

基于健壮中国剩余定理的频率选择准则及其在 相位解包裹中的应用

张 旭¹ 朱利民^{2*} 屠大维¹ 樊玲玲¹

(¹上海大学机电工程与自动化学院, 上海市机械自动化及机器人重点实验室, 上海 200072)

²上海交通大学机械与动力工程学院, 上海 200240

摘要 高质量相位解包裹是相位轮廓术的重要问题。分析了亮度噪声对相位主值的影响, 将相位解包裹问题转化为同余问题, 基于健壮中国剩余定理推导出频率选择的上限准则, 利用该准则指导多频相位展开算法中参数的设置, 并利用健壮中国剩余定理的封闭解确定对应性。实验结果表明, 健壮中国剩余定理与传统中国剩余定理相比具有强抗干扰特性, 在满足频率上限准则时可实现接近 100% 正确率的解包裹; 反之, 相位展开效果则会恶化。

关键词 成像系统; 相位轮廓术; 相位解包裹; 健壮中国剩余定理

中图分类号 TN206 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201239.1108009

Frequency Selection Rule based on Robust Chinese Remainder Theorem and Its Application in Phase Unwrapping

Zhang Xu¹ Zhu Limin² Tu Dawei¹ Fan Lingling¹

¹ Shanghai Key Laboratory of Manufacturing Automation and Robotics, School of Mechatronic
Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200072, China

² School of Mechanical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China

Abstract Phase unwrapping is an essential problem in phase measuring profilometry. In this paper, phase unwrapping is modeled as a congruence problem. Based on robust Chinese remainder theorem, the frequency selection rule is proved by analyzing the uncertainty of wrapped phase because of the intensity noise. Then, this rule is adopted to design the frequency unwrapping algorithm and the parameters are determined with high confidence probability. After that, the closed-form algorithm of robust Chinese remainder theorem is employed to determine the correspondence. Finally, the quantitative comparisons are implemented in our developed structured light measurement system. The experimental results show that the frequency selection rule is valid, and robust Chinese remainder theorem is less sensitive to the phase noise than the traditional Chinese remainder theorem. If the frequency selection rule is satisfied, the accuracy of the unwrapped phase can achieve nearly 100%, otherwise, the performance is deteriorated.

Key words imaging systems; phase measuring profilometry; phase unwrapping; robust Chinese remainder theorem

OCIS codes 000.3110; 110.6880; 120.5050; 150.6910

1 引 言

相位轮廓术(PMP)是一种基于主动立体视觉的光学三维测量方法, 具有非接触、高速度、高精度、大数据量、大工作距离、材料适用范围广等特点, 在

工业检测、文物数字化、人体测量等领域得到了广泛的应用^[1,2]。PMP的原理是通过有一定相位差的多幅光栅条纹图像计算图像中每个像素的相位主值^[3,4]。相位主值位于一个周期内, 也称为包裹相

收稿日期: 2012-05-29; 收到修改稿日期: 2012-07-03

基金项目: 国家自然科学基金(51075252、51121063 和 51205244)资助课题。

作者简介: 张 旭(1982—), 男, 博士, 讲师, 主要从事结构光三维测量, 视觉检测等方面的研究。

E-mail: xuzhang@shu.edu.cn

* 通信联系人。E-mail: zhulm@sjtu.edu.cn

位,在整个测量空间呈锯齿状分布,必须对其进行相位展开获得空间点的绝对相位值,才能根据系统标定信息计算观察点的深度信息。因此,相位解包裹技术作为相位测量领域的一个重要问题受到国内外学者的关注^[5,6]。目前,相位解包裹技术主要有空间解包裹技术和多频解包裹技术。

空间解包裹采用一幅包裹相位图,通过分析空间相邻元素之间的相位值,根据相位连续性适当调整相对相位值,恢复出连续的绝对相位分布。典型代表为路径相关算法和最小范数法。Ghiglia 等^[6]的对比结论表明:没有一种空间相位展开算法能够对所有情况的相位进行展开。事实上,除非在理想情况下(被测轮廓简单、信噪比足够高),由一幅包裹相位图可实现相位展开是不可能完全可靠的^[7]。

