

横向剪切最小二乘相位解包裹算法的改进

钱晓凡 李斌 李兴华 林超 袁操今 施英

(昆明理工大学理学院激光研究所, 云南 昆明 650500)

摘要 对存在欠采样的包裹相位进行解包裹一直是一个难点, 尽管横向剪切最小二乘相位解包裹算法有不错的抗欠采样能力, 但当存在严重欠采样时, 该算法还是不能得到令人满意的结果。针对这个问题作了分析, 并通过引入二次剪切的方法改进了横向剪切最小二乘相位解包裹算法, 通过模拟计算和实验验证, 证明改进后的算法是正确和有效的, 该算法可以保证当包裹相位二阶离散导数的绝对值不大于 π 时能得到正确的解包裹结果。

关键词 物理光学; 相位解包裹; 算法; 横向剪切; 最小二乘

中图分类号 O436.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201239.1109002

Improvement of Least-Square Phase Unwrapping Algorithm Based on Lateral Shearing Interferometry

Qian Xiaofan Li Bin Li Xinghua Lin Chao Yuan Caojin Shi Ying

(*Laser Institute, College of Physics, Kunming University of Science and Technology,
Kunming, Yunnan 650500, China*)

Abstract It is a tough question to obtain an unwrapping phase when the under-sampling happens. Although the least-square algorithm based on lateral shearing interferometry (LSBLS) has good anti-sub sampling ability, a satisfactory result can not be obtained when the under-sampling is serious. To solve this problem, a corresponding analysis is presented and the LSBLS algorithm is improved by introducing a second shearing. The validity of this improved algorithm is showed in one simulated result and one experimental result. It is promised, by the algorithm, the validity of unwrapped phase, when the absolute value of discrete secondary derivative of wrapped phase is less than π .

Key words physical optics; phase unwrapping; algorithm; lateral shearing; least-square

OCIS codes 100.5088; 100.3008; 030.4280

1 引言

在光学干涉计量、基于结构光的光学三维传感和合成孔径雷达等领域中, 相位解包裹计算都是必须的步骤^[1~3], 这是因为实验得到的相位值通常都是被“截断”了的(或称为被“包裹”、“缠绕”的), 实际测量时必须将被“截断”的相位连接起来, 这个过程称为相位解包裹、相位展开或者解相等。相位解包裹的算法发展迅速, 国内外学者提出了很多算法^[1~7], 并在不同程度上获得了成功。在实际问题中, 相位在空间的迅速变化并引发欠采样一直是相位解包裹的一个难点^[8,9]。虽然横向剪切最小二乘(LS)相位解包裹算法(LSBL)有不错的抗欠采样

能力^[10,11], 但当存在严重欠采样时, 该算法还是不能得到满意的结果, 甚至无法顺利地完成解包裹运算。本文针对这个问题作了分析, 并提出了相应的改进算法, 通过模拟计算和实验验证, 证明该算法是正确和有效的。

2 横向剪切最小二乘相位解包裹算法的原理

对于 $N \times M$ 个数据点的二维包裹相位 $g_{nm} = g(n, m)$, 设 $\varphi_{nm} = \varphi(n, m)$ 为对应的实际连续相位值(n, m 为二维相位分布对应矩阵的下标, $0 \leq n \leq N-1, 0 \leq m \leq M-1$), 可以写出包裹相位沿 x 方

收稿日期: 2012-06-26; 收到修改稿日期: 2012-07-17

基金项目: 国家自然科学基金(61067004, 60907002)资助课题。

作者简介: 钱晓凡(1963—), 男, 硕士, 教授, 主要从事数字全息方面的研究。E-mail: qianxiaofan1@sina.com

向和 y 方向的离散梯度:

$$\Delta g_{nm}^x = g(n+1, m) - g(n, m) + 2k\pi, \quad (1)$$

$$\Delta g_{nm}^y = g(n, m+1) - g(n, m) + 2k\pi, \quad (2)$$

式中 k 为整数。为了使求得的相位 φ_{nm} 对已知包裹相位拟合最好,作最小二乘:

$$S = \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{m=0}^{M-1} [\varphi_{(n+1)m} - \varphi_{nm} - \Delta g_{nm}^x]^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-2} [\varphi_{n(m+1)} - \varphi_{nm} - \Delta g_{nm}^y]^2. \quad (3)$$

