

# 用液芯变焦柱透镜精确测量液体折射率

李 强 孙丽存 孟伟东 普小云

(云南大学物理科学技术学院物理系, 云南 昆明 650091)

**摘要** 加工制作了一种液芯变焦柱透镜, 并利用这种柱透镜精确测量液体的折射率。在空心的柱透镜内注入待测液体, 通过测量液芯透镜的焦距, 根据焦距和折射率之间的关系, 计算出液芯介质的折射率。此方法有效地提高了折射率测量的灵敏度, 减小了测量系统的景深。选取  $20\times$  显微物镜可实现液体折射率在  $1.3\sim 1.642$  范围内的精确测量, 单次测量误差小于  $0.0002$ 。对透镜折射率灵敏度曲线以及测量系统景深曲线的分析表明, 增加折射率灵敏度和测量系统的有效数值孔径, 可以进一步提高测量的准确度。

**关键词** 测量; 液体折射率; 测量灵敏度; 柱透镜; 景深

**中图分类号** O439; TN247; TP202<sup>+</sup>.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201239.1008005

## Refractive Index of Liquid Measured by Liquid-Core Zoom Cylindrical Lens

Li Qiang Sun Licun Meng Weidong Pu Xiaoyun

(Department of Physics, School of Physics Science and Technology,  
Yunnan University, Kunming, Yunnan 650091, China)

**Abstract** A liquid-core-zoom cylindrical lens has been fabricated, which is used to measure accurately the refractive index of liquid filled into the core region of the cylindrical lens. The focal length of such a cylindrical lens varies with the refractive index of core liquid, which can be known by measuring experimentally the related focal length. Due to a high sensitivity in measuring refractive index and a short depth of field, a high accuracy in measurement of refractive index is ensured. The accuracy of refractive index for one single measurement is better than  $0.0002$  in the range of  $1.3\sim 1.642$ , when a  $20\times$  objective is used in a reading microscope. By either enhancing sensitivity of refractive index of the cylindrical lens or enlarging effective numerical aperture of the measurement system, the accuracy of refractive index can be further improved.

**Key words** measurement; refractive index of liquid; measurement sensitivity; cylindrical lens; depth of field

**OCIS codes** 080.2740; 080.6755; 110.1758; 220.4840

## 1 引 言

折射率是透明液体的重要光学参数, 借助折射率能了解物质的光学性能、纯度、浓度以及色散等性质, 其他一些参数(如扩散系数)也与折射率密切相关<sup>[1]</sup>。液体折射率的精确测量在化工、医药、食品、石油等工业部门和高校实验中都有重要的应用价

值。随着现代测量技术的不断发展和更新, 生物、化工领域以及一些检测测量装置对液体折射率的精度要求越来越高, 操作要求越来越简易。目前检测机构多采用的是阿贝折射仪系列产品, 阿贝折射仪采用的是掠入射全反射原理<sup>[2,3]</sup>, 经过不断更新发展, 已趋于成熟, 测量误差范围为  $\pm 0.0002$ 。而实验科

**收稿日期**: 2012-05-07; **收到修改稿日期**: 2012-07-09

**基金项目**: 国家自然科学基金(11164033)、云南省应用基础研究基金(2011FA006)和云南省高校科技创新团队支持计划资助课题。

**作者简介**: 李 强(1987—), 男, 博士研究生, 主要从事光学系统的成像及液体折射率测量领域等方面的研究。

E-mail: liqiang\_ynu@126.com

**导师简介**: 普小云(1957—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事光学与光电子学等方面的研究。

E-mail: xypu@163.com(通信联系人)

研单位常常采用的是干涉的方法<sup>[4~6]</sup>,此方法测量精度较高( $10^{-5}$ 量级),但对实验条件要求苛刻。毛细管焦点法<sup>[7~9]</sup>测量标准偏差可以达到近0.0002,液体样品一次测量需要量小于0.002 ml,但由于焦距较短(小于等于2.35 mm)造成折射率灵敏度不高(可分辨最小折射率变化量约为0.001),光源宽度过窄(限制在毛细管内径范围内)造成光线会聚角度不足,测距景深过大。为解决以上问题,本课题组加工制作了一种液芯变焦柱透镜。本文介绍了利用这种柱透镜精确测量液体折射率的方法。此方法既能保证折射率的测量准确度,使单次测量误差值小于0.0002,同时使焦距拉长(大于等于18.39 mm)提高了折射率的测量灵敏度(可分辨最小折射率变化量约为0.0002)。注入不同折射率的液体在空心的柱透镜内,通过测量液芯透镜的焦距,根据焦距和