多频包裹方法在时间一致性假设下针对同一空间位置上不同时刻下的包裹相位确定绝对相位值。典型代表有小数重合法、时间解包裹法、外差法和基于中国余数定理的方法。小数重合法^[8]假设某一频率下的条纹级数已经确定,然后根据多频包裹相位的剩余小数确定每个频率的条纹级数,通过遍历搜索,选择条纹级数最接近整数的结果。小数重合法错误率低,然而计算成本巨大,不利于实时计算。时间解包裹法^[9,10]利用等差或等比频率序列的包裹相位,根据序列特性确定绝对相位。等比频率序列比等差频率序列投射条纹数量少,测量速度快,然而频率比值的选择必须综合考虑相位误差的影响。外差法^[11,12]基于三角函数的积化和差准则,两个频率的信号相乘可产生两个新频率三角函数信号,一个等于原有两个频率之和,另一个是原有两频率之差。通过差频使整个测量范围处于低频信号的一个周期内,从而确定绝对相位。外差法计算简单直接,然而解包裹范围有限,需对频率选择进行优化。中国余数定理阐明同余的存在和计算方法,可实现最大化解包裹范围,计算效率高。因而,基于中国余数定理的解包裹方法受到众多学者的关注^[13~18]。

Gushov 等^[13]首次将中国余数定理引入相位轮廓术,设计具有两两互质特性的多个频率,直接确定绝对相位。该方法对相位误差非常敏感,折叠整数容易计算错误,致使绝对相位出现大偏差。Takeda 等^[14]针对在 Gerohbery-Saxton 算法的弊端,提出自适应高度偏移结合误差校正查找表法纠正大误差。Zhong 等^[15]使用比例为无理数的两个频率在设定范围内计算所有折叠整数的同余结果,并保存误差值,根据阈值选择合适的折叠整数作为最佳结果。

Towers 等^[16]假设相位误差存在上、下限,利用中国余数定理的计算公式,对多个频率下的绝对相位误差进行遍历搜索,根据测量范围约束确定最优结果。Xia 等^[17]提出了使用余数差值代替余数的健壮中国余数定理,在余数误差上限小于 $1/4$ 模数的公约数情况下,折叠整数可无误差求解。该定理表明,提高公约数可大大降低解包裹的错误率,然而计算方法需要进行二维搜索。上述方法主要采用搜索机制提高中国余数定理的抗干扰能力,尽管解包裹正确率得以提高,但是增大了计算成本。这些方法的计算量随着频率选择个数增多呈幂函数增长。Wang 等^[18]在健壮中国剩余定理的基础上提出了一种封闭求解方法,并且将该定理从整数形式推广到实数形式。

健壮中国定理假设余数的误差是同分布的,并使用统一的误差上限指标指明折叠整数无误差解的存在。然而,相位轮廓术的余数的标准差分布并不相同,且不存在严格的上限准则。本文分析了亮度误差与相移法估计相位标准差的关系,并建立了基于健壮中国定理的相位解包裹模型,推导出了频率选择准则,并应用于相位轮廓术进行三维测量。

2 原理和方法

2.1 亮度噪声对包裹相位的影响

目前,相移技术已成为包裹相位获取的重要方法,其中最为常用的是均匀相位步长算法。投射的第 n 幅亮度图像可表示为

$$I_n^p(y) = A^p + B^p \cos\left(2\pi f y^p - \frac{2\pi n}{N}\right), \quad (1)$$

式中 f 为余弦周期函数的频率, A^p 和 B^p 为预先设定好的常数, y^p 为投影机任意像素的纵坐标值, I_n^p 为此像素对应的投射亮度值。

当不考虑 Gamma 效应时,在投影机和摄像机的亮度传递函数为理想线性的情况下,摄像机图像对应像素上获得的亮度值可表示为

$$I_n^c(x^c, y^c) = A^c + B^c \cos\left(\phi - \frac{2\pi n}{N}\right) + \Delta I(x^c, y^c), \quad (2)$$

