

基于激光自混合干涉效应的悬臂梁振动特性

吕 亮 黄 样 俞 本 立

(安徽大学光电信息获取与控制教育部重点实验室, 安徽 合肥 230039)

摘要 针对悬臂梁振动系统特性研究要求,提出了一种基于激光自混合干涉效应的极值点模型测量方法。该测量方法相对传统测量方法具有简单、实效、成本低廉等优点。从 Lang 和 Kobayashi 建立的速率方程出发推导了极值点研究模型并利用蒙特-卡罗随机模拟方法对半周期极值点公式进行简化修正,获得了自由振动情况下悬臂梁振动固有频率阶数为第 10 阶,振幅特征参量为 $A_{10} = B_{10} = 5.4601 \times 10^{-13}$ 。

关键词 激光光学;半导体激光器;自混合效应;振动

中图分类号 O436 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201239.0208008

Cantilever Vibration Characteristics Based on Laser Self-Mixing Interference Effect

Lü Liang Huang Yang Yu Benli

(Key Laboratory of Opto-Electronic Information Acquisition and Manipulation, Ministry of Education, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China)

Abstract For the requirements of cantilever vibration characteristics, a vibration system extra points measurement method based on self-mixing interference is purposed. This method is relatively simple, effective, and low cost compared to traditional measurement methods. Starting from the Lang-Kobayashi rate equation, vibration system extra points model is deduced and Monte Carlo random simulation method is used to simplify and correct the half-cycle extreme points formulcs. The order of the cantilever vibration natural frequency is 10 and amplitudes of the characteristic parameters are $A_{10} = B_{10} = 5.4601 \times 10^{-13}$ in the case of free vibration.

Key words laser optics; laser diode; self-mixing effect; vibration

OCIS codes 120.7280; 140.5960; 200.3050; 280.3420

1 引 言

振动是自然界和工程界常见现象,对振动系统特性研究有助于工程问题的分析处理、产品质量提高、设备有效的运行和及时故障排除等。目前传统振动系统特性研究的理论模型和测试方法都有很强的局限性,往往只能解决特定振动系统且相对复杂和昂贵。所以,寻求新的理论模型以及相关的测试方法成为振动系统特性研究亟待解决的技术问题。近年来,激光自混合干涉测量技术以其简单、紧凑、系统更易准直的优势,逐渐在振动测量^[1,2]、多自由度测量^[3]、距离测量^[4~7]、速度测量^[8~10]、激光器自身参数测量^[11]等领域得到广泛应用。激光自混合干涉技术^[12~15]是指激光器输出的激光,遇到外界反馈物体后,其中一部分光被反射或散射回来进入激

光器的谐振腔里,与激光腔内的光混合后发生干涉,使输出光功率发生了变化。通过对光功率变化情况的监测实现对反馈物体运动情况的测量。

本文在半导体激光器自混合干涉效应的基础上提出了振动系统极值点(VSEP)理论模型,结合自混合干涉测量技术并以工程中常见的梁氏结构振动系统为例,对其振动特性进行分析和研究。

2 基于激光自混合干涉效应的 VSEP 理论模型

目前对半导体激光器的自混合干涉效应的理论分析一般采用严格求解的 Lang 和 Kobayashi 建立的速率方程^[16],简称 LK 速率方程以及三镜腔理论模型^[17]。其中 LK 速率方程较三镜腔理论模型更

收稿日期: 2011-07-18; 收到修改稿日期: 2011-10-25

基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金(20103401120001)和安徽省教育厅重点科研计划(KJ2010A019)资助课题。

作者简介: 吕 亮(1978—),男,博士,副教授,主要从事光电子技术方面的研究。E-mail: lianglu78@gmail.com

加严格也更具普适性。采用 LK 速率方程得到的激光频率和激光强度可表示为

$$\begin{cases} \nu = \nu_0 - \frac{C \sin(2\pi\nu\tau + \arctan \alpha)}{2\pi\tau} \\ I = I_0(1 + m \cos 2\pi\nu\tau) \end{cases}, \quad (1)$$

