

# 法布里-珀罗腔振动敏感度的分析

郭海凤<sup>1,2</sup> 吕莎莎<sup>1,2</sup> 刘芳<sup>1,2</sup> 王春<sup>1,2</sup> 沈辉<sup>1,2</sup> 李刘锋<sup>1</sup> 陈李生<sup>1</sup>

(<sup>1</sup>中国科学院武汉物理与数学研究所, 湖北 武汉 430071)  
<sup>2</sup>中国科学院大学, 北京 100049

**摘要** 法布里-珀罗腔被用作高稳定光频振荡器的频率参考。腔长的稳定性会受到由于振动导致的腔体形变的破坏, 进而使激光器产生频率噪声。通常采用有限元分析来考察光腔在任意加速度下的弹性形变。推导出了由腔镜的位移和倾斜带来的腔长变化的通用表达式, 表达式明确地给出了光腔形变和其导致的振动敏感度之间的关系。根据该方法, 分析了一种水平光学腔的振动敏感度, 并且通过优化支撑结构降低了光学腔对振动的敏感性。此外, 设计了一种小型振动平台, 可以在三个相互垂直的方向对腔体施加振动。

**关键词** 激光光学; 法布里-珀罗腔; 光学谐振腔; 激光稳频; 激光光谱; 光频率标准; 有限元分析

中图分类号 O436 文献标识码 A doi: 10.3788/CJL201239.1202004

## Analysis of the Vibration Sensitivity of Fabry-Perot Cavities

Guo Haifeng<sup>1,2</sup> Lü Shasha<sup>1,2</sup> Liu Fang<sup>1,2</sup> Wang Chun<sup>1,2</sup>

Shen Hui<sup>1,2</sup> Li Liufeng<sup>1</sup> Chen Lisheng<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> Wuhan Institute of Physics and Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China)  
<sup>2</sup> University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

**Abstract** Fabry-Perot cavities are used as frequency references for ultrastable optical oscillators. The deformation of cavity induced by the vibration degrades the length stability of the cavity and laser produce frequency noise. Finite element analysis (FEA) is often used to examine the deformation of the cavity at arbitrary acceleration. A general expression of the change of the cavity length induced by the displacements and tilting angles of the cavity mirrors is deduced. This expression provides the definite connection between the cavity deformation and the vibration sensitivity. Based on this method, it is analyzed that the vibration sensitivity of a horizontal optical cavity, and its sensitivity to vibration can be reduced by optimizing the mounting configurations. In addition, a compact vibration platform that is able to shake the optical cavity in three orthogonal directions is designed.

**Key words** laser optics; Fabry-Perot cavities; optical resonator; laser frequency stabilization; laser spectroscopy; optical frequency standard; finite element analysis

**OCIS codes** 140.3410; 140.3425; 140.4780

## 1 引 言

在高稳定光频振荡器中, 激光被锁定在一个作为频率参考的高细度法布里-珀罗腔(以下简称光腔)上<sup>[1,2]</sup>, 激光的频率稳定性得到极大地提高。目前随着高效振动隔离的应用、光腔热噪声的降低<sup>[3~11]</sup>以及其他稳定措施的不断改进, 这类光频振荡器的短期(小于 100 s)频率稳定性目前已达到了 $10^{-16}$ 量级<sup>[12,13]</sup>。各种波长的高稳定光频振荡器已

被广泛应用于光学频率标准<sup>[14~16]</sup>、高分辨率激光光谱<sup>[17~21]</sup>和洛伦兹对称性检验<sup>[22,23]</sup>等研究领域中。

降低由振动造成的光腔的频率噪声是研制高稳定光学谐振腔的重要环节之一。地面振动通过支撑结构传至腔体, 引起光腔材料的弹性形变, 构成谐振腔的两个反射镜发生相对位移和倾斜, 最终导致光腔光学长度的变化。因此振动将直接导致锁定在光腔上的激光器的频率噪声。目前通常有两种方式用

收稿日期: 2012-07-03; 收到修改稿日期: 2012-08-07

作者简介: 郭海凤(1985—), 女, 硕士研究生, 主要从事激光光学方面的研究。E-mail: guohaifeng1205@sohu.com

导师简介: 陈李生(1972—), 男, 研究员, 博士生导师, 主要从事激光物理方面的研究。E-mail: lchen@wipm.ac.cn

来隔离振动,即主动减振和被动减振。被动减振采用弹簧结构或者缓冲材料<sup>[2]</sup>,而主动减振是利用位移执行机构,如压电陶瓷(PZT)和电磁线圈,来控制光腔所在平台的移动,从而抵消外界振动<sup>[5,7]</sup>。这两种隔振方式可以将振动的大部分高频信号过滤掉,但是对低频(0.1~1.0 Hz)振动的衰减是非常困难的。而且这样的高精度被动或者主动控制系统成本高、体积大。

除了采取各种振动隔离措施以外,降低光腔本身的振动敏感性也是一个重要的途径。通过对光腔几何形状、支撑结构和支撑位置的优化,可大幅度降低腔长对振动的敏感性。这一研究最早是在一垂直腔实现的<sup>[3]</sup>,即通过将支撑点选在腔体中部,腔在竖直方向上的振动敏感性降低了2个量级(100 kHz/g,  $g$  为重力加速度)。采用有限元分析(FEA)可以得到各种类型的光腔的弹性形变<sup>[5,7,9,24,25]</sup>,有助于光腔的振动敏感性的分析与优化。通过采取特殊的支撑位置,水平光腔的振动敏感性<sup>[5,7,9]</sup>也得到大幅度的降低,其垂直和水平方向振动敏感性分别降到了10 kHz/g 和 38 kHz/g。在这些工作中光腔一般都是直接搭放在几个支撑面上以尽量减小支撑对光腔的干扰,这种结构在实验室中得到了广泛的应用。一种球形腔结构<sup>[11]</sup>能够在光腔指向不断变化和处于加速运动的情况下正常运转。该光腔通过两点夹持的方法来固定,这两点选在球体的一条中轴线与球面的两个交点上,同时该中轴线与光轴(是另一中轴线)有一个特殊的夹角,这种设计使得腔长对各个方向的振动和夹持压力都不敏感。虽然在光腔振动敏感性分析和优化方面取得了很大进展,但在其他方面还有待进一步地完善。在光腔形变导致腔长变化的理论分析中,现有的分析一般只考虑腔镜在一个平面内的倾斜<sup>[26]</sup>,实际上影响光腔长度的有腔镜的三个平动自由度和两个相互垂直的转动自由度,这些都应包含在理论分析中。在对球形腔的分析中<sup>[11]</sup>已考虑了各种位移和倾斜自由度,但相应的理论结果中采用的是光轴在两个腔镜处相对机械中心的偏差<sup>[11]</sup>,无法直接采用 FEA 的结果。此外腔镜倾斜对腔长的影响<sup>[5,9]</sup>也需要更全面地加以分析。