式中 A^c 为该摄像机图像像素多幅余弦采样图像的平均亮度, B^c 则为此余弦函数的调制幅值,相位值 ϕ 为 2π 的模数,即 $\phi = 2\pi f y^p \pmod{2\pi}$, $\Delta I(x^c, y^c)$ 为随机噪声。亮度噪声来源于光源波动和摄像机的电子噪声,与相位和像素位置无关,符合零均值正态分布 $N(0, \sigma_I)$ ^[19]。根据 N 步相移图像,利用最小二乘法可同时确定三个未知数,即

$$\begin{cases} A^c = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} I_n^c, \\ B^c = \frac{2}{N} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{N-1} I_n^c \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{N-1} I_n^c \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right]^2 \right\}^{1/2}, \\ \phi = \arctan \left[\frac{\sum_{n=0}^{N-1} I_n^c \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)}{\sum_{n=0}^{N-1} I_n^c \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)} \right]. \end{cases} \quad (3)$$

根据不确定性传播原理,包裹相位的误差与亮度误差的关系可表示为

$$\sigma_{\phi}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial I_n^c} \right)^2 \sigma_i^2 \right], \quad (4)$$

由(3)式,包裹相位对 n 步相移亮度求偏导,可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial I_n^c} = -\frac{2}{NB^c} \sin\left(\phi - \frac{2\pi n}{N}\right), \quad (5)$$

(5)式代入(4)式可得

$$\sigma_{\phi} = \sqrt{\frac{2}{N} \frac{\sigma_i}{B^c}}. \quad (6)$$

2.2 基于健壮中国剩余定理的选频准则

根据 L 个频率 $0 < f_1 < f_2 < \dots < f_L$ 条纹的包裹相位 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_L$, 展开相位的问题可表述为

$$2\pi f_i y^p = 2k_i \pi + \phi_i, \quad 0 \leq i \leq L, \quad (7)$$

式中 k_i 为对应频率 f_i 的未知整数,称为折叠整数, $2\pi f_i y^p$ 为绝对相位。(7)式两边同除以 $2\pi f_i$,可转化为

$$\begin{cases} y^p = k_i \lambda_i + r_i, \\ \lambda_i = \frac{1}{f_i}, \quad r_i = \frac{\phi_i}{2\pi f_i}, \quad 0 \leq i \leq L \end{cases} \quad (8)$$

式中 λ_i 为对应频率余弦波的波长, r_i 为 y^p 对 λ_i 的模,也称为余数。由(8)式可知,对于同一整数 y^p 在不同除数 λ_i 下,余数 r_i 已知,折叠整数 k_i 未知,求解整数 y^p ,其本质为数论中的同余问题。如果 λ_i 两两互质,根据中国剩余定理,则 y^p 可表示为

$$y^p = \sum_{i=1}^L \bar{F}_i F_i r_i \pmod{\lambda}, \quad (9)$$

式中 $\lambda = \prod_{i=1}^L \lambda_i$, $F_i = \frac{\lambda}{\lambda_i}$, $\bar{F}_i F_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$ 。然而中国剩余定理对噪声非常敏感,Xia 等^[17] 将其推广到健壮中国剩余定理:设 $\lambda_i = M\Gamma_i$, M 为已知的正实数, Γ_i 两两互质, $0 \leq y^p < M\Gamma_1\Gamma_2 \dots \Gamma_L$,只要余数噪声的上限小于 $M/4$,折叠整数 k_i 真值可无差错估计。这一结论的充分条件可表示为

$$\max(|\Delta r_i|) < \frac{M}{4}. \quad (10)$$

根据方差传递原理,由(6)式和(8)式可确定余数 r_i 的标准差

$$\sigma_{r_i} = \frac{1}{2\pi f_i} \sqrt{\frac{2}{N} \frac{\sigma_i}{B^c}}. \quad (11)$$