式中 ν_0, I_0 为无反馈时的激光振荡频率和激光输出强度; ν, I 为有外反馈时的激光振荡频率和激光输出强度。 $\tau = \frac{2L}{c}$ 表示光在激光器外腔往返一周的时间, L 表示激光器外腔长度, c 为光在真空中的光速; α 为线宽增益系数; C 和 m 分别为反馈系数和强度调制系数。本文的理论模型和实验研究均在 $C < 4.6$ 区域(适度或弱反馈区域), 此时激光器频率近似为 ν_0 。对于振动系统作反馈物时, $L = l_0 + L_A(t)$, 其中 l_0 是指激光器到振动系统平衡点的距离, 这个距离是固定不变的常数, $L_A(t)$ 是振动系统在平衡点附近振动造成的位移。此时,

$$I = I_0 \left[1 + m \cos \left(4\pi \frac{L}{\lambda} \right) \right] = I_0 \left\{ 1 + m \cos \left[4\pi \frac{l_0 + L_A(t)}{\lambda} \right] \right\}, \quad (2)$$

如果 $4\pi \frac{l_0 + L_A(t)}{\lambda} = 2n\pi$, 即 $2 \frac{l_0 + L_A(t)}{\lambda} = n$ 时, 半导体激光器自混合干涉信号会出现极值。其中 λ 表示激光波长, l_0 表示外腔长度。从上述分析可以求出极值点个数的表达式为

$$N(t) = \begin{cases} \left[2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] + \frac{2L_A(t)}{\lambda} \right], \\ 2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] + \frac{2L_A(t)}{\lambda} \geq 0 \\ \left[2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] + \frac{2L_A(t)}{\lambda} \right], \\ 2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] + \frac{2L_A(t)}{\lambda} < 0 \end{cases}. \quad (3)$$

这就是从 LK 速率方程出发建立的 VSEP 模型, 即振动系统下激光自混合干涉极值点模型, 中括号表示取整(下文中与 N 相关的均表示取整)。

首先讨论振动中最简单的简谐运动情况。对于简谐振动的系统, $L_A(t) = A \sin \omega t$, A 表示振动振幅, ω 表示相位, 则(3)式可以写为

$$N(t) = \begin{cases} \left[2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] + \frac{2A \sin \omega t}{\lambda} \right], \\ 2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] + \frac{2A \sin \omega t}{\lambda} \geq 0 \\ \left[2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] + \frac{2A \sin \omega t}{\lambda} \right], \\ 2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] + \frac{2A \sin \omega t}{\lambda} < 0 \end{cases}. \quad (4)$$

让(4)式中的 t 遍历半个周期 $\left(-\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \right)$,

得到半个周期内极值点个数

$$N_h = \left[2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] + \frac{2A}{\lambda} \right] + \left[2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] - \frac{2A}{\lambda} \right]. \quad (5)$$

(5)式就是利用 VSEP 模型得到的简谐振动系统半周期内出现的极值点个数。可以对其进行简化, 即认为 $2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] = 0$ 和 $\frac{2A}{\lambda} = n$ (n 为整数), 这样(5)式简化为

$$N_h^* = \left[2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] + \frac{2A}{\lambda} \right] + \left[2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] - \frac{2A}{\lambda} \right] = \frac{4A}{\lambda}. \quad (6)$$

实际上 $\frac{2A}{\lambda}$ 不一定是整数, 只是为了能把 $\frac{2A}{\lambda}$ 顺利从天花板函数或地板函数中拿出而采用的假设; 此外 $2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right]$ 也不一定等于零。因此需对(6)式进行修正已消除简化带来的误差。

设 $\frac{2A}{\lambda} = a$, $2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] = b$, $a = n + c$, 其中, n 是整数, $0 \leq b, c < 1$ 。因为 n 是整数, 它对简化后的 N_h 没有影响; 而 b, c 是在 0 到 1 区间的实数, 会引起偏差。但是, 如果能算出 b, c 造成的偏差, 然后对 N_h^* 作统计学修正, 就可以使简化后的 N_h^* 逼近于原来的 N_h , 从而得到比较准确的简化结果。利用蒙特-卡罗方法模拟 b, c 的动态随机变化(b, c 的动态随机变化是振幅 A 、波长 λ 和外腔长 l_0 在小范围动态随机变化造成的), 这样可以求出简化后的极值点个数 N_h^* 与简化前极值点个数 N_h 动态变化的差值 $C_{N_h}(i)$, 最后对动态变化的差值求统计学平均即可得到 N_h^* 和 N_h 两者间的偏差 M_{N_h} 。如果假定一次观测时间内, 动态变化的次数为 N , 则

$$M_{N_h} = \sum_{i=1}^N P(i) C_{N_h}(i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_{N_h}(i), \quad (7)$$

$$C_{N_h}(i) = N_h^*(i) - N_h(i) = 2[n + c(i)] - \{ [b(i) + [n + c(i)]] + [b(i) - [n + c(i)]] \}. \quad (8)$$