本文给出了光腔腔长随腔镜平移和倾斜的变化公式,腔镜的平移和倾斜可直接采用在 FEA 中得到的数值结果,这样可以分析光腔在任意振动作用下谐振频率的变化。采用这种方法对一水平光腔的振动敏感性进行了分析和优化。设计了一种小型的振动平台,能在  $X, Y, Z$  三个方向对腔体独立地施加

振动,并可随光腔一起放入真空系统进行测量。这一套分析方法适用于做线性和转动加速运动的各种类型光腔,也可用于分析加工和安装偏差对谐振频率的影响,同时也有助于进一步缩小 FEA 与实测结果的偏差,提高振动敏感性分析方法的可靠性,从而加速各种低振动敏感性光腔的研制。

## 2 光学谐振腔形变所导致的腔长变化

典型的高稳定光腔通常由两个腔镜和一个起支撑作用的腔体构成。腔镜一般是凸面镜、凹面镜、平面镜或者这三种反射镜的组合。这两个反射镜相互平行,光线在两反射镜间来回反射形成谐振。两个反射镜中间是一个采用低热膨胀系数特种玻璃材料制成的支撑体,通常称之为腔体。腔镜基片通常采用与腔体相同或相近的材料制成,然后用光学胶合的方法将其固定在腔体的两端。

光学谐振腔的谐振频率是和它的腔长  $L$  直接相关的。这里只考虑线性腔,即光在腔内往返的路径是重合的。腔内光的传播路径即光轴是由两个腔镜反射面的曲率中心的连线所确定的<sup>[26,27]</sup>,光轴和两个反射面各有一个交点,这两个交点之间的距离就是腔长  $L$ (如图 1 所示),也就是光轴在两个反射面之间被截取的那一段长度。由于腔镜反射面是由镀膜形成的,光线在镀膜中有一个等效的穿透深度,这会对腔长带来额外的修正。但是镀膜厚度在整个腔长上所占的比例很小,因此在分析光腔振动敏感性中对这部分略去不计。

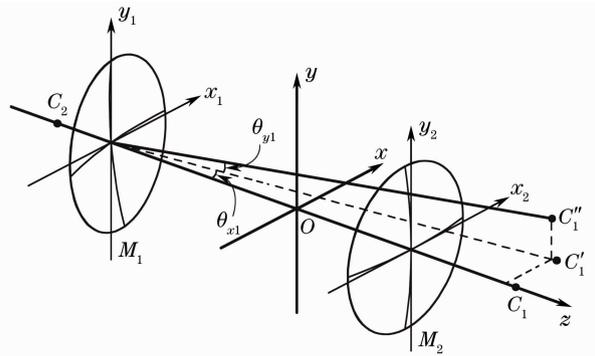


图 1 由腔镜倾斜导致的光学谐振腔光轴变化示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the optical axis with tilted mirror

振动加速度是一个复杂的随机过程,即有实验室坐标系中  $X, Y, Z$  三个方向的线性,也可能有绕三个轴的转动加速度。振动通过光腔的支撑结构作用在腔上,使腔体和腔镜发生形变,从而导致腔长的变化。例如考虑一种典型的水平安放的光腔,其光

轴沿着  $Z$  方向,光腔的底面与支撑结构相接触。在这种结构中, $X$  方向的振动会导致腔镜绕  $Y$  轴的转动, $Y$  和  $Z$  方向的振动会导致腔镜绕  $X$  轴的转动,同时这三个方向的振动可能会导致腔镜的平动。

直接影响到光腔长度  $L$  的是腔镜在  $X, Y, Z$  三个方向的平移以及腔镜在两个相互垂直方向上的倾斜。下面定量分析由腔镜平移和倾斜所导致的腔长的变化。图 1 是构成光腔的两个反射镜的示意图,在图中标出了相关的坐标系以及由腔镜倾斜导致的光学谐振腔光轴的变化。 $M_1$  和  $M_2$  是构成光腔的两个反射镜, $C_1$  和  $C_2$  分别是  $M_1$  和  $M_2$  无倾斜时其球面的曲率中心, $O$  点是线段  $C_1C_2$  的中点,线段  $C_1C_2$  长为  $l_{C_1C_2}$ 。 $X-Y-Z$  是实验室坐标系,其原点  $O$  选在线段  $C_1C_2$  的中点。 $x_i-y_i-z_i$  ( $i = 1, 2$ ) 是固定在两个腔镜上的坐标系( $z_i$  在图中未画出)。为了保持图示的

简洁性,这里只画出了  $M_1$  的倾斜。在实验室坐标系中腔镜中心在三个方向上的平动位移为  $\Delta_{x_i}, \Delta_{y_i}, \Delta_{z_i}$  ( $i = 1, 2$ )。 $C'_i$  是  $M_i$  绕  $y_i$  轴转动了一个角度  $\theta_{x_i}$  后对应的曲率中心的位置,然后  $M_i$  又绕  $x_i$  轴转动了  $\theta_{y_i}$ , 这样曲率中心移到了  $C''_i$ 。过  $C'_1$  和  $C'_2$  的连线就确定了腔镜倾斜后光腔的光轴。 $\theta_{x_i}$  也即腔镜在  $x_i-Z$  平面内的转角,而  $\theta_{y_i}$  即是在  $y_i-C'_i$  平面内的转角。腔镜绕  $z_i$  轴的转动不会影响光轴和腔长。角度的正负约定如下:对于  $M_1$  镜,沿着  $-Y$  方向或  $X$  方向看去,逆(顺)时针转动的角度为正(负)。 $M_2$  镜转角的符号定义与  $M_1$  的正好相反,即沿着  $-Y$  方向或  $X$  方向看去,逆(顺)时针转动的角度为负(正)。