上述最小二乘矩阵的求解方程为

$$\varphi_{(n+1)m} + \varphi_{(n-1)m} + \varphi_{n(m+1)} + \varphi_{n(m-1)} - 4\varphi_{nm} = \Delta g_{nm}^x - \Delta g_{(n-1)m}^x + \Delta g_{nm}^y - \Delta g_{n(m-1)}^y, \quad (4)$$

其恒等关系式为

$$\begin{aligned} & [\varphi_{(n+1)m} - 2\varphi_{nm} + \varphi_{(n-1)m}] + \\ & [\varphi_{n(m+1)} - 2\varphi_{nm} + \varphi_{n(m-1)}] = \rho_{nm}, \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$\rho_{nm} = [\Delta g_{nm}^x - \Delta g_{(n-1)m}^x] + [\Delta g_{nm}^y - \Delta g_{n(m-1)}^y], \quad (6)$$

该方程是 $M \times N$ 矩形网格上的离散泊松方程,即

$$\frac{\Delta^2}{\Delta x^2} \varphi(x, y) + \frac{\Delta^2}{\Delta y^2} \varphi(x, y) = \rho(x, y). \quad (7)$$

显然,通过离散余弦变换(DCT)或傅里叶变换(FT)求解 $N \times M$ 矩形网格上的离散泊松方程可得到解包裹相位 φ_{nm} 。

最小二乘解包裹需要计算 ρ_{nm} ,传统的算法是先直接用(1)式和(2)式计算 Δg_{nm}^x 和 Δg_{nm}^y ,然后再用(6)式计算 ρ_{nm} ,但由于 $g(n, m)$ 本身是包裹着的相位,计算得到的 $\Delta g_{nm}^x - \Delta g_{(n-1)m}^x$ 和 $\Delta g_{nm}^y - \Delta g_{n(m-1)}^y$ 往往不连续分布,从而使解包裹失败。为了解决这个问题,LSBLS将剪切干涉原理引入到解包裹运算中,利用包裹相位 $g(n, m)$ 建立一个等效二维复光场:

$$\tilde{U}(n, m) = \exp[jg(n, m)]. \quad (8)$$

对该等效光场,沿横向(以沿 x 方向为例)作 1 pixel 的平移,创建一个新的光场——剪切光场:

$$\tilde{U}'(n, m) = \exp[jg(n+1, m)]. \quad (9)$$

将两光场相除,可以得到新的光场

$$\Delta \tilde{U}^x = \frac{\tilde{U}'(n, m)}{\tilde{U}(n, m)} = \frac{\exp[jg(n+1, m)]}{\exp[jg(n, m)]}. \quad (10)$$

于是有

$$\Delta g_{nm}^x = \arctan[\text{Im}(\Delta \tilde{U}^x) / \text{Re}(\Delta \tilde{U}^x)], \quad (11)$$

式中, $\text{Im}()$ 和 $\text{Re}()$ 分别代表取复函数的虚部和实部运算。即使 $g(n, m)$ 的空间变化频率很高,甚至出现欠采样,但 $\Delta \tilde{U}^x$ 相位的空间变化频率并不高,只要 Δg_{nm}^x (原始相位在 x 方向的梯度或导数) 的绝对

值的最大值不大于 π , $\Delta \tilde{U}^x$ 的相位就不会出现欠采样,所以用(11)式计算 Δg_{nm}^x 可以有效避免 $\Delta g_{nm}^x - \Delta g_{(n-1)m}^x$ 发生不连续分布,减少欠采样带来的麻烦。用同样的方法可以引入 $\Delta \tilde{U}^y$ 并计算 $\Delta g_{nm}^y - \Delta g_{n(m-1)}^y$,并用(6)式计算出 ρ_{nm} ,代入离散泊松方程用 DCT 或 FT 算法求解,即可得到解包裹相位。

3 LSBLS 的改进

尽管 LSBLS 可以有效地克服欠采样带来的麻烦,得到比传统最小二乘相位解包裹算法好得多的结果^[10,11],但如果欠采样非常严重,就会导致 LSBLS 失效。下面通过模拟计算加以说明。

