

# 用方形区域内的标准正交多项式重构波前

李萌阳<sup>1</sup> 李大海<sup>1</sup> 王琼华<sup>1,2</sup> 赵霁文<sup>1</sup> 章 辰<sup>1</sup> 陈盈锋<sup>1</sup> 张 充<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 四川大学电子信息学院, 四川 成都 610065  
<sup>2</sup> 视觉合成图形图像技术国家重点学科实验室, 四川 成都 610064)

**摘要** 提供了一种方形区域上归一化 Zernike 正交基的生成方法。它采用线性无关组 Gram-Schmidt 正交组构造方法, 根据线性代数内积、欧氏空间及其正交性和范数的相关概念, 对标准 Zernike 多项式进行正交处理, 得到了一组新的正交多项式——Z-square 多项式。采用该正交基实现了方形区域内波前模式的拟合, 它不仅可由 Z-square 模式的集合直接对波前进行表示, 而且也可以通过线性反变换, 将 Z-square 多项式表示成标准的 Zernike 模式的线性组合, 使被分解的波前模式与像差之间有明确的对应关系。实验表明, 它不仅可以对透镜设计中的波前像差函数进行有效的拟合, 而且也能对 Hartmann-Shack 波前传感器测试得到的实际相位数据进行拟合。

**关键词** 测量; 波前重构; Zernike 多项式; 方形区域; Z-square 多项式

**中图分类号** TN247 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201239.1108011

## Wavefront Reconstruction with Orthonormal Polynomials in a Square Area

Li Mengyang<sup>1</sup> Li Dahai<sup>1</sup> Wang Qionghua<sup>1,2</sup> Zhao Jiwen<sup>1</sup> Zhang Chen<sup>1</sup>  
Chen Yingfeng<sup>1</sup> Zhang Chong<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> School of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610065, China)  
(<sup>2</sup> State Key Laboratory of Fundamental Science on Synthetic Vision, Chengdu, Sichuan 610064, China)

**Abstract** An orthonormal square Zernike basis set is generated from circular Zernike polynomial apodized square mask by use of the linearly independent set Gram-Schmidt orthogonalization technique. Based on the concepts of inner product, Euclidean space and norm in the linear algebra, a standard Zernike polynomial set is made orthogonal and a new orthonormal basis of polynomials named Z-square polynomial is established. Wavefront data in square aperture can be fitted with our new orthonormal set. It can not only fit the wavefront data with Z-square basis set itself, but also can be linearly composed of standard Zernike basis set by linear reverse transform and endows the decomposed wavefront modes with a correspondent aberration meaning. The experimental results show that the Z-square polynomial set can fit the wavefront aberration data in lens design efficiently and can also fit the practical wavefront phase data of Hartmann-Shack wavefront sensor testing, it provides a method of wavefront data analysis.

**Key words** measurement; wavefront reconstruction; Zernike polynomial; square area; Z-square polynomial

**OCIS codes** 110.7438; 100.3008; 100.1160

## 1 引 言

波前传感和重构在自适应光学<sup>[1]</sup>、光学元件面形检测<sup>[2]</sup>等相关领域有着很重要的应用。波前重构通常分为区域法和模式法。区域法通过相位斜率方

向的测量来拟合特定子孔径上的波前; 模式法中将波前分解为一个正交多项式组, 多项式的系数通过测量相位斜率得到。模式法中常采用 Zernike 多项式对圆域内的波前数据进行拟合, 如亚利桑那大学的

收稿日期: 2012-06-10; 收到修改稿日期: 2012-08-02

基金项目: 国家自然科学基金(60877004)资助课题。

作者简介: 李萌阳(1989—), 女, 硕士研究生, 主要从事波前检测方面的研究。E-mail: limengyang200800@163.com

导师简介: 李大海(1968—), 男, 博士, 教授, 主要从事光学信息处理、波前传感和三维立体显示等方面的研究。

E-mail: lidahai@scu.edu.cn(通信联系人)