按照上面对坐标系、位移、角度及其符号的定义,实验室坐标系中光腔形变后两个腔镜新的曲率中心  $C''_i$  的位置坐标为

$$\begin{pmatrix} X''_{C'_i} \\ Y''_{C'_i} \\ Z''_{C'_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{x_i} \\ \Delta_{y_i} \\ \Delta_{z_i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_i \sin \theta_{x_i} \cos \theta_{y_i} \\ R_i \sin \theta_{y_i} \\ (-1)^{i-1} \left[ \frac{1}{2} l_{C_1C_2} - R_i (1 - \cos \theta_{x_i} \cos \theta_{y_i}) \right] \end{pmatrix}, \quad (1)$$

式中  $R_i$  为两腔镜的曲率半径,  $l_{C_1C_2} = R_1 + R_2 - L_0$ ,  $L_0$  为形变前的腔长。由  $C''_i$  的坐标就可得到光腔形变后的腔长

$$L = R_1 + R_2 - l_{C''_1C''_2}, \quad (2)$$

式中  $l_{C''_1C''_2} = \sqrt{(X''_{C'_1} - X''_{C'_2})^2 + (Y''_{C'_1} - Y''_{C'_2})^2 + (Z''_{C'_1} - Z''_{C'_2})^2}$ ,  $l_{C''_1C''_2}$  为线段  $C''_1C''_2$  的长度。因为平动位移和转动角度都是小量,所以可以对(2)式中的  $l_{C''_1C''_2}$  进行泰勒展开,并只保留到二阶小项,由此得到的腔长的相对变化为

$$\frac{\Delta L}{L} = -\frac{\Delta Z}{L} + \frac{1}{1 - g_1 g_2} \sum_{\alpha=X,Y} \left[ - (1 - g_2) \frac{\Delta_\alpha \theta_{\alpha 1}}{L} + (1 - g_1) \frac{\Delta_\alpha \theta_{\alpha 2}}{L} - \frac{(1 - g_1)(1 - g_2)}{2} \left( \frac{\Delta_\alpha}{L} \right)^2 + \theta_{\alpha 1} \theta_{\alpha 2} + \frac{g_2}{2} \theta_{\alpha 1}^2 + \frac{g_1}{2} \theta_{\alpha 2}^2 \right], \quad (3)$$

式中  $g_i = 1 - \frac{L}{R_i}$  是光腔的几何因子,  $\Delta_Z$  ( $\Delta_Z = \Delta_{z_1} - \Delta_{z_2}$ ) 和  $\Delta_\alpha$  ( $\Delta_\alpha = \Delta_{\alpha 1} - \Delta_{\alpha 2}$ ) 是两个腔镜之间相对的平移,  $\theta_{\alpha i}$ ,  $\alpha = X, Y$  是腔镜  $i$  在  $\alpha-Z$  平面内的倾角。严格地讲,(3)式中的  $\theta_{y_i}$  应是  $\theta_{y_i}$ , 即腔镜在  $y_i - C'_i$  平面内的转角  $\theta_{y_i}$  (腔镜绕  $x_i$  轴转过的角度),但是在小角度近似下可用腔镜在  $Y-Z$  平面内的倾角来替代,这样在分析腔长变化时就可以直接采用 FEA 的结果。

考虑一种理想情况,即腔镜位移和倾斜都是纯粹由振动引起的。这样(3)式中的二阶项相对于一阶项  $\Delta_Z/L$  都很小,可以忽略不计。例如对于上面提到的水平腔,由有限元分析得到  $\Delta_Z/L \approx 10^{-10}/g$ , 而其他相对位移或倾角分量最大不超过  $10^{-6}/g$ , 这

样对应二阶项的贡献不会超过  $10^{-12}/g$ , 都可忽略不计。在这种理想情况下,腔镜倾斜对腔长的影响可以忽略。

实际上各种加工和安装偏差是不可避免的。例如腔镜的安装会导致两个镜面中心不能严格对准,腔体两个端面与光轴不是严格垂直的,此外重力也会产生腔镜位移和倾斜。因此(3)式中的相对位移  $\Delta_\alpha$  和角度  $\theta_{\alpha i}$  都可分为两部分:一部分是不随时间发生变化的静态项,另一部分是由振动引起的动态项。按这种分解方法,(3)式中的混合二阶项  $\Delta_\alpha \theta_{\alpha i}$  可写为

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha \theta_{\alpha i} &= (\Delta_{\alpha 0} + \Delta'_\alpha) (\theta_{\alpha 0} + \theta'_{\alpha i}) = \Delta_{\alpha 0} \theta_{\alpha 0} + \\ &\Delta_{\alpha 0} \theta'_{\alpha i} + \Delta'_\alpha \theta_{\alpha 0} + \Delta'_\alpha \theta'_{\alpha i}. \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $\Delta_{a0}$  和  $\theta_{ai0}$  代表静态偏差,而  $\Delta'_{ai}$ 和  $\theta'_{ai}$  分别代表由振动引起的动态偏差(下同)。其他位移和角度的二阶项都可以做相应的分解以便于定量地分析各种形变对腔长的影响,例如角度的二阶项中  $\theta_{ai}\theta_{ak}$  可分解为

$$\theta_{ai}\theta_{ak} = (\theta_{ai0} + \theta'_{ai})(\theta_{ak0} + \theta'_{ak}) = \theta_{ai0}\theta_{ak0} + \theta_{ai0}\theta'_{ak} + \theta_{ak0}\theta'_{ai} + \theta'_{ai}\theta'_{ak}, \quad (i, k = 1, 2). \quad (5)$$