显然 N 与系统受外界干扰程度有关。本文利用蒙特-卡罗方法分别模拟了不同 N 下的 M_{N_h} , 结果表明, 在不同 N 下 M_{N_h} 总是趋近于 1, 所以认为 M_{N_h} 收敛于 1。因此修正后的简化半周期极值点公式为

$$N_h^{**} = N^* - M_{N_h} = \frac{4A}{\lambda} - 1. \quad (9)$$

(9)式是研究简谐振动系统特性的核心公式。该修正方法同样适用于其他周期性振动系统。

对于工程上应用十分广泛的梁式振动系统(这里仅考虑梁的横向振动)是本文的研究重点。对于梁式振动系统,需对 VESP 研究模型进行进一步修正。与简谐振动系统相比,梁式振动系统振动时, $l_A(t)$ 振幅是一个变量 $l_A(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) H_n(t)$, $Y(b)$ 和 $H(t)$ 是 $l(t)$ 对 x 和 t 的分离变量。这里含时项 $H_n(t)$ 要视研究问题的具体的边界条件而定。将 $l_A(t)$ 代入(3)式即可得到梁式振动系统的修正后 VSEP 研究模型

$$N(t) = \begin{cases} \left[2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] + \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) H_n(t)}{\lambda} \right], \\ 2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] + \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) H_n(t)}{\lambda} \geq 0 \\ \left[2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] + \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) H_n(t)}{\lambda} \right], \\ 2 \frac{l_0}{\lambda} - \left[2 \frac{l_0}{\lambda} \right] + \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) H_n(t)}{\lambda} < 0 \end{cases}. \quad (10)$$

3 半导体激光自混合振动特性测量系统及结果分析

半导体激光自混合振动特性测量系统的实验装置如图 1 所示,系统由半导体激光器、透镜、振动系统表面等组成。半导体激光器前端面发出的光经透镜聚焦,照射在运动的散射表面上。激光被运动表面散射,其中一部分散射光又经原路反馈回激光器 packaging

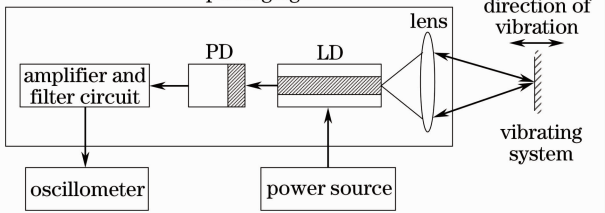


图 1 半导体激光自混合振动特性测量系统实验装置

Fig. 1 Experimental setup for vibration characteristics measurement system based on laser diode self-mixing effect

谐振腔,同谐振腔内的光相混合并调制激光器出射光的光频率及光功率,即产生激光自混合效应。其光功率的变化可以由封装在激光器尾部的光电探测器探测,经电子学处理后可获得所需自混合信号。分析测量得到的自混合信号即可实现振动特性测量。

图 2 为采用悬臂梁作为研究对象时半导体激光自混合振动特性测量系统所获得的典型自混合振动信号。本实验装置中激光器型号为 FU-LD-650-5QN,输出光功率为 5 mW,激光器与被测物之间的距离为 38 cm。如图 2 所示,激光自混合振动干涉信号在一定反馈强度下,波形为不对称的类锯齿波形,即波形的上升沿和下降沿的时间不等,这与传统干涉振动测量系统产生的正弦波形有着显著的差别。同时,物体振动方向不同还导致自混合信号波形倾斜方向的不同。实验中,可以通过自混合振动信号波形的倾斜方向判断待测物体的振动方向。

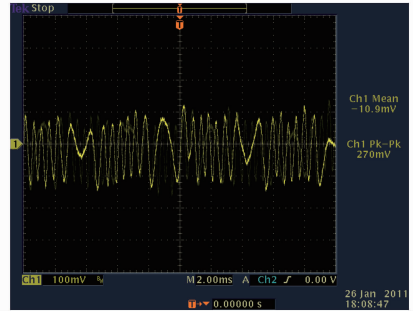


图 2 典型的悬臂梁自混合信号

Fig. 2 Typical waveform of self-mixing signal obtained from cantilever vibration

以图 3 欧拉-伯努利梁为例,具体推导出它在两端固定条件下自由振动时的 $l_A(t)$,并利用 VESP 模型结合实验所得数据来分析确定实验中的梁振幅的特征参数。欧拉-伯努利梁的振动微分方程为^[18]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t), \quad (11)$$