Zernike 多项系数<sup>[3]</sup>, Noll 的标准 Zernike 系数<sup>[4]</sup> 以及 Born 等<sup>[5]</sup> 的 Zernike 多项式。模式法中的 Zernike 多项式和 Seidel 像差项有对应关系, 能方便地处理各像差系数并分离各种像差, 便于分析波前和剔除误差, 常把它作为圆域的正交基进行波前重构。但对于非圆瞳光学系统, Zernike 多项式不具有正交性, 用它拟合波面将出现交叉耦合现象, 求得的 Seidel 像差系数存在误差, 仍用它作为非圆域的基函数多项式所得到的拟合系数就不能准确计算该区域的波前均方根(RMS)误差<sup>[6]</sup>, 因此, 需要选用其他正交多项式。如针对环形孔的 Zernike-Mahajan 多项式<sup>[7]</sup> 和 Zernike-Tatian 多项式<sup>[8]</sup> 等。激光惯性约束聚变(ICF)中大量的方形光学元件, 以及方域上的波前检测需要方域内的 Zernike 多项式<sup>[9]</sup>。曾有人提出方形区域的 Zernike 波前拟合方法<sup>[10,11]</sup>, 但还缺少对其进行有效而深入的分析。因此, 本文采用线性代数内积、欧氏空间及其正交性的相关概念, 对方形区域上 Zernike 多项式的正交性进行分析, 并采用线性无关组 Gram-Schmidt 正交组构造方法, 对 Zernike 多项式进行正交处理, 得到了一组新的正交多项式——Z-square 多项式。利用新多项式对 Hartmann-Shack(H-S)波前传感的相位数据进行了重构。研究分析表明, Z-square 可用于方形区域上的波前数据拟合。

## 2 生成 Z-square 多项式的 Gram-Schmidt 正交化方法

Zernike 多项式是一组定义在单位圆连续区域内的完备的正交基, 记为  $\{Z_i(x, y)\}$ , 通常用于表示波前相位和不规则波面。并有正交关系<sup>[12]</sup>:

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [Z_i(x, y)]^* Z_j(x, y) dx dy &= \\ \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [Z_{mp}(x, y)]^* Z_{nq}(x, y) dx dy &= \\ \frac{\pi}{n+1} \delta_{np} \delta_{mq}, & \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $\delta_{np} = \begin{cases} 1, & n = p \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ ,  $\delta_{mq} = \begin{cases} 1, & m = q \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ ,  $n$  是径向模式,  $*$  表示复共轭,  $m$  是方位角频率,  $n, m, i$  的关系采用 Noll<sup>[14]</sup> 的定义方法, 在极坐标下定义多项式为

$$Z_i(r, \theta) = R_n^m(r) \Theta_n^m(\theta), \quad (2)$$

式中

$$R_n^m(r) =$$

$$\sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2 - s]! [(n-m)/2 - s]!} r^{n-2s},$$

$$\Theta_n^m(\theta) = \begin{cases} \cos m\theta, & m \neq 0 \text{ eventerm or } m = 0 \\ \sin m\theta. & m \neq 0 \text{ odd term} \end{cases}$$

在大部分光学元件面形检测中, 被测光学系统的反射和出射波前总是趋于光滑和连续的且具有圆形光瞳, 所以可以将被测波面的面形和波像差函数表示成一个完备 Zernike 基底函数的线性组合  $W(x, y)$ 。相比一般的多项式加权最小二乘法, 采用 Zernike 多项式拟合求解系数会更加简单, 拟合精度更高, 也比较可靠。因此, 下面介绍 Z-square 的方法和过程。

标准正交组<sup>[13]</sup>——若对  $V$  的子集  $S$  中的任意两个不同元素  $x$  和  $y$  都有内积  $(x, y) = 0$ , 则称  $S$  为正交组。如果一个正交组中的每一个元素的范数都等于 1, 则称它为标准正交组。在一个  $n$  维欧氏空间中, 任意一个包含  $n$  个非零元素的正交组都是  $V$  的基。任意有限维线性空间都有基, 如果这个空间是欧氏空间, 那么总可以构造一组正交基。如果  $x_1, x_2, \dots, x_k$  是有限维欧氏空间的基, 则它们线性无关, 可以由 Gram-Schmidt 方法将它改造为包含非零元素的正交组  $y_1, y_2, \dots, y_k$ , 它们就对应该欧氏空间的正交基。此时  $y_1, y_2, \dots, y_k$  的公式对  $r = 1, 2, \dots, k-1$  转化为

$$y_1 = x_1, \quad y_{r+1} = x_{r+1} - \sum_{i=1}^r \frac{(x_{r+1}, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i. \quad (3)$$

由多项式构成的线性空间, 令内积为  $(x, y) = \int_{-1}^1 x(t)y(t)dt$ , 对无穷序列  $x_1, x_2, x_3, \dots$  应用 Gram-Schmidt 正交化后, 将得到新的多项式序列  $y_1, y_2, y_3, \dots$ 。定义在方形域内的多项式组  $f$  的内积为

$$(f_m, f_n) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_m(x, y) f_n(x, y) dx dy. \quad (4)$$

这样, 对单位圆上连续区域内正交的 Zernike 多项式组, 应用 Gram-Schmidt 正交化方法, 得到方形区域内的多项式组——Z-square 多项式, 该集合记为  $\{Z_{Si}(x, y)\}$ , 显然 Z-square 多项式的正交关系为

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Z_{Si}(x, y)]^* Z_{Sj}(x, y) dx dy = \begin{cases} C_j, & i = j \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