模拟计算选用 Matlab 软件中的 peaks 函数乘以 100,构建一个 256 pixel \times 256 pixel 的二维相位分布(相位最小、最大值分别为 -654.97 rad 和 810.54 rad),将得到的二维分布相位记为 φ_0 ,并定义二维复光场 $\tilde{U} = \exp(j\varphi_0)$,则该光场对应的包裹相位为

$$\varphi = \arctan[\text{Im}(\tilde{U}) / \text{Re}(\tilde{U})]. \quad (12)$$

尝试用 LSBLS 算法解包裹,计算结果列于图 1 中。其中图 1(a)是原始相位 φ_0 的三维分布,图 1(b)是其包裹相位 φ ,而图 1(c)、(d)和(e)分别是用 LSBLS 算法得到的 $\Delta g_{nm}^x - \Delta g_{(n-1)m}^x$ 、 $\Delta g_{nm}^y - \Delta g_{n(m-1)}^y$ 和 ρ_{nm} ,其解包裹结果如图 1(f)。可以看到,尽管已经使用了剪切算法,但解包裹还是失败了。分析失败的原因为原始相位变化太快,包裹相位的空间变化频率很高,欠采样非常严重,使得 LSBLS 得到的 Δg_{nm}^x 和 Δg_{nm}^y 依然是包裹着的(因为此时 Δg_{nm}^x 或 Δg_{nm}^y 绝对值的最大值分别为 28.11 rad 和 18.15 rad,已经远大于 π),所以 $\Delta g_{nm}^x - \Delta g_{(n-1)m}^x$ 、 $\Delta g_{nm}^y - \Delta g_{n(m-1)}^y$ 和 ρ_{nm} 急剧变化且不连续,最终导致解包裹失败。

为了解决这个问题,对 LSBLS 算法作如下改进:在算法中引入“二次剪切”,即利用 LSBLS 算法得到的复光场 $\Delta \tilde{U}^x$ 和 $\Delta \tilde{U}^y$,对它们分别沿 x 方向和 y 方向作 1 pixel 的平移(剪切),从而各自创建一个新的光场——剪切光场(以沿 x 方向平移为例):

$$\Delta \tilde{U}^{x'}(n, m) = \Delta \tilde{U}^x(n-1, m) = \exp[j\Delta g_{(n-1)m}^x]. \quad (13)$$

将两个光场 $\Delta \tilde{U}^{x'}$ 与 $\Delta \tilde{U}^{x'}$ 相除,可以得到新的光场:

$$\Delta \tilde{U}^{xx} = \frac{\Delta \tilde{U}^x(n, m)}{\Delta \tilde{U}^{x'}(n, m)} = \frac{\exp[j\Delta g^x(n, m)]}{\exp[j\Delta g^x(n-1, m)]}. \quad (14)$$

于是有

$$\Delta g_{nm}^{xx} - \Delta g_{(n-1)m}^{xx} = \arctan[\text{Im}(\Delta \tilde{U}^{xx}) / \text{Re}(\Delta \tilde{U}^{xx})]. \quad (15)$$