式中 x 为梁的长度方向, y 为梁的振动方向, E 表示

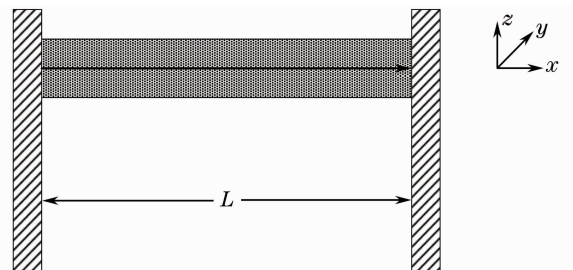


图 3 欧拉-伯努利梁

Fig. 3 Euler-Bernoulli beam

梁的杨氏模量, I 为横截面对中心主轴的惯性矩, ρ 为梁的密度, $q(x, t)$ 为梁上作用的单位长度分布力。考虑最一般的均质等截面梁, E 和 I 均为常数, (11)式可写成

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (12)$$

考虑梁两端都固定且作自由振动的情况, 由此得出微分方程(12)式的边界条件为

$$\begin{cases} y(0, t) = y'(0, t) = 0 \\ y(L, t) = y'(L, t) = 0 \end{cases}, \quad (13)$$

由边界条件利用分离变量法解此微分方程得

$$y(x, t) = Y(x) \sin(pt + \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{\beta_n x}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}} t + \varphi\right) Y_n(x), \quad (14)$$

式中

$$Y_n(x) = A_n \left(\cosh \frac{\beta_n x}{L} - \cos \frac{\beta_n x}{L} \right) + B_n \left(\sinh \frac{\beta_n x}{L} - \sin \frac{\beta_n x}{L} \right),$$

$p_n = \frac{\beta_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$ 表示梁的固有(圆)频率, $\beta_n \approx \frac{2n+1}{2} \pi$,

L 表示梁的长度, A_n, B_n 的比例由 $Y_n(L) = 0$ 确定。(14)式的 $y(x, t)$ 就是要求的 $l_A(t)$, 它有一个含时项和一个位移项组成。它的位移项为 $Y_n(x) = A_n \left(\cosh \frac{\beta_n x}{L} - \cos \frac{\beta_n x}{L} \right) + B_n \left(\sinh \frac{\beta_n x}{L} - \sin \frac{\beta_n x}{L} \right)$, 其中有两个特征参量 A_n, B_n 。

通过半导体激光自混合干涉测量系统观测到的一个作自由振动的简易欧拉-伯努利梁在 $x = 8$ cm 处振动频率为 36.765 Hz(将长时间内振幅衰减很小的振动近似认为自由振动), 该梁的 $L = 18.1$ cm, $h = 0.92$ mm(梁高), $b = 6.22$ mm(梁宽), 故 $I = \frac{bh^3}{12} = 4.036 \times 10^{-13}$ m⁴(横截面对中心主轴的惯性矩); 实验中梁的材质是钢, $E = 2.06 \times 10^{11}$ Pa, $\rho = 7.85 \times 10^3$ kg/m³。将上述参数代入 $p_n = \frac{\beta_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$, 并让 $p_n = 36.765 \times 2\pi = 231.0013$ rad 解出 $n = 9.891$, 可知所研究梁式系统在第 10 固有频率附近自由振动, 其他固有频率下的振动可忽略, 故 $y(8 \text{ cm}, t) = Y_{10}(8 \text{ cm}) \sin(p_{10} t + \varphi)$, 并且通过半导体激光自混合干涉测量系统观察到在该频率下半个周期内的极值点个数维持在 6 左右, 可以看出 $l_A(t) = y(8 \text{ cm}, t)$ 依然适用(9)式得

$$N_h^{**} = \frac{4A}{\lambda} - 1 = \frac{4Y_{10}(8 \text{ cm})}{\lambda} - 1 = 6, \quad (15)$$

式中 $\lambda = 670$ nm。由(15)式和 $Y_n(L) = 0$ 联立可以解出: $A_{10} = B_{10} = 5.4601 \times 10^{-13}$ 。因此, 通过半导体激光自混合干涉测量系统和 VESP 研究模型可以获得梁式振动系统的相关振动参数, 这种方式也同样适用于其他振动系统的振动特性分析。

4 结 论

基于半导体激光自混合干涉效应提出了 VSEP 理论模型, 并利用蒙特-卡罗随机模拟方法对 VSEP 模型得到的半周期极值点公式进行简化修正。随后利用该修正公式和半导体激光自混合干涉测量系统分析研究了梁式振动系统的特性, 求解并最终获得了自由振动情况下悬臂梁振动固有频率阶数为第 10 阶, 振幅特征参量为 $A_{10} = B_{10} = 5.4601 \times 10^{-13}$ 。这种方法可以推广到更加复杂的梁式振动系统以及其他振动系统。