式中  $C_j$  为常数, 构成了积分得到的矩阵的对角线元素。因 Zernike 多项式具有无穷多项, Z-square 多

项式也可以由(3)式求出所需要的任意多的项数。这样就可以直接用 Z-square 多项式对方形域内的波前进行拟合分析；也可以通过 Zernike 多项式和 Z-square 多项式的关系，计算出 Zernike 多项式系数，实现方形域波前的 Zernike 多项式描述。这里使用 37 项。

### 3 Z-square 多项式

利用(4)式求 Zernike 多项式在方形域内的内积，得到前 13 项的内积结果如表 1 所示，表中元素关于对角线对称，只给出非零元素。由表 1 可以看出该表的内积矩阵不是对角的，说明这些 Zernike

多项式组在正方域内并不正交。因此，先对 Zernike 多项式用 Gram-Schmidt 法进行正交化得到一组多项式，这里称之为 Z'-square 多项式，其与 Zernike 多项式的前 14 项对应关系如表 2 所示。从表 2 中可以看出 Zernike 多项式和 Z'-square 多项式的第 1、2、3、5、6 项完全一样，分别代表了平移、 $x$  方向倾斜、 $y$  方向倾斜、与轴成  $45^\circ$  的像散、与轴成  $0^\circ$  或  $90^\circ$  的像散，7、8 项表示彗差，与圆瞳上的 Zernike 彗差相比，倾斜量不一样。而其他项在形式或系数上有不同，如第 4、7、8、11、16、17 项等；Z'-square 多项式较 Zernike 多项式多了低阶因子，如第 9、10、14 项等。

表 1 前 13 项 Zernike 多项式在方形域内的内积

Table 1 Inner products of the first 13 Zernike polynomials in a square

$j$	$i$												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	4			$\frac{4}{3}$							$\frac{44}{15}$		
2		$\frac{4}{3}$						$\frac{16}{15}$		$-\frac{8}{15}$			
3			$\frac{4}{3}$				$\frac{16}{15}$		$\frac{8}{15}$				
4	$\frac{4}{3}$			$\frac{148}{45}$							$\frac{572}{105}$		
5					$\frac{16}{9}$								$\frac{16}{15}$
6						$\frac{32}{45}$						$\frac{32}{105}$	
7			$\frac{16}{15}$				$\frac{96}{35}$		$\frac{128}{105}$				
8		$\frac{16}{15}$						$\frac{96}{35}$		$-\frac{128}{105}$			
9			$\frac{8}{15}$				$\frac{128}{105}$		$\frac{48}{35}$				
10		$-\frac{8}{15}$						$-\frac{128}{105}$		$\frac{48}{35}$			
11	$\frac{44}{15}$			$\frac{572}{105}$							$\frac{8084}{525}$		
12						$\frac{32}{105}$						$\frac{1376}{1575}$	
13					$\frac{16}{15}$								$\frac{5072}{525}$

表 2 Zernike 多项式和 Z'-square 多项式

Table 2 Zernike polynomials and Z'-square polynomials

$i$	Zernike	Z'-square
1	1	1
2	$x$	$x$
3	$y$	$y$
4	$2x^2 + 2y^2 - 1$	$2x^2 + 2y^2 - 4/3$

$i$	Zernike	Z'-square
5	$2xy$	$2xy$
6	$x^2 - y^2$	$x^2 - y^2$
7	$3x^2y + 3y^3 - 2y$	$3x^2y + 3y^3 - 14y/5$
8	$3x^3 + 3xy^2 - 2x$	$3x^3 + 3xy^2 - 14x/5$
9	$3x^2y - y^3$	$54x^2y/31 - 70y^3/31 + 24y/31$
10	$x^3 - 3xy^2$	$70x^3/31 - 54xy^2/31 - 24x/31$
11	$6x^4 + 12y^2x^2 + 6y^4 - 6x^2 - 6y^2 + 1$	$6x^4 + 12y^2x^2 + 6y^4 - 64x^2/7 - 64y^2/7 + 248/105$
12	$4x^4 - 3x^2 - 4y^4 + 3y^2$	$4x^4 - 24x^2/7 - 4y^4 + 24y^2/7$
13	$8x^3y + 8y^3x - 6xy$	$8x^3y + 8y^3x - 48xy/5$
14	$x^4 - 6y^2x^2 + y^4$	$196x^4/67 - 144y^2x^2/67 + 196y^4/67 - 120x^2/67 - 120y^2/67 + 88/335$
15	$4x^3y - 4y^3x$	$4x^3y - 4y^3x$
16	$10x^5 + 20y^2x^3 + 10y^4x - 12x^3 - 12xy^2 + 3x$	$10x^5 + 20y^2x^3 + 10y^4x - 160x^3/9 - 144xy^2/7 + 152x/21$
17	$10yx^4 + 20y^3x^2 + 10y^5 - 12x^2y - 12y^3 + 3y$	$10yx^4 + 20y^3x^2 + 10y^5 - 144x^2y/7 - 160y^3/9 + 152y/21$