根据三倍标准差原理,在置信概率 99.73% 下无差错解包裹的准则为

$$\max(3\sigma_{r_i}) < \frac{M}{4}. \quad (12)$$

根据(11)式和 $0 < f_1 < f_2 < \dots < f_L$, (12)式可化简为

$$\frac{1}{f_1 M} < \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{B^c}{\sigma_i}. \quad (13)$$

根据(8)式和 $\lambda_i = M\Gamma_i$, (13)式可进一步简化为

$$\max(\Gamma_i) < \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{B^c}{\sigma_i}. \quad (14)$$

(14)式表明最大波长与公约数 M 的比值必须满足上限准则,才能在置信概率 99.73% 下无差错解包裹。这一上限与相移个数 N 、条纹的波动幅值 B^c 和亮度噪声的标准差 σ_i 有关。后两者比值 B^c/σ_i 表示了获取条纹的信噪比。

从另一个角度分析,(14)式与公约数 M 无关。因此,在满足(14)式时,对于两两互质的情况下,健壮中国剩余定理也可实现置信概率 99.73% 下无差错解包裹。这就要求对于普通投影机像素(长度为 1024 pixel)范围内唯一,必须增大频率数量 L ,增大相移数量 N ,增大条纹调制幅值 B^c 。这使得拍摄图像数量增大,测量效率低下。与之相对的,公约数 M 远远大于 1 时,健壮中国剩余定理利用公约数 M 扩展了范围,能够满足测量范围内解包裹的唯一性,从而大大减少了拍摄图像的数量。

2.3 相位解包裹算法

根据频率上限确定准则,可建立高置信概率的相位解包裹算法。算法主要包括以下步骤:

1) 估计亮度误差。投影机投射均匀亮度图像于白色标准板上,在恒定环境光照下多次反复获取亮度图像,然后计算摄像机每一像素的方差,选择最大标准差作为亮度误差的实际值。

2) 根据频率上限准则(14)式和解包裹范围大小确定频率值、相移步数、拍摄条纹最小调制幅值。

3) 根据健壮中国剩余定理的封闭解^[18] 计算对应性,实现解包裹。

3 实验和分析

构建了一套由投影机和摄像机组成的结构光测

量系统。如图 1(a)所示摄像机采用 OPAL-1000c,分辨率为 $1024 \text{ pixel} \times 1024 \text{ pixel}$,投影机采用联想 T165,分辨率为 $1024 \text{ pixel} \times 768 \text{ pixel}$ 。实际的结构光测量系统中存在 Gamma 畸变,必须进行 Gamma 标定和矫正^[20],使投影机和摄像机亮度传递由幂函数转变为线性函数。所有实验在已参数标定和 Gamma 校正的系统上进行。

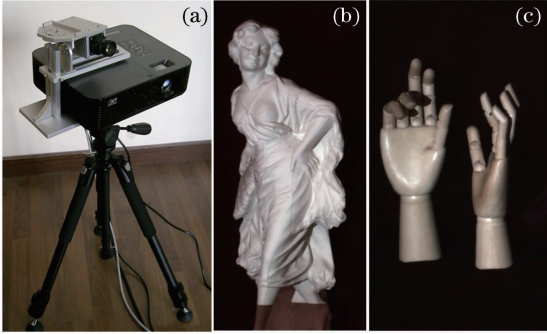


图 1 实验装置图和测量对象。(a)结构光测量系统;(b)女孩;(c)双手

Fig. 1 Experimental setup and measuring objects. (a) Structured light measurement system; (b) girl; (c) hands

投影机将像素值为 155 的等亮度图像投射到白色标准板上,摄像机拍摄 500 次,然后对每个像素计算亮度标准差。整幅图像各个像素的亮度标准差并不一致(如图 2 所示)。其中均值为 1.0408,最大值为 1.4506。由于亮度噪声影响频率选择的上限值,因此取亮度标准差最大值计算最安全频率上限值。