折射率之间的关系,计算出液芯介质的折射率。

## 2 实验原理

测量原理如图1(a)所示。竖直放置的柱透镜和注入透镜芯区的液体构成一个共轴柱面光学系统。根据共轴球面光学系统成像原理可知,在近轴条件下,单色(中心波长 $\lambda = 580$  nm,光谱宽度 $\Delta\lambda_{\text{FWHM}} = 32$  nm)平行光经光学系统后将在液芯柱透镜的另一侧会聚成一条平行于轴线的“亮线”,“亮线”所在位置即为光学系统的焦点 $F$ 。“亮线”经显微物镜和电子目镜成像后落在CCD面阵上,当“亮线”处于显微镜的正常工作成像位置时,其在显示屏上为一细锐的直线。用一种折射率已知的标准液体对测量系统进行标定,即可计算出注入柱透镜芯区的待测液体折射率。

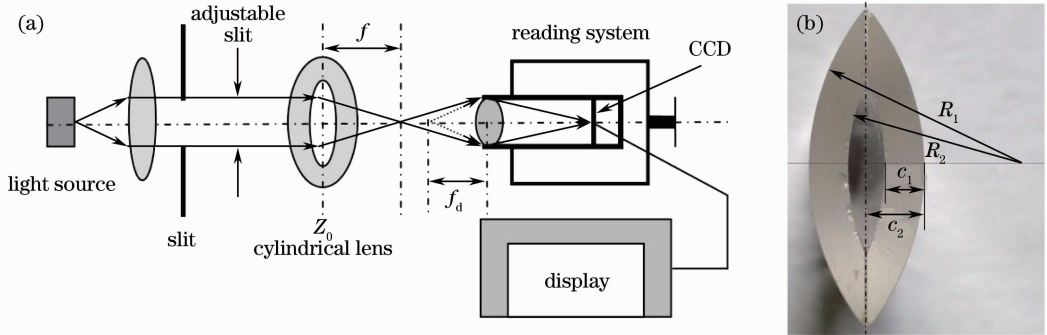


图1 测量装置图。(a)测量原理图;(b)液芯柱透镜实物剖面图

Fig.1 Schematic of measurement setup. (a) Measurement principle; (b) profile of liquid-core cylindrical

图1(b)为液芯柱透镜实物剖面图,其中 $R_1 = 20.0$  mm, $R_2 = 17.0$  mm, $c_1 = 3.0$  mm, $c_2 = 4.5$  mm,材料为K9玻璃(折射率为1.5163)。柱透镜为左右对称结构,呈现桃核形状,中心区域注入待测液体。

### 2.1 成像原理

如图2(a)所示,对第一个曲面运用高斯成像公式<sup>[10]</sup>有:

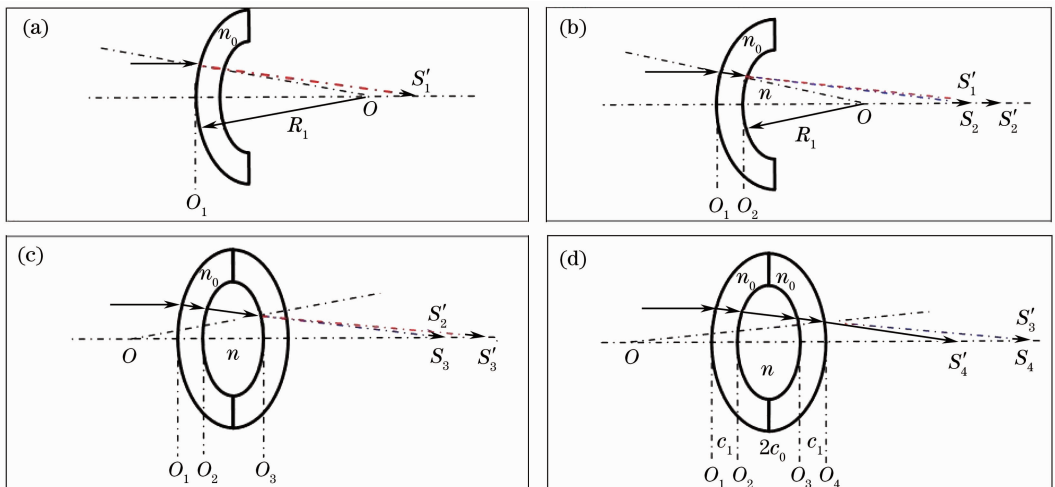


图2 逐面成像示意图

Fig.2 Schematic of imaging process

$$\frac{n_0}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \frac{n_0 - 1}{R_1}, s_1 = -\infty, s_1'(O_1) = \frac{n_0 R_1}{n_0 - 1}. \quad (1)$$

如图 2(b)所示,第二曲面:

$$\frac{n}{s_2'} - \frac{n_0}{s_2} = \frac{n - n_0}{R_2}, s_2(O_2) = s_1'(O_1) - c_1, s_2'(O_2) = \frac{nR_2 s_2(O_2)}{n_0 R_2 + (n - n_0)s_2(O_2)}. \quad (2)$$

如图 2(c)所示,第三曲面:

$$\frac{n_0}{s_3'} - \frac{n}{s_3} = \frac{n_0 - n}{-R_2} = \frac{n - n_0}{R_2}, s_3(O_3) = s_2'(O_2) - 2c_0, s_3'(O_3) = \frac{n_0 R_2 s_3(O_3)}{nR_2 + (n - n_0)s_3(O_3)}. \quad (3)$$

如图 2(d)所示,第四曲面:

$$\frac{1}{s_4'} - \frac{n_0}{s_4} = \frac{1 - n_0}{-R_1} = \frac{n_0 - 1}{R_1}, s_4(O_4) = s_3'(O_3) - c_1, s_4'(O_4) = \frac{R_1 s_4(O_4)}{n_0 R_1 + (n_0 - 1)s_4(O_4)}. \quad (4)$$

经过 4 个曲面的依次成像,整个柱透镜的焦距  $f$  为

$$f = S'(O_4) + c_1 + c_0, \quad (5)$$

式中  $c_1 = 3 \text{ mm}$ ,  $c_0 = 1.5 \text{ mm}$ ,材料为 K9 玻璃。

### 2.2 焦距与芯区折射率的关系

根据逐面成像公式(1)~(5)式,可以计算已知芯区液体折射率情况下,液芯柱透镜的理论焦距值。

对表 1 中的数值进行多项式曲线拟合,可以得出注入芯区的液体折射率  $n$  与桃核形柱透镜焦距  $f$  的关系表达式为

$$f = 139.49n^2 - 469.87n + 413.77. \quad (6)$$

表 1 芯区折射率与焦距的对应关系

Table 1 Relationship between the refractive index of core region and focal length

Liquid	Water	Ethanol	Saturated KCl solution (20 °C)	Glycol	Glycerol	Nitrobenzene	Quinoline
Refractive index in literature <sup>[11]</sup>	1.3335	1.3614	1.3690	1.4317	1.4721	1.5520 <sup>[12]</sup>	1.6257 <sup>[13]</sup>
Theoretical focal length /mm	35.531	32.481	31.744	26.800	24.403	20.811	18.393

用实验方法测出液芯柱透镜的焦距  $f$  后,可由(6)式或图 3 直接计算出液芯介质的折射率。这为快速计算折射率和验证折射率测量的准确度提供了一种有效的方法。

模拟结果如图 4 所示。液芯柱透镜芯区为纯水时所形成的焦点距柱透镜最后一个曲面的距离  $d_1$  为 31.026 mm;液芯柱透镜芯区为乙醇时所形成的焦点距柱透镜最后一个曲面的距离  $d_2$  为 27.977 mm,则