表 2 所得到的 Z'-square 只是一组方形域内的正交基,不是标准正交的,但可用公式求出标准正交的 Z-square:

$$Z_{S_n} = \frac{Z_{S'_n}}{\|Z_{S'_n}\|}, \quad (6)$$

式中  $Z_{S'_n}$  和  $Z_{S_n}$  分别是 Z'-square 多项式和 Z-square 多项式的第  $n$  项。

为建立 Zernike 多项式集合  $\{Z_i(x, y)\}$  和 Z-square 多项式集合  $\{Z_{S_i}(x, y)\}$  之间的关系,单位圆域内的标准正交 Zernike 多项式和方形域内的 Z-square 标准正交基之间,可由正交变换的性质找到

一个矩阵  $C$ ,由下式确定:

$$Z_S = C \cdot Z \text{ or } Z_{S_i} = \sum_{m=1}^n C_{im} Z_m. \quad (7)$$

表 3 给出了前 13 项多项式变换对应的矩阵  $C$ 。用(7)式的对应关系和  $C$  中的第  $i$  行的值就可以求出对应第  $i$  项 Z-square 多项式关于前 13 项 Zernike 多项式的线性组合,如选矩阵  $C$  的第 9 行,可以由

$$Z_{S_9} = \sum_{m=1}^{13} C_{9m} Z_m \quad (8)$$

得到  $Z_{S_9} = -0.0355Z_3 - 0.1632Z_7 + 0.3891Z_9$ 。

表 3 由  $\{Z_1 \cdots Z_{13}\}$  变换到  $\{Z_{S_1} \cdots Z_{S_{13}}\}$  对应的矩阵  $C$   
Table 3  $C$  containing the transformation from  $\{Z_1 \cdots Z_{13}\}$  to  $\{Z_{S_1} \cdots Z_{S_{13}}\}$

0.5								
	0.433							
		0.433						
-0.1976			0.3423					
				0.3062				
					0.4841			
		-0.291				0.2572		
	-0.291						0.2572	
		-0.0355				-0.1632		0.3891
			0.0355				0.1632	
								0.3891
-0.084		-0.3637						
								0.1793
				-0.203				
								0.3669
					-0.3721			
								0.1601

图 1 是两种多项式,从第二项开始的比较。由于 Zernike 多项式允许把任何像差分解为一系列特定的像差类型(Zernike 模式集合),每一种 Zernike 模式对应一种特定类型的像差,且 Z-square 多项式与 Zernike 多项式之间有线性关系,如表 3 所示,而从图 1 的对比中也可以看出,Z-square 多项式也可以

分解为特定像差类型的组合(Z-square 模式集合)。

#### 4 采用 Z-square 多项式重构波像差数据

设  $W(x, y)$  为一个单位圆内任意波前,用 Zernike 多项式可以表示为

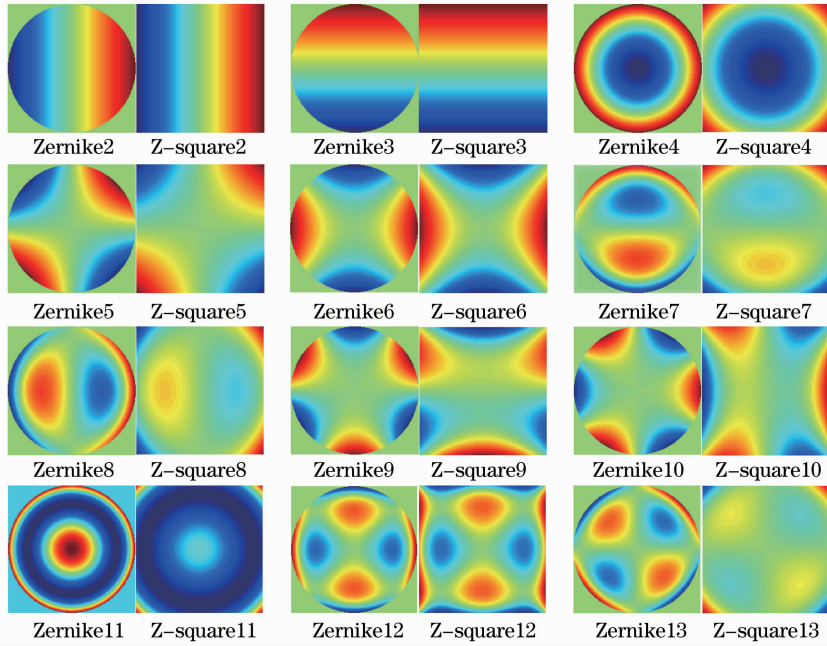


图 1 Zernike 多项式和 Z-Square 多项式的前 13 项模式比较

Fig.1 Comparison of the first 13 Zernike mode and Z-square mode

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Z_i(x, y), \quad W = Z \cdot A. \quad (9)$$