而(3)式中的位移二阶项相对其他项而言可忽略不计。(4)式和(5)式中第一项是纯静态项,与振动敏感性无关。最后一项是纯振动项,如上所述可忽略不计。这里特别要注意的是中间两个混合项:如果混合项中包含的腔镜静态位移或倾斜较大,那么这两项有可能会对振动敏感性有较大的贡献。一般情况下腔镜安装偏差  $\Delta_{a0}/L$  可控制在  $1 \times 10^{-2}$  以内。以上面提到的水平腔为例,FEA 显示,当振动加速度沿  $Z$  方向时,有关的腔镜位移和倾角为:  $|\Delta'_{a'z}/L| \approx 10^{-10}/g$ ,  $|\theta'_{Yi}| \approx 1 \times 10^{-6}/g$ , 这里  $\theta'_{Y1}$  和  $\theta'_{Y2}$  是反号的,即腔镜都向同一侧倾斜。此时  $|\Delta_{Y0}\theta'_{Yi}/L| \approx 1 \times 10^{-8}/g$ , 同一阶项  $\Delta_Z/L$  相比已不能忽略。

当光腔接近非稳腔,即  $g_1g_2 \rightarrow 1$  时,(3)式中二阶项对腔长变化的贡献都会加大,腔长对腔镜位移和倾角的变化非常敏感,使得加工、安装和准直难度增大,且可能导致较高的振动敏感性。例如,近平面腔,对应于  $g_1$  和  $g_2$  都非常接近 1 的情况( $g_1 = g_2 = 1 - \epsilon, \epsilon \rightarrow 0$ ),则(3)式中所有的角度二阶项都趋于  $(1/\epsilon)\theta_{ai0}\theta'_{ak}$ , 此时腔长会对倾角的变化非常敏感。

需要说明的是振动也会引起腔镜反射面面型(曲率半径)的变化。在 FEA 中要按照反射面的大小和其曲率半径来建立腔镜的模型,而不是简单地用平面镜来代替凹面镜。这样分析结果中就自然包括了由于曲率变化而导致的腔镜中心的位移,仍可以用(3)式来分析腔长的变化。

### 3 水平腔振动敏感度分析

以水平腔为例,采用 FEA 方法并结合上节的结果来定量地分析光腔振动敏感度。图 2 给出了该水平腔及支撑结构的示意图。腔体的长宽高分别为

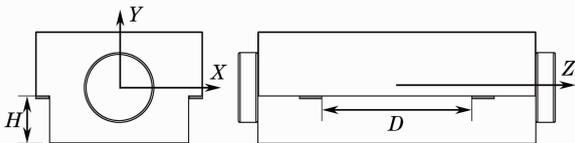


图 2 光学腔前视图和侧视图

Fig. 2 Front and side views of the optical cavity

100,60 和 40 mm。腔体和腔镜的材料均为超低膨胀玻璃(ULE)。光腔和支撑结构所涉及到的材料参数如表 1 所示。

表 1 材料的参数

Table 1 Material parameters

Parameter	Teflon	ULE
Density / (kg/m <sup>3</sup> )	2160	2210
Elastic modulus / (N/m <sup>2</sup> )	$5 \times 10^8$	$6.76 \times 10^{10}$
Poisson ratio	0.26	0.17

图 3 为重力分别沿  $X, Y, Z$  三个方向时腔镜位移与倾斜的示意图。考虑到水平光腔及支撑结构的对称性,当重力沿  $Y$  或  $X$  方向时两个腔镜的倾角大小相等且符号相同,即  $\theta'_{a1} = \theta'_{a2} = \theta'_a$ , 此外在重力作用方向上两个腔镜之间的相对位移为零,即  $\Delta'_{a1} = \Delta'_{a2} = 0$ 。上标表示重力(或振动)的方向,上标中的撇号是用来和静态偏差(如腔镜安装偏差)加以区分。当重力沿  $Z$  方向时腔镜倾斜的方式与重力在  $-Y$  或  $X$  方向时是不同的,两腔镜的倾斜大小相等但符号相反,即  $\theta'_{Y1} = -\theta'_{Y2} = \theta'_Z$ 。

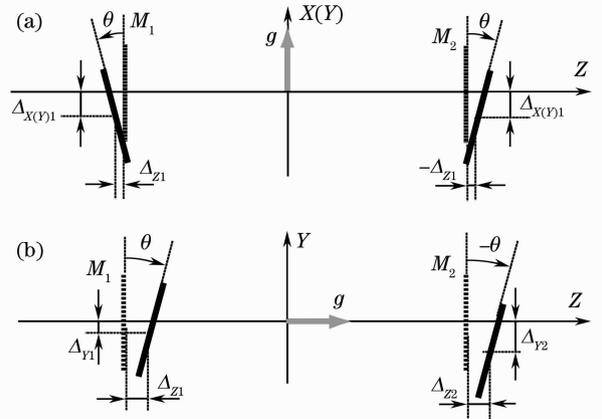


图 3 在振动作用下腔镜的倾斜和位移的示意图。

(a) 振动沿  $X, Y$  方向; (b) 振动沿  $Z$  方向

Fig. 3 Schematic diagram of the tilt and displacement of cavity mirrors under the influence of vibration.

(a)  $X, Y$  direction; (b)  $Z$  direction

采用 FEA 定量地计算了水平腔在振动影响下腔镜的位移和倾斜。该计算所采用的模型是垫片支撑的水平腔,如图 2 所示。其中  $H$  是腔体两侧面切除部分的高度,  $D$  是两垫片之间沿  $Z$  轴方向的距离。支撑结构采用的材料是 Teflon。在 FEA 中采用的是静态分析<sup>[24]</sup>, 约束条件为 4 个垫片的底面固定( $X, Y, Z$  三个方向上位移为零)。垫片和腔体的接触面的接触类型为接合,即两接触面就像焊接在一起一样。垫片的网格尺寸为 1.5 mm, 其他部分的网格尺寸为 4.5 mm。在 FEA 中采用静态分

析<sup>[18]</sup>来计算一特定方向振动所导致的腔体形变。这一方法就是在有限元建模中将支撑的底面固定，同时在振动方向上对模型施加一个类似于重力的力，即该力作用在腔体和支撑的所有部分，且每个微小体元上的力的大小为体元的质量乘以加速度。这里加速度的大小统一取  $g=9.8 \text{ m/s}^2$ 。在两个腔镜反射面的中心各取一点，以此点为对称点，分别沿着  $X, Y$  方向上下等间距(2.5 mm)各取 2 点，共 9 个取样点。通过 FEA 得到所有取样点在  $X, Y, Z$  三个方向的位移。由中心点的位移可求出两个腔镜在三个方向上的位移差。以  $X(Y)$  方向上的 5 个取样点的位置坐标和位移分别为横、纵坐标拟合出一条直线，由直线的斜率即可得到腔镜在  $X(Y)-Z$  平面内的倾斜角。