参 考 文 献

- 1 U. Zabit, O. D. Bernal, T. Bosch *et al.*. MEMS accelerometer embedded in a self-mixing displacement sensor for parasitic vibration compensation[J]. *Opt. Lett.*, 2011, **36**(5): 612~614
 - 2 M. Ruiz-Llata, H. Lamela. Self-mixing technique for vibration measurements in a laser diode with multiple modes created by optical feedback[J]. *Appl. Opt.*, 2009, **48**(15): 2915~2923
 - 3 S. Ottonelli, F. D. Lucia, M. D. Vietro *et al.*. A compact three degrees-of-freedom motion sensor based on the laser-self-mixing effect[J]. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 2008, **20**(16): 1360~1362
 - 4 Huaqiao Gui, Liang Lü, Wei Huang *et al.*. Coarse error analysis and correction of a two-dimensional triangulation range finder[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2006, **4**(2): 84~86
 - 5 Huanqin Wang, Tianpeng Zhao, Jun Xu *et al.*. Optimized design of laser range finding system using the self-mixing effect in a single-mode VCSEL[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2006, **4**(2): 87~90
 - 6 W. Tingting, Z. Chuang. The Study of absolute distance measurement based on the self-mixing interference in laser diode [C]. *SPIE*, 2009, **7382**: 73821E
 - 7 F. Gouaux, N. Servagent, T. Bosch. Absolute distance measurement with an optical feedback interferometer[J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(28): 6684~6689
 - 8 Liang Lü, Huaqiao Gui, Tianpeng Zhao *et al.*. Effect of speckle pattern on laser Doppler velocimeters[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2004, **2**(9): 522~525
 - 9 S. Sudo, T. Ohtomo, Y. Takahashi *et al.*. Determination of velocity of self-mobile phytoplankton using a self-mixing thin-slice solid-state laser[J]. *Appl. Opt.*, 2009, **48**(20): 4049~4055
 - 10 L. Lu, H. Gui, J. Xie *et al.*. Effect of external cavity length on self-mixing signals in a multilongitudinal-mode Fabry-Perot laser diode[J]. *Appl. Opt.*, 2005, **44**(4): 568~571
 - 11 Zhen Lufei, Zheng Bin, Zheng Shulian *et al.*. Anisotropic optical feedback of single frequency intra-cavity He-Ne laser[J]. *Chinese Physics B*, 2009, **18**(3): 1141~1146
 - 12 Zhang Zhaoyun, Gao Yang, Zhao Xinghai *et al.*. Theoretical study on self-mixing laser diode maximum measurable velocity [J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(1): 211~214
- 张照云, 高 杨, 赵兴海等. 二极管激光自混合测速上限的理论

- 研究[J]. 中国激光, 2010, **37**(1): 211~214
- 13 Hu Xianfeng. Observation and analysis on self-mixing interference of multi-longitudinal mode laser diode[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(2): 433~439
胡险峰. 多纵模激光二极管自混合干涉的观察和分析[J]. 光学学报, 2010, **30**(2): 433~439
- 14 Hu Xianfeng. Effect of external cavity's feedback light on state density of photon in internal cavity[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(9): 2684~2689
胡险峰. 外腔反馈光对内腔中光子态密度的影响[J]. 光学学报, 2010, **30**(9): 2684~2689
- 15 M. J. Rudd. A laser Doppler velocimeter employing the laser as a mixer-oscillator [J]. *J. Scientific Instruments*, 1968, **1**: 723~726
- 16 R. Lang, K. Kobayashi. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties[J]. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1980, **16**(3): 347~355
- 17 W. M. Wang, K. T. V. Grattan, A. W. Palmer *et al.*. Self-mixing interference inside a single-mode diode laser for optical sensing applications[J]. *J. Lightwave Technol.*, 1994, **12**(9): 1577~1587
- 18 C. Henry Edwards, David E. Penney. *Differential Equations and Boundary Value Problems Computing and Modeling*[M]. Zhang You, Weng Lidong, Yuan Xuegang Transl.. Beijing: Tsinghua University Press, 2007. 620~621
C. Henry Edwards, David E. Penney. 微分方程及边值问题计算与模型[M]. 张友, 王立冬, 袁学刚译. 第三版. 北京: 清华大学出版社, 2007. 620~621

栏目编辑:何卓铭