而在实际的模式中,波前被分解为有限项多项式,即

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^N a_i Z_i(x, y). \quad (10)$$

通过获取对应子孔径上的相关波前数据,以及对应的多项式的值,就可以获得多项式的系数,从而重构出波前。其中多项式系数由最小二乘法求出

$$A = (Z^T Z)^{-1} Z^T W, \quad (11)$$

从多项式的表达式可以看出高阶项会含有一些低阶项的因子,如 Zernike 多项式的第 7 项就包含第 2 项的因子  $y$ ,高阶项的系数不可避免地会影响到低阶项的系数,造成串扰,这种情况在有大子孔径或

子孔径数量少时尤为严重。定义串扰级数<sup>[14]</sup>来评估串扰情况,串扰级数越小越好,它只和传感器几何结构与拟合波前的多项式项数的选取有关,获得了适当的 Zernike 项的系数后就可以重构波前。

设一常见的波前像差函数  $W(x, y)$ <sup>[15]</sup>,其表达式为

$$W(x, y) = -7.15(x^2 + y^2) + 0.68(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) + 8.22x^2 + 0.2(x^4 + x^2y^2) + 7.94x - 4.61(x^3 + xy^2), \quad (12)$$

选取 Zernike 多项式和 Z-square 多项式的前 13 项对采样点为 127 pixel×127 pixel 的波前  $W(x, y)$  进行拟合,结果如图 2 所示。从图中可以看出 Z-square 的拟合后残差与 Zernike 拟合后残差的

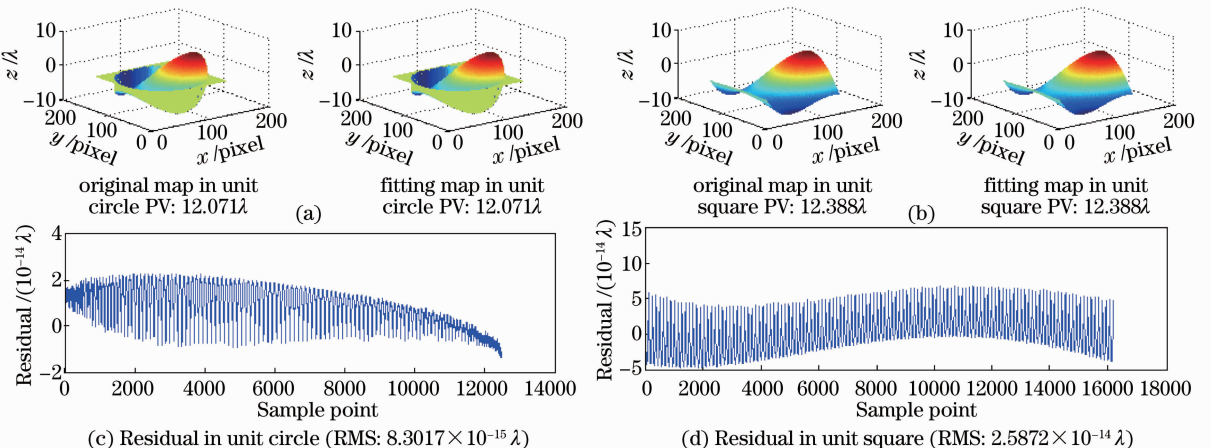


图 2 Zernike 多项式与 Z-square 多项式重构波面

Fig. 2 Reconstructing wavefront with Zernike and Z-square respectively

RMS 值数量级为  $10^{-14} \lambda$ , 可以忽略, 两者在各自正交的区域拟合一致, 图中也标明了峰谷值(PV)。说明用 Z-square 多项式对方形区域内的波前函数拟合是可行的。

$$W(x, y) = -1.26Z_1 + 2.4333Z_2 - 0.6524Z_4 + 1.7085Z_6 - 0.5433Z_8 + 0.0581Z_{11} + 0.0079Z_{12}, \quad (13)$$

$$W(x, y) = -3.0827Z_{S1} + 4.2Z_{S2} - 1.5613Z_{S4} + 3.5381Z_{S6} - 2.1123Z_{S8} + 0.3243Z_{S11} + 0.0215Z_{S12}, \quad (14)$$

由表 3 的 Zernike 到 Z-square 的变换矩阵  $C$ , 可以用线性变换将(14)式表示为 Zernike 多项式的线性组合, 得到

$$W(x, y) = -1.26Z_1 + 2.4333Z_2 - 0.6524Z_4 + 1.7085Z_6 - 0.5433Z_8 + 0.0581Z_{11} + 0.0079Z_{12}, \quad (15)$$