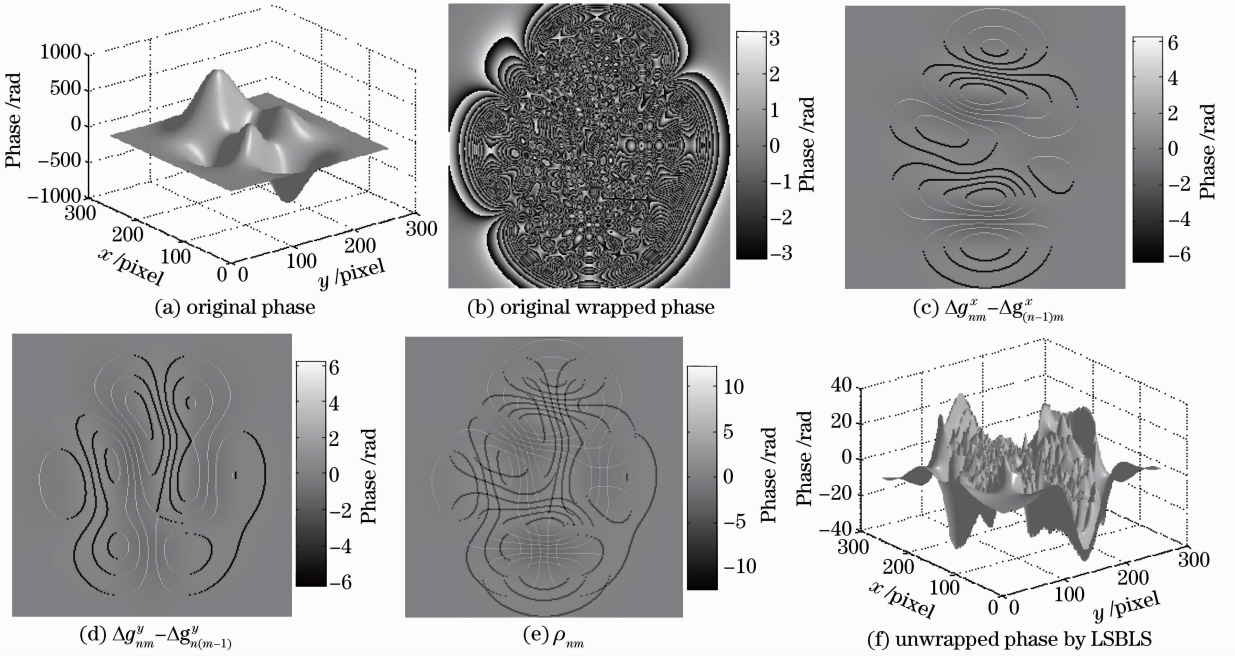


图 1 未改进 LSBLs 的模拟计算结果

Fig. 1 Simulated results by unimproved LSBLs

用同样的方法可以创建 $\Delta\tilde{U}^{yy}$, 并有

$$\Delta g_{nm}^y - \Delta g_{n(m-1)}^y = \arctan[\text{Im}(\Delta\tilde{U}^{yy})/\text{Re}(\Delta\tilde{U}^{yy})]. \quad (16)$$

由于使用了二次剪切, 复数相角的主值域为 $(-\pi, \pi]$, 所以即使原始相位在 x 方向或 y 方向离散梯度的绝对值大于 π , 只要这两个离散梯度自身在 x 方向或 y 方向离散梯度(原始相位的空间二次离散导

数) 绝对值不大于 π , 得到的 $\Delta g_{nm}^x - \Delta g_{(n-1)m}^x$ 、 $\Delta g_{nm}^y - \Delta g_{n(m-1)}^y$ 和 ρ_{nm} 就依然连续、无跳跃, 确保通过求解离散泊松方程能得到正确的解包裹相位。仍然选用前面的模拟相位对改进后的算法作验证, 结果如图 2 所示。其中图 2(a)、(b) 和 (c) 分别是用改进后的 LSBLs 算法得到的 $\Delta g_{nm}^x - \Delta g_{(n-1)m}^x$ 、 $\Delta g_{nm}^y - \Delta g_{n(m-1)}^y$ 和 ρ_{nm} , 原始相位二阶离散导数绝对值的最大值分别