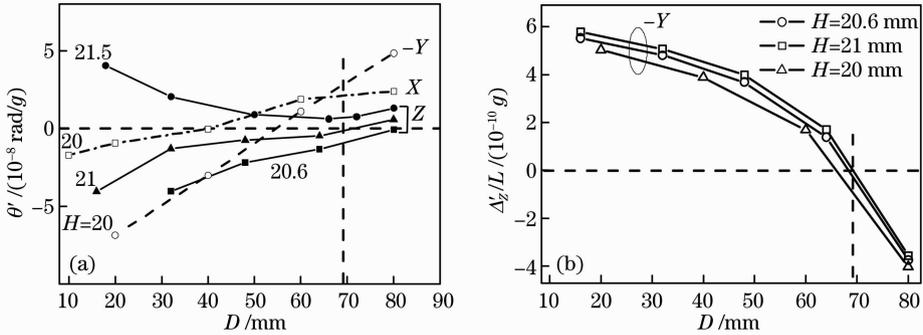


图 4 在振动作用下水平腔腔镜的倾斜和位移的 FEA 结果。(a)腔镜倾斜角随支撑点间距  $D$  和支撑高度  $H$  的变化；(b)当重力沿  $-Y$  方向时两腔镜中心在  $Z$  方向的位移之差  $\Delta'_z/L$

Fig. 4 Vibration induced mirror tilt and displacement of the horizontal cavity obtained with FEA. (a) Mirror tilting angles versus supporting position  $D$  and height  $H$ ; (b) differential displacement  $\Delta'_z/L$  of two mirror centers along the  $Z$  direction when the force of gravity is applied along the  $-Y$  direction

分析由腔镜位移和倾斜导致的腔长变化，并在讨论如何选择合适的  $H$  和  $D$  来降低光腔的振动敏感度。由(3)~(5)式并考虑到  $\theta'_{Y1} = \theta'_{Y2} = \theta'_Y$  和  $\Delta'_Y = 0$ ，可以得到当振动沿  $X$  或  $Y$  方向时腔长的变化：

$$\frac{\Delta L^\alpha}{L} = -\frac{\Delta'_Z}{L} + \frac{1}{1-g_1g_2} \left[ (g_2-g_1) \frac{\Delta_{a0}}{L} \theta_{\alpha}^{\prime} + (1+g_2) \theta_{a10} \theta_{\alpha}^{\prime} + (1+g_1) \theta_{a20} \theta_{\alpha}^{\prime} \right], \quad (\alpha = X, Y). \quad (6)$$

(6)式的推导用到了  $\theta_{a1}^{\prime} = \theta_{a2}^{\prime} = \theta_{\alpha}^{\prime}$  和  $\Delta_{\alpha}^{\prime} = 0$ 。当振动沿  $Z$  方向时与以上两种情况是不同的，两个腔镜向同一方向倾斜，即  $\theta'_{Y1} = -\theta'_{Y2} = \theta'_Y$ ，此外  $\Delta'_Y \neq 0$ ，在这种情况下腔长变化为

$$\frac{\Delta L^Z}{L} = -\frac{\Delta'_Z}{L} + \frac{1}{1-g_1g_2} \left[ (g_1+g_2-2) \frac{(\Delta_{Y0} + \Delta'_Y)}{L} \theta_Y^{\prime} - (1-g_2) \theta_{Y10} \theta_Y^{\prime} + (1-g_1) \theta_{Y20} \theta_Y^{\prime} \right]. \quad (7)$$

(6)式和(7)式中的  $\Delta_{a0}/L$  是两腔镜在  $\alpha$  方向的同轴度偏差，人工安装过程中  $\Delta_{a0}/L$  一般可控制在  $10^{-2}$  以内，注意(7)式中的  $\Delta'_Y/L \ll 10^{-2}$ ，因此忽略该项的影响。而腔体两端面的垂直度偏差  $\theta_{a0}$  可写为  $\theta_{a10} = \theta_{a0}$ ,  $\theta_{a20} = -\theta_{a0} + \Delta\theta_{a0}$ ，其中  $\theta_{a0}$  表征两端面倾斜的公共部分(即相对光轴的垂直度偏差)， $\Delta\theta_{a0}$  是两端面的不平行度。平行度在测量和加工工艺上都相对比较容易实现，因此  $\Delta\theta_{a0}$  可以控制在很小的范

围，如小于  $5 \times 10^{-5} \text{ rad}$ (约为  $10''$ )。当考虑光腔的加工和安装偏差时，光腔对沿  $Z$  方向振动的敏感度可能会大于另外两个方向。当重力沿  $X$  和  $Y$  方向时，腔镜倾斜  $\theta_{\alpha}^{\prime}$  在  $10^{-8} \text{ rad/g}$  的量级(如图 4 所示)，这样(6)式中方括号内第一项可能会带来  $10^{-10}/g$  量级上的振动敏感度。但如果能够采用对称腔，即  $g_1 = g_2$ ，那么就能大幅度降低第一项对振动敏感度的影响，完全可以将其降低到

( $10^{-11} \sim 10^{-12}$ )/ $g$  的量级。类似的分析表明(6)式方括号中后两项也能够控制在  $10^{-12}/g$  量级以下。而振动沿  $Z$  方向时却与以上两种情况是完全不同的,两个腔镜是向同一方向倾斜。在这种情况下,即便是采用对称腔,(7)式中方括号内第一项也不为零,而且方括号中后两项不可能像  $Y$  和  $X$  方向的振动那样相互抵消。例如在某些支撑高度  $H$ ,如  $H = 16 \text{ mm}$ ,  $\theta_z^z$  会达到  $10^{-7} \text{ rad}/g$  的量级,那么(7)式中方括号内第一项的贡献会达到  $10^{-9}/g$  的量级。此外腔体端面垂直度加工偏差  $\theta_{\infty}$  如按  $6 \times 10^{-3} \text{ rad}$ (约为  $20'$ )计,则后两项的贡献也很可能会达到  $10^{-9}/g$  量级。