(15)式表明, 变换矩阵  $C$  是正确的, 它有助于理解波前相位数据。但波前  $W(x, y)$  用 Zernike 多项式分解的形式与用 Z-square 多项式分解的形式就不

相同。

## 5 采用 Z-square 多项式重构 Zemax 的波前相位数据

采用 Zemax 物镜库中典型的“Cooke 40 degree field”镜头数据, 用 Z-square 多项式进行波前重构。具体采用波长为 632.8 nm, 视场为  $14^\circ$  时的波前图的数据, 该波前图如图 3 所示。选取图 3 中  $128 \text{ pixel} \times 128 \text{ pixel}$  采样点上的有效数据, 即只在圆域内有数据, 所以对该矩阵数据进行相应处理后, 再分别用 37 项 Zernike 多项式和 Z-square 多项式对该矩阵进行波前重构, 结果如图 4 所示。

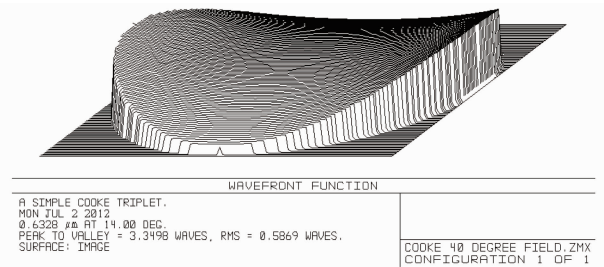


图 3 Zemax 中 Cooke 物镜波前图

Fig. 3 Cooke objective wavefront map in Zemax

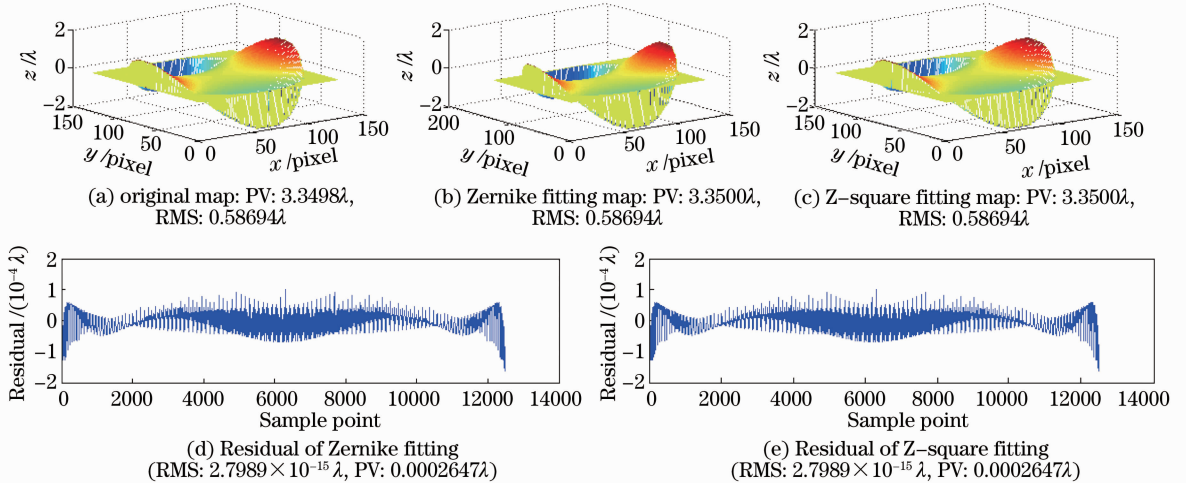


图 4 分别用 Zernike 多项式和 Z-square 多项式重构 Cook 物镜波前图

Fig. 4 Reconstruct the Cook objective wavefront map with Zernike and Z-square respectively

从图 4 中可以看出用 Zernike 重构图和用 Z-square 重构图, 它们的 PV 值和 RMS 值一样, 且与原始波前图的残差的 RMS 值达到了  $10^{-5} \lambda$  量级, 它们的重构效果很好。

## 6 采用 Z-square 多项式重构 Hartmann-Shack 的波前相位数据

Hartmann-Shack(H-S)波前传感器常用区域法

进行波前重构, 但不利于波前数据的分析, 因此对 H-S 波前传感的相位数据用 Z-square 多项式进行波前分析。H-S 测量的是各子孔径  $x, y$  方向的波前相位斜率, 由子波前斜率就可以重构出入射波前相位。实验室已建立了 H-S 波前传感器波前重建分析系统, H-S 传感器的子孔径数目为  $25 \times 25$ 。软件中具有微透镜光斑阵列预处理的程序以及波前重构程序。利用软件系统中的 Southwell<sup>[16]</sup>模型区域