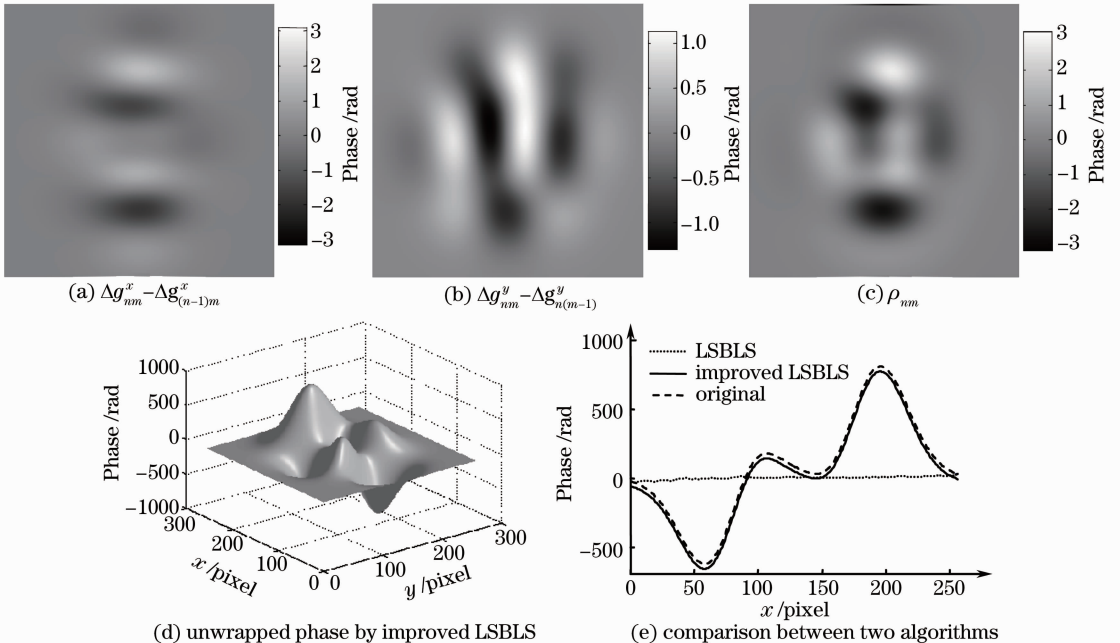


图 2 改进后 LSBLs 的模拟计算结果

Fig. 2 Simulated results by improved LSBLs

为 1.29 rad 和 1.82 rad, 均小于 π , 可以看到, 由于使用了二次剪切, $\Delta g_{nm}^x - \Delta g_{(n-1)m}^x$ 、 $\Delta g_{nm}^y - \Delta g_{n(m-1)}^y$ 和 ρ_{nm} 已经变得连续。最终的解包裹结果如图 2(d), 显然是正确的。为便于比较, 图 2(e) 分别给出了用改进前、后的 LSBLs 算法得到的解包裹相位和原始相位同一列 ($y=131$ pixel) 上的数值分布, 显然, 改进后的 LSBLs 算法得到的值与原始相位值只差一个常数(不影响其使用), 很好地完成了解包裹运算, 而改进前的 LSBLs 算法得到的值与原始相位值相差很大, 可以认为解包裹失败。

4 实验验证

为了检验改进后的 LSBLs 算法的效果, 用基于像面数字全息术的中药饮片细胞定量成像实验作验证^[11], 实验采取球面参考光像面数字全息记录光

路, He-Ne 激光的波长为 632.8 nm, 记录数字全息图用的 CMOS 分辨率为 1280 pixel \times 1024 pixel, 像素大小为 6.7 μm \times 6.7 μm , 12 bit 灰度级输出。实验结果如图 3 所示。图 3(a) 是实验数字全息图, 图 3(b) 是用全息图得到的包裹相位, 图 3(c)、(d) 和 (e) 是分别用传统的最小二乘算法^[9]、LSBLs 和改进后的 LSBLs 算法解包裹, 然后对得到的解包裹相位经重新包裹后的二维相位分布图。比较图 3(c) 与图 3(b) 可以看出, 由于有欠采样发生, 传统最小二乘算法的解包裹结果很差; 比较图 3(d) 和图 3(b) 可以看出 LSBLs 算法的解包裹结果比传统算法好很多, 但是, 对有严重欠采样的区域(特别是细胞的边缘)还是不能得到很好的结果; 比较图 3(e) 与图 3(b) 容易看出, 改进后的 LSBLs 解包裹结果最好, 几乎所有区域的相位包裹均被顺利展开。需要

