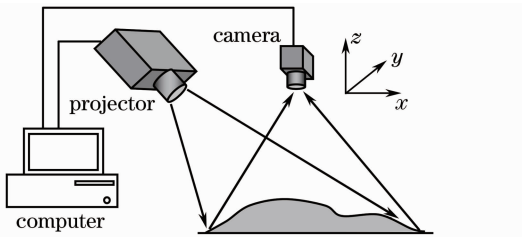


图 3 系统结构图

Fig. 3 Schematic of system

解包裹相位。图 4(e)给出了用洪水填充算法解包裹的结果,可以看到在右侧区域以及石膏嘴唇模型边缘的部分点,解包裹相位有误差或未能完成解包裹运算。图 4(f)用剖面($y = 235$ pixel, x 从 0 到 512 pixel)对最小二乘算法、洪水填充算法和本文所述精确算法得到的解包裹相位作了比较。可知,直接用最小二乘算法得到的结果每一个点都有误差,但在大多数位置处该误差都不大,利用它们可以找到正确的 $k(n, m)$ 。另外,洪水填充法与其他两种算法得到的结果相差一个比较大的常数,这取决于解

包裹起点的选择,不影响其结果。

通过实验验证可以看到,本文所述精确算法是可行和有效的,当然对一个实际的包裹相位,能否用所述算法得到精确的解包裹相位,很大程度上依赖于用最小二乘算法得到的相位的准确程度^[10~12]。

6 结 论

寻求积分结果与路径无关条件的路径跟踪算法和寻求满足最小范数解的路径无关算法是目前最主要的两类相位解包裹算法。在路径无关算法中,最常用的是各种最小二乘算法。由于最小二乘算法无法限制不可靠数据点引起的相位误差在空间中传播,被认为不能获得精确解包裹相位,从而限制了该算法的应用。分析了最小二乘相位解包裹算法的特点,发现尽管该算法不能直接提供精确的解包裹相位,但其误差通常比较小,利用其解包裹结果,并做一些修改,也能得到精确的解包裹相位。该算法即为精确最小二乘相位解包裹算法。本文给出了相关