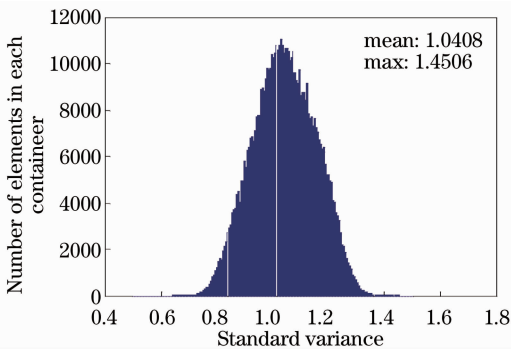


图 2 全幅面亮度噪声标准差累积分布图

Fig. 2 Distribution of the intensity standard deviation in the whole image

理论上,根据摄像机的亮度范围,拍摄条纹的最大调制幅值为 127。因此,选择相移步数 $N=3$,按照(14)式可得 $\max(\Gamma_i) < 56.1436$ 。实际上,由于物体的反射率差异,不能保证拍摄对象在同一幅图像上达到最大调制幅值。因此,在满足投影机横坐标像素(1024 pixel)范围内投影机横坐标唯一的前提

下,最大化结构光测量系统对测量对象反射率的覆盖范围。最终多频条纹图像的选择参数如下: $\Gamma_1=3, \Gamma_2=4, \Gamma_3=5, M=20$ 。根据(14)式可得调制幅值的阈值 $B_{\min}=11.3$,对于三步相移计算出的包裹相位进行阈值过滤。该包裹相位作为输入,使用健壮中国剩余定理的封闭解计算对应性。

为便于定量分析,使用时空分析法获得的对应性作为基准,评价解包裹结果的正确性。对应性基准建立的详细过程及算法请见参考文献[21]。根据健壮中国剩余定理,折叠整数获得真值则解包裹正确,且对应性估计值 y^p 的误差上限为 $M=20$ 。因此以此为阈值评价对应性结果。为了验证选频规则的必要性,使用另一超过上限准则的多频 $\Gamma_1=53, \Gamma_2=59, \Gamma_3=67, M=1$ 进行比较,两方法都使用健壮中国剩余定理的封闭解计算对应性,正确率如图 3 所示。符合频率上限准则的方法正确率几乎为 100%,而不满足上限准则的正确率不足 80%。为了验证健壮中国剩余定理相对传统中国剩余定理的优越性,使用中国剩余定理对频率(1/53, 1/59, 1/67)的包裹相位确定对应性,其正确率如图 3 黑色(彩图请见网络电子版)柱状图所示。由图 3 可知,其正确率非常低,对于两种物体均低于 1%。该实验结果表明,对于同样频率组的包裹相位,健壮中国剩余定理的正确率远远大于传统中国剩余定理,健壮中国剩余定理在抵抗噪声影响上性能更优。

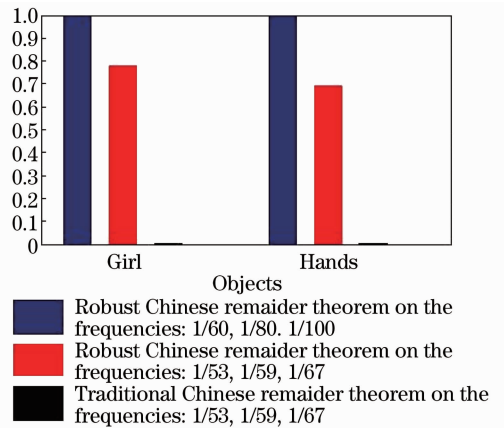


图 3 三种方法的正确率结果

Fig. 3 Accuracy results of three methods

对于前两种方法确定的对应性,根据系统参数计算点云,正确的对应性产生正确点云;反之,则为噪声点。图 4 所示为曲面和噪声点结果。由图 4 可知,符合频率上限准则的,噪声点极为稀少,且噪声点与曲面的距离较近;反之,使用频率 1/53, 1/59, 1/67 的结果,点云噪声数量巨大,且具有阵列复制