从以上分析可以看出对这种光腔的优化应先从降低  $Z$  方向振动导致的腔镜倾斜入手。由图 4(a) 给出的结果可看出在  $H=21 \text{ mm}$  附近,在很宽的  $D$  的范围内,腔镜在  $Z$  方向振动作用下的倾角都在  $2 \times 10^{-8} \text{ rad}/g$  以内。进一步由图 4(b)可知当  $H=21 \text{ mm}$ ,  $D=69 \text{ mm}$  时, $Y$  方向振动引入的腔镜相对

位移  $\Delta_z^z$  达到最小(振动沿  $X$  和  $Z$  方向时  $\Delta_z^z/L < 10^{-11}/g$ ,可忽略不计)。在(21,69)组合下腔镜在  $X, Y$  方向振动作用下的倾角在  $3 \times 10^{-8} \text{ rad}/g$  以下。

作为进一步的定量分析与优化,图 5 给出了存在加工/安装偏差时腔长随  $H$  和  $D$  的变化。图中的阴影区域是按  $\theta_0 = \pm 3 \times 10^{-3} \text{ rad}$ (约为  $10'$ )的端面垂直度偏差和  $\Delta_0 = \pm 1 \text{ mm}$  的安装偏差得到的腔振动敏感度变化区间。图 5(a),(b)中的结果是按如下参数得到的:光腔几何参数为  $g_1 = 0.9, g_2 = 0.86$ 。在图中虚线所标出的位置附近,光腔在  $X, Y, Z$  三个方向的振动敏感度都能被控制在  $1 \times 10^{-10}/g$  以内。作为比较,在图 5(c)中也给出了几何参数为  $g_1 = 1, g_2 = 0.8$  时的振动敏感度( $X, Y$  方向)。正如前面所分析的,第二种光腔具有更高的非对称性,因此其振动敏感性大于第一种光腔。

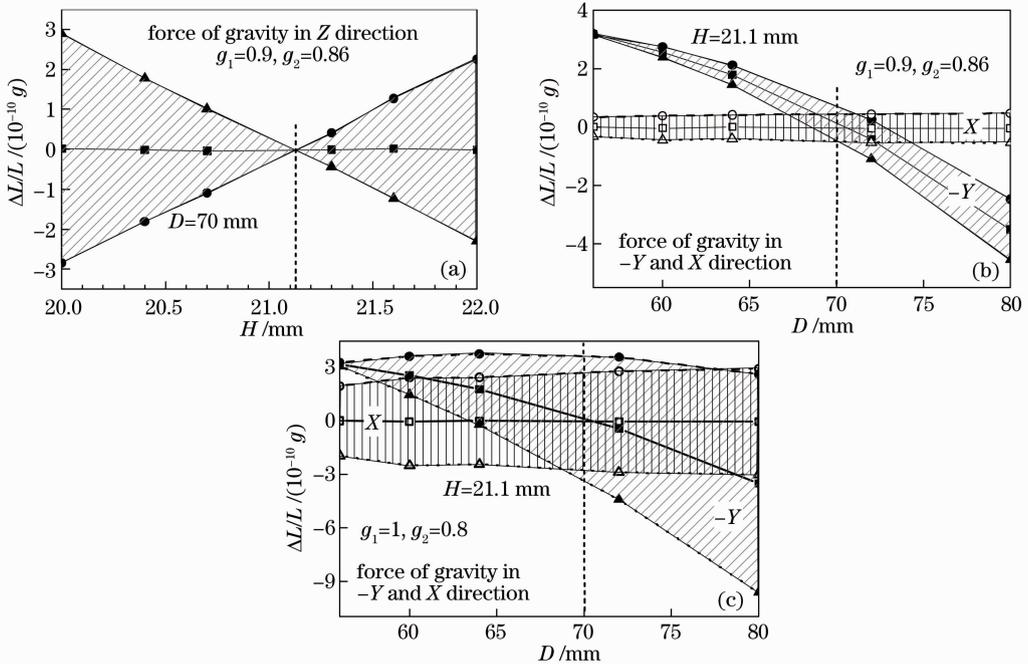


图 5 分别在  $X, Y, Z$  三个方向施加重力时腔长的变化

Fig. 5 Change of cavity length when a force of gravity is applied respectively along the  $X, Y$  and  $Z$  directions

在 FEA 中也尝试了不同的建模条件。需要对支撑垫片的底面或其与腔体接触面的位移进行约束。采用了两种约束方式:1) 仅对垂直方向的位移进行约束;2) 对三个方向的位移同时进行约束。FEA 结果表明如果重力沿  $-Y$  方向并且直接对垫片和腔体的接触面进行约束,那么在三个方向同时进行约束时与其他约束方式的结果相比差别较大,因此应尽量避免采用这种约束方式。在有限元建模

中还需考虑支撑垫片和腔体之间的接触类型。这里尝试了 3 种类型:接合、无穿透(在两个零件的接触过程中,它们相对的两个表面之间可以全部或部分接触或分离,但两个零件中的任何一部分都不能进入到另一个零件中)、无穿透并设定摩擦。这三种接触条件的计算结果基本相同,但不同接触类型在某些  $D$  和  $H$  处的结果会有细微差别,这一点在对数值分析与实测结果进行比较时应特别留意。另外将

支撑部分的材料由 Teflon 换为相对较软的氟橡胶，而计算结果基本保持一致。

#### 4 小型振动平台

设计了一种小型振动平台。利用该平台可以独立地在  $X, Y, Z$  三个方向对光腔施加振动，结合拍频实验就可以测量光腔在不同方向上的振动敏感度，在实验上验证理论和 FEA 的结果。

在测量中需要产生的加速度的大小在  $10^{-4} g \sim 10^{-3} g$  量级，可以由 PZT 来产生。当在 PZT 的两电极之间加上一个正弦电压信号时，PZT 的长度也会按照正弦规律变化，产生周期性的振动信号。利