算法构建波前得到相位分布值,在圆域和方域内分别用 37 项 Zernike 多项式和 Z-square 多项式拟合该波前相位数据,重构出波前,分别求出该重构波前的残差,结果如图 5 所示。可以看到虽然两者的拟合重构系数不同,但拟合波前残差 RMS 值数量级相同,用 Z-square 多项式拟合可以与 Zernike 多项式有相同的精度(由于得到的被拟合相位本身就有各种误差,这里拟合精度仅  $0.1\lambda$ )。并通过 Zernike 多项式与 Z-square 多项式的转换矩阵  $C$ ,求

出由 Z-square 重构方形域内波前再经线性变换得到的 Zernike 模式系数,然后计算该系数与用圆域 Zernike 模式重构波前得到的系数之差,如图 6 所示。其差别在  $10^{-14}$  量级,该结果说明它们间的系数几乎相同,也说明可用 Z-square 多项式分解 H-S 得到的波前相位数据,而且采用 37 阶 Zernike 多项式对该实验结构的方形区域内数据拟合时,串扰情况可以忽略。

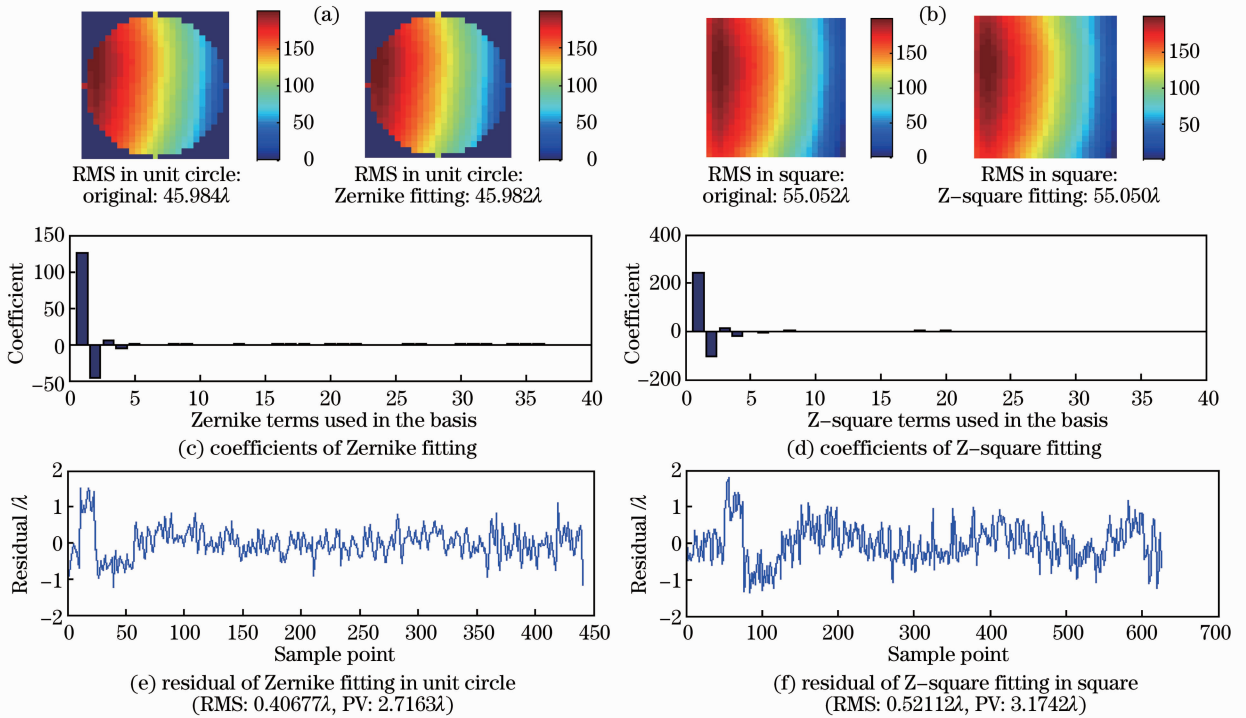


图 5 Zernike 多项式与 Z-square 多项式重构 H-S 波前

Fig. 5 Reconstructed H-S wavefront data Zernike and Z-square respectively

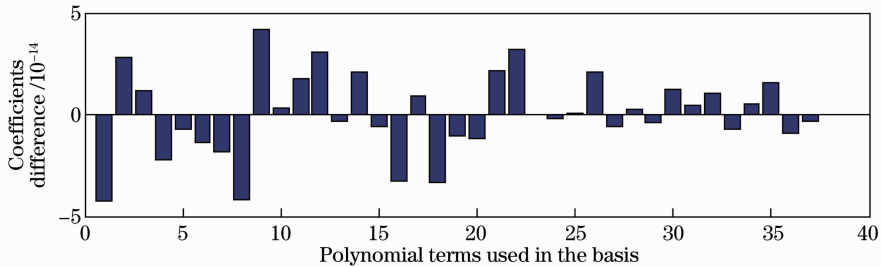


图 6 圆域 Zernike 模式与方域 Zernike 模式的系数比较

Fig. 6 Coefficient comparison of the circular Zernike mode and the square Zernike mode