现象(见放大图)。这是因为当不满足健壮中国定理的充分条件时,折叠整数 k_1 的估计值与真值存在偏

差,则产生的对应性产生整数倍波长 λ_1 的移动。对应性经三角计算后产生的点云产生了偏移效果。

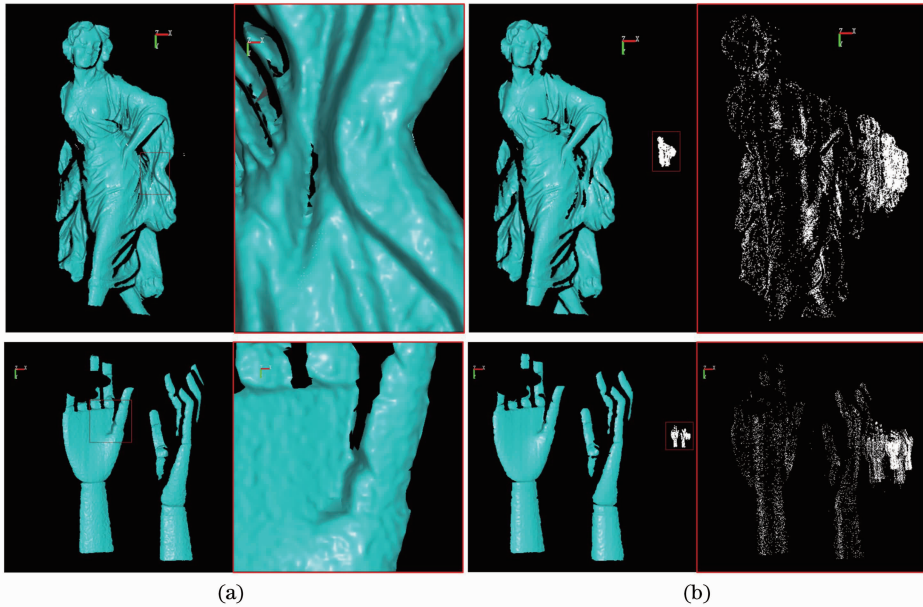


图4 基于健壮中国剩余定理的多频相位解包裹曲面(青色)噪声(白色点)结果。(a)使用频率 $1/60, 1/80, 1/100$, 符合选频上限准则;(b)使用频率 $1/53, 1/59, 1/67$, 不符合频率上限准则

Fig.4 Surface (cyan) and noise point (white) results based on robust Chinese remainder theorem. (a) Frequencies are $1/60, 1/80, 1/100$, which are in accordance with frequency selection rule; (b) frequencies are $1/53, 1/59, 1/67$, which are not in accordance with frequency selection rule

4 结 论

中国剩余定理凭借其计算效率高的优势在相位解包裹中占有重要地位,却对噪声极其敏感。众多改进算法采用了搜索机制来提高解包裹正确率,然而大大增加了计算成本,特别是随着频率数量的增多,计算量成指数增长。健壮中国定理及其封闭解的提出部分解决了上述问题,并被成功应用于通信领域。健壮中国定理假设余数的误差是同分布的,并使用统一的误差上限指标指明折叠整数无误差解的存在。然而,相位轮廓术的余数的标准差分布并不相同,且不存在严格的上限准则。将相位轮廓术中的相位解包裹转换为了同余问题,基于健壮中国剩余定理的充分条件,在分析亮度噪声对相位影响的基础上,推导出了频率选择准则,并应用于多频相位展开,实现了三维面形测量。频率上限准则的意义在于指导多频相移中参数的设置,并且从理论上表明在何种参数设置下可实现高置信概率的解包裹。实验结果证明了健壮中国剩余定理的优越性和频率上限准则的有效性。