用加速度计可以测量产生振动的大小和相对于驱动信号的相位。

图 6 给出了小型振动平台的结构示意图。振动平台主要分为底板和 U 形光腔支撑件两个部件，光腔放置在 U 形支撑件上面。在 U 形支撑两个相邻侧面和底面都安装了 PZT 的尺寸为  $4.5 \text{ mm} \times 3.8 \text{ mm} \times 5.0 \text{ mm}$ ，最大电压为  $200 \text{ V}$ ，这样就可可在  $X, Y, Z$  三个方向对 U 型支撑施加振动。在  $X, Y, Z$  中任意一个方向施加振动时，耦合到其他两个方向的振动要尽量小，这样就可以将测量结果直接与该方向的理论分析结果进行比较。对振动平台进行了初步的检测，分别在  $Z$  和  $X$  方向振动 U 形支撑，同

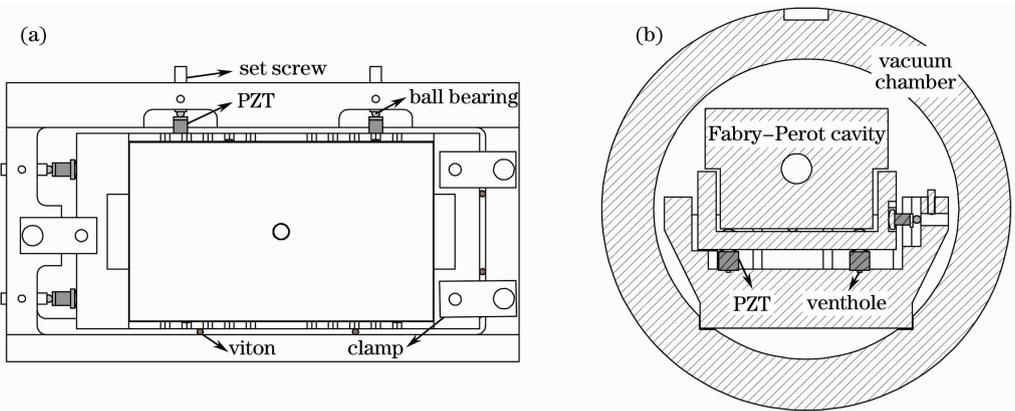


图 6 小型振动平台结构。(a)俯视图；(b)放置于真空室中振动平台的一个横截面

Fig. 6 Compact vibration platform. (a) Top view; (b) cross section of the platform inside the vacuum chamber

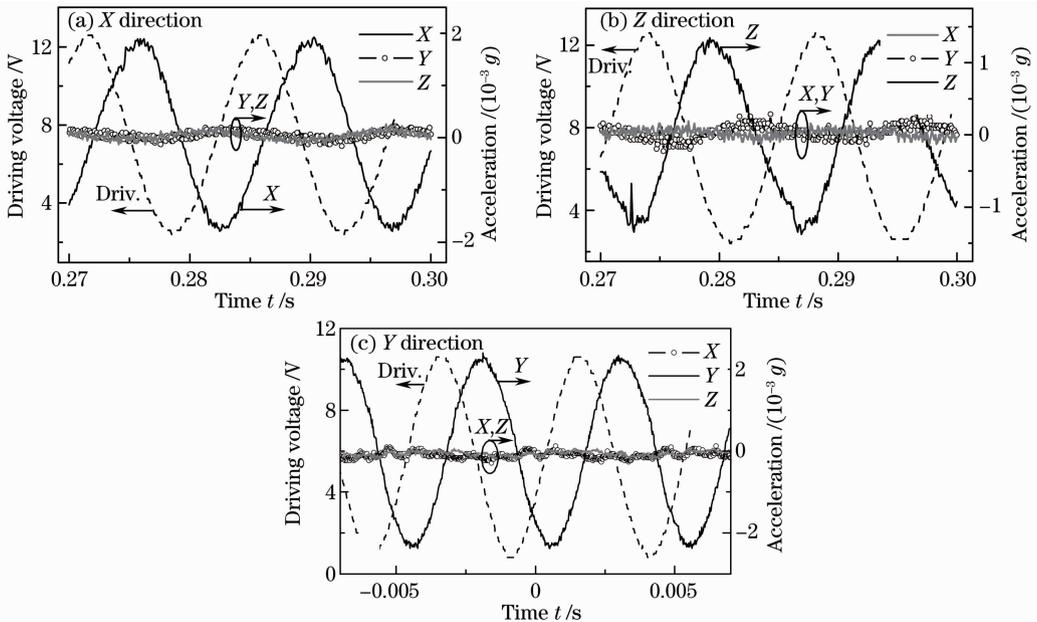


图 7 振动平台分别在(a)  $X$ 、(b)  $Z$ 、(c)  $Y$  向驱动时的响应。其中虚线是加在 PZT 上的驱动信号，实线是平台在  $X, Z, Y$  方向上的加速度

Fig. 7 Response of the vibration platform under the drive along the (a)  $X$ , (b)  $Z$  and (c)  $Y$  directions. The dashed lines are the driving signal applied to the PZT. The solid lines are the accelerations in the  $X, Z$  and  $Y$  directions

时测量 U 形支撑在  $X, Y, Z$  三个方向上的加速度。图 7 给出了振动平台分别在  $X, Z, Y$  向正弦驱动时的响应。 $X$  和  $Z$  向驱动时加在 PZT 上的驱动信号的频率选在 75~80 Hz 的范围内,  $Y$  向驱动时信号频率在 200 Hz 附近。驱动信号的幅度为 10 V(峰峰值)。测量结果表明沿其中任意一个方向振动支架耦合到其他两个方向的振动都小于驱动方向加速度的 10%。

## 5 结 论

采用 FEA 可以考察光腔在任意加速度下的形变,从而得到腔镜的平移和倾斜,利用描述光腔腔长随腔镜平移/倾斜变化的公式,定量地分析光腔在振动作用下的谐振频率的变化。采用该方法对一种水平光腔的振动敏感性进行了分析和优化。由于存在加工和安装偏差,在进行振动敏感度分析和优化时,要优先考虑沿光轴方向振动带来的腔镜倾斜。通过改变支撑的水平位置和高度,水平腔在  $X, Y, Z$  三个方向的振动敏感度都有降低到 10 kHz/ $g$  以下的潜力。选择对称腔( $g_1 = g_2$ )可进一步降低由加工和安装偏差导致的振动敏感度。此外还介绍了一种小型振动平台,其能在  $X, Y, Z$  三个方向对腔体独立地施加振动。利用该振动平台对水平光腔三个方向上的振动敏感性进行测量,并与数值分析的结果加以比较。