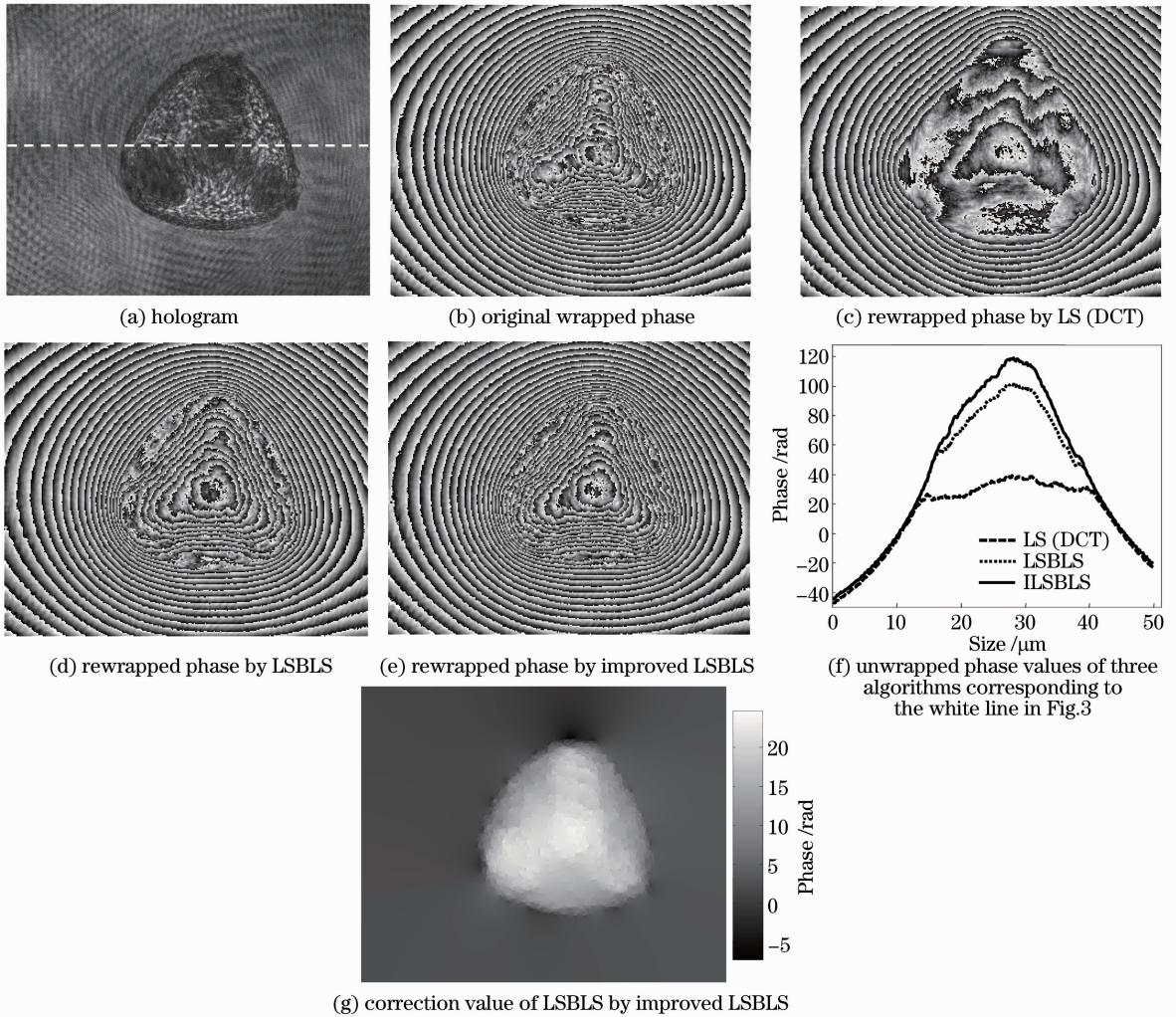


图 3 传统和改进前、后横向剪切算法处理得到的实验数据结果及比较

Fig. 3 Experimental results of conventional LS, LSBLs and improved LSBLs algorithms and the comparison results between them

说明的是,改进后的算法由于要作二次剪切,运算对噪声比较敏感,计算中需要做降噪处理^[12],这里不再赘述。为便于比较,图 3(f)给出了用传统最小二乘算法,以及改进前、后的 LSBLs 得到的解包裹相位同一行[对应图 3(a)中的白线]上的数值分布,而图 3(g)给出改进前、后的 LSBLs 算法解包裹相位间的差值分布。从中可以得出结论:改进后的 LSBLs 得到的解包裹相位值与实验值吻合最好,说明该算法是正确和有效的。