参 考 文 献

1 F. Chen, G. Brown, M. Song. Overview of three-dimensional

- shape measurement using optical methods[J]. *Opt. Engng.*, 2000, **39**(1): 10~22
- 2 S. S. Gorthi, P. Rastogi. Fringe projection techniques: Whither we are? [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2010, **48**(2): 133~140
- 3 V. Srinivasan, H. C. Liu, M. Halioua. Automated phase-measuring profilometry of 3-D diffuse objects[J]. *Appl. Opt.*, 1984, **23**(18): 3105~3108
- 4 S. Zhang. Recent progresses on real-time 3D shape measurement using digital fringe projection techniques[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2010, **48**(2): 149~158
- 5 Yue Huimin, Su Xianyu. Temporal phase unwrapping progress [J]. *Laser Journal*, 2004, **25**(3): 9~12
- 岳慧敏, 苏显渝. 时间位相展开方法研究进展[J]. *激光杂志*, 2004, **25**(3): 9~12
- 6 D. C. Ghiglia, M. D. Pritt. Two-Dimensional Phase Unwrapping: Theory, Algorithms, and Software [M]. New York: Wiley, 1998
- 7 Yue Huimin. Research on Three-Dimensional Profilometry Based on Temporal Phase Unwrapping [D]. Chengdu: Sichuan University, 2005
- 岳慧敏. 基于时间相位展开的三维轮廓测量研究[D]. 成都: 四川大学, 2005
- 8 K. Falaggis, D. P. Towers, C. E. Towers. Method of excess fractions with application to absolute distance metrology theoretical analysis[J]. *Appl. Opt.*, 2011, **50**(28): 5484~5498
- 9 J. M. Huntley, H. O. Saldner. Error-reduction methods for shape measurement by temporal phase unwrapping[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1997, **14**(12): 3188~3196
- 10 J. Tian, X. Peng, X. Zhao. A generalized temporal phase unwrapping algorithm for three-dimensional profilometry [J].

- Opt. and Lasers in Engineering*, 2008, **46**(4): 336~342
- 11 K. Houairi, F. Cassaing. Two-wavelength interferometry extended range and accurate optical path difference analytical estimator[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2009, **26**(12): 2503~2511
 - 12 C. E. Towers, D. P. Towers, J. D. C. Jones. Absolute fringe order calculation using optimised multi-frequency selection in full-field profilometry[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2005, **43**(7): 788~800
 - 13 V. I. Gushov, Y. N. Solodkin. Automatic processing of fringe patterns in integer interferometers[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 1991, **14**(4): 311~324
 - 14 M. Takeda, Q. Gu, M. Kinoshita *et al.*. Frequency-multiplex Fourier-transform profilometry: a single-shot three-dimensional shape measurement of objects with large height discontinuities and/or surface isolations [J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(22): 5347~5354
 - 15 J. Zhong, Y. Zhang. Absolute phase-measurement technique based on number theory in multifrequency grating projection profilometry[J]. *Appl. Opt.*, 2001, **40**(4): 492~500
 - 16 C. Towers, D. Towers, J. Jones. Time efficient Chinese remainder theorem algorithm for full-field fringe phase analysis in multi-wavelength interferometry [J]. *Opt. Express*, 2004, **12**(6): 1136~1143
 - 17 X. G. Xia, G. Wang. Phase unwrapping and a robust Chinese remainder theorem[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, **14**(4): 247~250
 - 18 W. Wang, X. G. Xia. A closed-form robust Chinese remainder theorem and its performance analysis[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(11): 5655~5666
 - 19 J. Li, L. G. Hassebrook, C. Guan. Optimized two-frequency phase-measuring-profilometry light-sensor temporal-noise sensitivity[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2003, **20**(1): 106~115
 - 20 Zhang Xu, Zhu Limin. Phase error model from gamma distortion and Gamma Calibration[J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, **32**(4): 0413006
张 旭, 朱利民. Gamma畸变的相位误差模型与Gamma标定技术[J]. *光学学报*, 2012, **32**(4): 0413006
 - 21 X. Zhang, L. M. Zhu, Y. F. Li. Indirect decoding edges for one-shot shape acquisition[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2011, **28**(4): 651~661

栏目编辑:李文喆