## 参 考 文 献

- 1 R. Drever, J. Hall, F. Kowalski *et al.*. Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator[J]. *Appl. Phys. B*, 1983, **31**(2): 97~105
- 2 B. Young, F. Cruz, W. Itano *et al.*. Visible lasers with subhertz linewidths[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1999, **82**(19): 3799~3802
- 3 M. Notcutt, L. Ma, J. Ye *et al.*. Simple and compact 1-Hz laser system via an improved mounting configuration of a reference cavity[J]. *Opt. Lett.*, 2005, **30**(14): 1815~1817
- 4 K. Numata, A. Kemery, J. Camp. Thermal-noise limit in the frequency stabilization of lasers with rigid cavities[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, **93**(25): 250602
- 5 T. Nazarova, F. Riehle, U. Sterr. Vibration-insensitive reference cavity for an ultra-narrow-linewidth laser[J]. *Appl. Phys. B*, 2006, **83**(4): 531~536
- 6 A. Ludlow, X. Huang, M. Notcutt *et al.*. Compact, thermal-noise-limited optical cavity for diode laser stabilization at  $1 \times 10^{-15}$ [J]. *Opt. Lett.*, 2007, **32**(6): 641~643
- 7 S. Webster, M. Oxborrow, P. Gill. Vibration insensitive optical cavity[J]. *Phys. Rev. A*, 2007, **75**(1): 011801(R)
- 8 S. Webster, M. Oxborrow, S. Pugla. Thermal-noise-limited optical cavity[J]. *Phys. Rev. A*, 2008, **77**(3): 033847

- 9 J. Millo, D. Magalhães, C. Mandache *et al.*. Ultra-stable lasers based on vibration insensitive cavities[J]. *Phys. Rev. A*, 2009, **79**(5): 053829
- 10 Y. Jiang, S. Fang, Z. Bi *et al.*. Nd:YAG lasers at 1064 nm with 1-Hz linewidth[J]. *Appl. Phys. B*, 2010, **98**: 61~67
- 11 D. Leibbrandt, M. Thorpe, M. Notcutt. Spherical reference cavities for frequency stabilization of lasers in non-laboratory environments[J]. *Opt. Express*, 2011, **19**(4): 3471~3482
- 12 Y. Jiang, A. Ludlow, N. Lemke *et al.*. Making optical atomic clocks more stable with  $10^{-16}$ -level laser stabilization[J]. *Nature Photonics*, 2011, **5**(3): 158~161
- 13 T. Kessler, C. Hagemann, C. Grebing *et al.*. A sub-40 mHz linewidth laser based on a silicon single-crystal optical cavity[C]. 2012 Conference on Precision Electromagnetic Measurements, 2012. 272~273
- 14 M. Takamoto, F. Hong, R. Higashi *et al.*. An optical lattice clock[J]. *Nature*, 2005, **435**(19): 321~324
- 15 A. Ludlow, T. Zelevinsky, G. Campbell *et al.*. Sr lattice clock at  $1 \times 10^{-16}$  fractional uncertainty by remote optical evaluation with a Ca clock[J]. *Science*, 2008, **319**(28): 1805~1808
- 16 W. Oskay, S. Diddams, E. Donley *et al.*. Single-atom optical clock with high accuracy[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, **97**(2): 020801
- 17 N. Kolachevsky, A. Matveev, J. Alnis *et al.*. Measurement of the 2S hyperfine interval in atomic hydrogen[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, **102**(21): 213002
- 18 L. Lisheng, W. Cheng, J. Ye. Hyperfine interactions and perturbation effects in the  $B0u^+(^3\Pi_u)$  state of  $^{127}\text{I}_2$ [J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2004, **21**(4): 820~832
- 19 Tan Zhongqi, Long Xingwu, Huang Yun *et al.*. Etaloning effects in continuous-wave cavity ring down spectroscopy[J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(10): 1563~1566  
谭中奇, 龙兴武, 黄云等. 连续波腔衰荡光谱技术中的标准具效应[J]. *中国激光*, 2008, **35**(10): 1563~1566
- 20 Tan Zhongqi, Long Xingwu, Huang Yun. High sensitivity CW-cavity ring down spectroscopy of tuning wavelength[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(3): 747~751  
谭中奇, 龙兴武, 黄云. 高灵敏度调谐式连续波腔衰荡光谱技术[J]. *光学学报*, 2009, **29**(3): 747~751
- 21 Jiang Xiao, Zhang Chen, Cai Wenqi *et al.*. Frequency stabilization system of diode laser for cold atom experiment[J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(1): 82~86  
江晓, 张晨, 蔡文奇等. 冷原子实验用的半导体激光器稳频系统[J]. *中国激光*, 2010, **37**(1): 82~86
- 22 H. Müller, P. Stanwix, M. Tobar *et al.*. Tests of relativity by complementary rotating michelson-morley experiments[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, **99**(5): 050401
- 23 C. Eisele, A. Nevsky, S. Schiller. Laboratory test of the isotropy of light propagation at the  $10^{-17}$  level[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, **103**(9): 090401
- 24 L. Chen, J. Hall, J. Ye *et al.*. Vibration-induced elastic deformation of Fabry-Perot cavities[J]. *Phys. Rev. A*, 2006, **74**(5): 053801
- 25 Yang Tao, Li Wenbo, Zang Erjun *et al.*. Decreased vibrational susceptibility of Fabry-Perot cavities via designs of geometry and structural support [J]. *Chinese Physics*, 2007, **16**(5): 1374~1384
- 26 A. Siegman. Lasers [M]. Mill Valley: University Science Books, 1986. 767~769
- 27 H. Kogelnik, T. Li. Laser beams and resonators [J]. *Proceedings of the IEEE*, 1966, **54**(10): 1312~1329