## 7 结 论

提供了一种方形区域上归一化 Zernike 正交基的生成方法。它采用线性无关组 Gram-Schmidt 正交组构造方法,对标准 Zernike 多项式进行正交处理,得到了一组新的正交多项式——Z-square 多项

式。对比了 Zernike 多项式和 Z-square 多项式在表达式、波前图形表示的异同,获得了它们之间的转换关系。并通过它们在重构波前时的结果残差比较,证明了 Z-square 多项式用于重构方形区域内波前的正确性。研究表明,不仅可由 Z-square 模式的集

合直接对波前进行分解,也可将 Z-square 多项式表示成标准的 Zernike 模式的线性组合,使被分解的波前模式与波像差之间有明确的对应关系。

## 参 考 文 献

- 1 Fan Xinlong, Guan Chunlin, Rao Changhui. Wave-front fitting capability analysis of 1.8 m telescope's adaptive secondary mirror [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, **31**(8): 0822002  
樊新龙, 官春林, 饶长辉. 1.8 m 望远镜变形次镜波前拟合能力分析[J]. *光学学报*, 2011, **31**(8): 0822002
- 2 Shi Jinfeng, Wu Qingwen, Zhang Jianping *et al.*. Thermal-optical analysis for optical window of high-altitude and high-speed aerial camera[J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(4): 0422004  
石进峰, 吴清文, 张建萍等. 高空高速航空相机光学窗口的热光学分析[J]. *光学学报*, 2012, **32**(4): 0422004
- 3 C. Zhao, J. H. Burge. Orthonormal vector polynomials in a unit circle, part I: basis set derived from gradients of Zernike polynomials[J]. *Opt. Express*, 2007, **15**(26): 18014~18024
- 4 R. J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, **66**(3): 207~211
- 5 M. Born, E. Wolf. *Principle of Optics* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005
- 6 R. Upton, B. Ellerbroek. Gram-Schmidt orthogonalization of the Zernike polynomials on apertures of arbitrary shape[J]. *Opt. Lett.*, 2004, **29**(24): 2840~2842
- 7 W. H. Swantner, W. H. Lowrey. Zernike-Tatian polynomials for interferogram reduction [J]. *Appl. Opt.*, 1980, **19**(1): 161~163
- 8 V. N. Mahajan. Zernike annular polynomials for imaging systems with annular pupils [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1981, **71**(1): 75~85
- 9 Zhao Junpu, Chen Bo, Peng Hansheng *et al.*. Laser beam quality diagnosis with radial shearing interferometry [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2006, **18**(4): 565~568  
赵军普, 陈波, 彭翰生等. 径向剪切干涉法综合诊断光束质量研究[J]. *强激光与粒子束*, 2006, **18**(4): 565~568
- 10 Duan Haifeng, Yang Zeping, Wang Shuqing *et al.*. Model wavefront reconstruction of Shack-Hartmann sensor on arbitrary area and wavefront expression by Zernike polynomials [J]. *Chinese J. Lasers*, 2002, **A29**(6): 517~520  
段海峰, 杨泽平, 王淑青等. 夏克-哈特曼传感器任意形状孔径波前的模式重构及 Zernike 多项式描述[J]. *中国激光*, 2002, **A29**(6): 517~520
- 11 Liu Zesheng, Li Dahai. Comparative study of Hartmann wavefront reconstruction algorithm in square zone [J]. *Laser Journal*, 2008, **29**(1): 39~40  
刘泽晟, 李大海. 方形区域上哈特曼波前重构算法比较研究[J]. *激光杂志*, 2008, **29**(1): 39~40
- 12 J. C. Wyant. *Zernike Polynomials*, Zernike Polynomials For The Web. nb, 2003
- 13 T. M. Apostol. *Linear Algebra-A First Course With Applications to Differential Equations* [M]. Shen Hao, Shen Jiachen Transl.. Beijing: People's Posts and Telecom Press, 2010. 103~109  
T. M. Apostol. 线性代数及其应用导论[M]. 沈颢, 沈佳辰译. 北京: 人民邮电出版社, 2010. 103~109
- 14 Guangming Dai. Modified Hartmann-Shack wavefront sensing and iterative wavefront reconstruction [C]. *SPIE*, 1994, **2201**: 562~573
- 15 P. Hariharan, D. Sen. Radial shearing interferometer [J]. *J. Scientific Instruments*, 1961, **38**(11): 428~432
- 16 W. H. Southwell. Wave-front estimation from wave-front slope measurement [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1980, **70**(8): 998~1006

栏目编辑:何卓铭