5 结 论

相位在空间的迅速变化并发生欠采样一直是顺利完成解包裹的一个难点,尽管 LSBLs 有不错的抗欠采样能力,但当存在严重欠采样时,该算法还是不能得到满意的结果,甚至无法顺利地解包裹运算。针对这个问题作了分析,并通过引入二次剪切的方法对原有 LSBLs 作了改进,通过模拟计算和实验验证,证明该算法是正确和有效的,改进后的算法可以保证当包裹相位有严重欠采样发生时,只要原始相位二阶离散导数的绝对值不大于 π ,就可以得到正确的解包裹结果。

参 考 文 献

- 1 D. C. Ghiglia, M. D. Pritt. Two Dimensional Phase Unwrapping: Theory, Algorithms and Software[M]. John Wiley & Sons Inc., 1998. 4~21
- 2 Wu Yonghui, Cheng Xiaosheng, Cui Haihua *et al.*. A novel method for 2D phase unwrapping guided by quality cut [J]. *Chinese J. Lasers*, 2012, **39**(3): 0308004
吴勇辉,程筱胜,崔海华等.基于质量线导向的二维相位展开新方法[J].中国激光,2012,**39**(3):0308004
- 3 H. V. Brug. Temporal phase unwrapping and its application in shearography systems [J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(28):

- 6701~6706
- 4 Wang Jun, Zhao Jianlin, Fan Qi *et al.*. A novel synthetical method for phase unwrapping [J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(6): 795~799
王 军,赵建林,范 琦等.相位图去包裹的一种新的综合方法[J].中国激光,2006,**33**(6):795~799
- 5 T. J. Flynn. Two-dimensional phase unwrapping with minimum weighted discontinuity[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1997, **14**(10): 2692~2701
- 6 Kang Xin, He Xiaoyuan, C. Quan. Phase unwrapping using the least cross-section-difference [J]. *Chinese J. Lasers*, 2002, **29**(7): 647~651
康 新,何小元,C. Quan.基于最小截面差的相位展开[J].中国激光,2002,**29**(7):647~651
- 7 J. Meneses, T. Gharbi, P. Humbert. Phase-unwrapping algorithm for images with high noise content based on a local histogram[J]. *Appl. Opt.*, 2005, **44**(7): 1207~1215
- 8 Fan Qi, Yang Hongru, Li Gaoping *et al.*. Method for phase recovery from a single undersampled wrapped phase map[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(3): 0310002
范 琦,杨鸿儒,黎高平等.欠采样包裹相位图的恢复方法[J].光学学报,2011,**31**(3):0310002
- 9 Hui Mei, Wang Dongsheng, Li Qingxiang *et al.*. Phase unwrapping method based on the solution of discrete poisson equation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(10): 1245~1249
惠 梅,王东生,李庆祥等.基于离散泊松方程解的相位展开方法[J].光学学报,2003,**23**(10):1245~1249
- 10 Qian Xiaofan, Wang Zhanliang, Hu Te *et al.*. Reconstructing the phase of wavefront using digital hologram and the principle of shearing interferometry [J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(7): 1821~1826
钱晓凡,王占亮,胡 特等.用单幅数字全息和剪切干涉原理重构光场相位[J].中国激光,2010,**37**(7):1821~1826
- 11 Wang Huaying, Guo Zhongjia, Zhang Zhihui *et al.*. Image-plane digital holography for quantitative imaging of cells of Chinese medical decoction pieces [J]. *Chinese J. Lasers*, 2012, **39**(2): 0209002
王华英,郭中甲,张志会等.基于像面数字全息术的中药饮片细胞定量成像技术[J].中国激光,2012,**39**(2):0209002
- 12 Qian Xiaofan, Rao Fan, Lin Chao *et al.*. Speckle noise reduction algorithm based on principle of shearing interferometry [J]. *Chinese J. Lasers*, 2011, **38**(7): 0708003
钱晓凡,饶 帆,林 超等.基于剪切干涉原理的散斑噪声降噪算法[J].中国激光,2011,**38**(7):0708003

栏目编辑:何卓铭