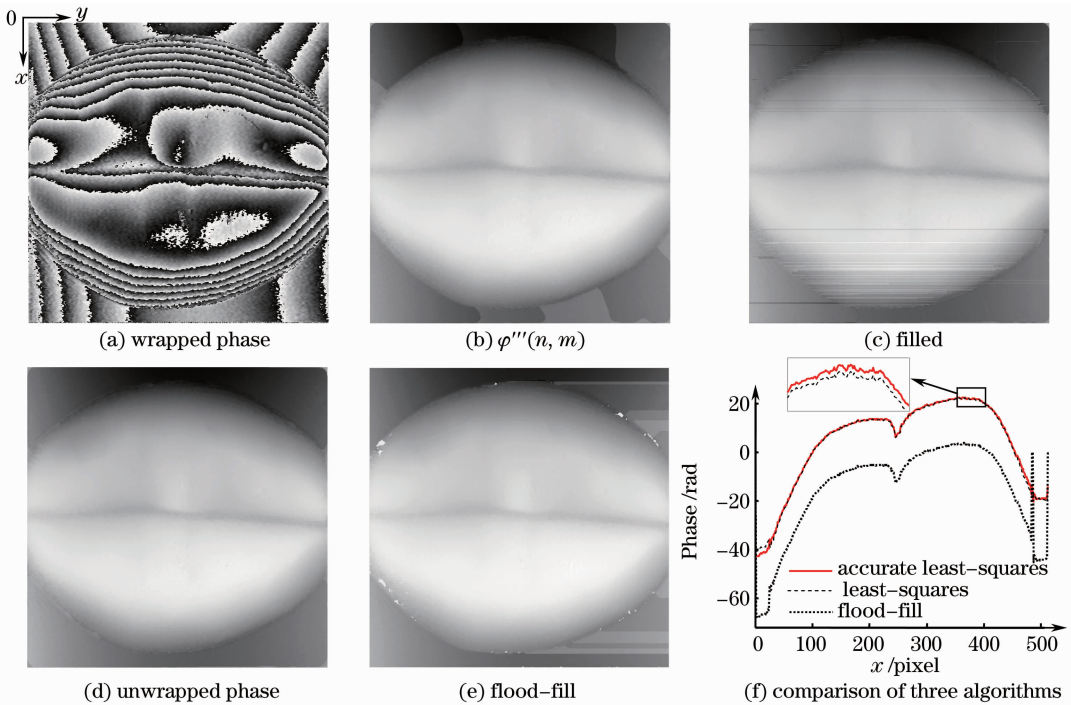


图4 精确最小二乘解包裹算法实验验证结果及其与洪水填充算法的比较(512 pixel×512 pixel)

Fig. 4 Experimental results by accurate least-squares phase unwrapping algorithm and comparison with flood-fill phase unwrapping algorithm, 512 pixel×512 pixel

的理论分析和具体算法,并通过模拟计算和实验验证了该新算法的可行性与有效性。

参 考 文 献

- 1 K. Itoh. Analysis of the phase unwrapping problems[J]. *Appl. Opt.*, 1982, **21**(14): 2470
- 2 Richard M. Goldstein, Howard A. Zebker, Charles L. Werner. Satellite radar interferometry; two-dimensional phase unwrapping [J]. *Radio Science*, 1988, **23**(4): 713~720
- 3 Thomas J. Flynn. Two-dimensional phase unwrapping with minimum weighted discontinuity [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1997, **14**(10): 2692~2701
- 4 M. Eineder, M. Hubing, B. Milcke. Unwrapping large interferograms using the minimum cost flow algorithm [C]. Proceedings of the 1998 International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS'98), 1998. 83~87
- 5 M. D. Pritt, J. S. Shipman. Least-squares two-dimensional phase unwrapping using FFT's[J]. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 1994, **32**(3): 706~708
- 6 D. C. Ghiglia, L. A. Romero. Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**(1): 107~117
- 7 J. Meneses, T. Gharbi, P. Humbert. Phase-unwrapping algorithm for images with high noise content based on a local histogram [J]. *Appl. Opt.*, 2005, **44**(7): 1207~1215
- 8 Hui Mei, Wang Dongsheng. Phase unwrapping method based on the solution of discrete Poisson equation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(10): 1245~1249
- 9 惠梅, 王东生. 基于离散泊松方程解的相位展开方法 [J]. *光学学报*, 2003, **23**(10): 1245~1249
- 10 Qian Xiaofan. A new phase calculation method in 3D optical phase measurement by combining PSP with IFTP [J]. *Optoelectronics Letters*, 2010, **6**(2): 120~123
- 11 Qian Xiaofan, Zhang Yongan, Li Xinyu *et al.*. Phase unwrapping algorithm based on mask and least-squares iteration [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(2): 440~444
- 12 钱晓凡, 张永安, 李新宇等. 基于掩模和最小二乘迭代的相位解包裹方法 [J]. *光学学报*, 2010, **30**(2): 440~444
- 13 Qian Xiaofan, Wang Zhanliang, Hu Te *et al.*. Reconstructing the phase of wavefront using digital hologram and the principle of shearing interferometry [J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(7): 1821~1826
- 14 钱晓凡, 王占亮, 胡特等. 用单幅数字全息和剪切干涉原理重构光场相位 [J]. *中国激光*, 2010, **37**(7): 1821~1826
- 15 Zhang Xiong, Qian Xiaofan. An improvement on the least-squares phase unwrapping algorithm for undersampled interferogram [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, **40**(1): 121~125
- 16 张雄, 钱晓凡. 欠采样干涉图最小二乘相位解包裹算法改进 [J]. *光子学报*, 2011, **40**(1): 121~125

栏目编辑: 马 沂