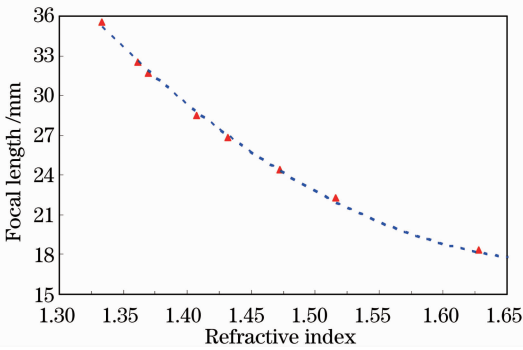


图 3 液芯柱透镜芯区液体折射率与焦距关系曲线图  
Fig. 3 Relationship curve of the refractive index and focal length

### 2.3 模拟柱透镜变焦

用光学软件 Zemax 设计了桃核形液芯柱透镜,并按设计尺寸做了光线模拟仿真。由模拟图可知,在桃核形柱透镜芯区内注入不同折射率的液体,所形成的焦距不一样。只要改变柱透镜芯区的液体折射率即可实现柱透镜的变焦。反之,只要测得柱透镜的焦距即可计算出柱透镜芯区的液体折射率。

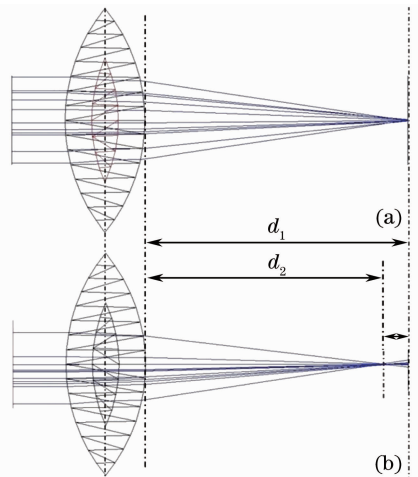


图 4 平行光经过液芯柱透镜的光线模拟图。(a)芯区折射率为  $n_1 = 1.3335$ ; (b)芯区折射率为  $n_2 = 1.3614$   
Fig. 4 Simulated drawings of light rays passing through the liquid-core zoom cylindrical lens. (a) Refractive index of the core is  $n_1 = 1.3335$ ; (b) refractive index of the core is  $n_2 = 1.3614$

有  $\frac{\Delta d}{\Delta n} = \frac{d_1 - d_2}{n_2 - n_1} = 109.2832$ 。

假定  $d$  值对  $n$  值的变化率不变,当折射率变化  $\Delta n = 0.0001$  时引起的  $\Delta d = 0.01093 \text{ mm} = 10.93 \mu\text{m} > 10 \mu\text{m}$  (测量系统最小分格值),说明当折射率变化  $0.01\%$  时,实验测量系统是可以分辨的,单次测量折射率的误差值应小于  $0.0001$ 。实际测量过程中受观测系统景深的影响,测量误差值可能大于  $0.0001$ 。和毛细管焦点测量方法<sup>[7~9]</sup>比较,折射率变化  $\Delta n = 0.0001$  引起的  $\Delta d$  变化,增加了近 1 个数量级。

### 3 实验结果及分析

#### 3.1 系统标定

在液芯柱透镜芯区内首先注入标准液体(以折射率为 1.3335 的纯水为例),调节观察系统的位移平台,直至观察到清晰的焦点图像,读出位移平台上显示的刻度数  $Z$ ,根据成像理论公式(1)~(5)式计算芯区内注入纯水时焦距为  $35.531 \text{ mm}$ ,为了标定桃核形柱透镜的中心轴位置坐标  $Z_0$ ,则有:  $Z - Z_0 = 35.531 \text{ mm}$ ,以此方法可以计算出液芯透镜的中心轴位置  $Z_0$  (如图 1 所示)。

将标准液体注入柱透镜芯区,移动位移平台带动观测系统进行实时观测。在移动位移平台的过程中,CCD 阵面上可以得到如图 5(a)~(c)所示的系列成像图片。

如图 5(a)~(c)所示,图 5(b)为观测到清晰成像的图片(电子位移平台上显示位置数值为:  $Z = 22.209 \text{ mm}$ ),图 5(a)为清晰成像前  $1.5 \text{ mm}$  位置处成像图片,图 5(c)为清晰成像后  $1 \text{ mm}$  位置处成像图片。通过对图 5(a)~(c)的对比可以较为直观的在观测过程中判断清晰成像的位置。

利用 Zemax 软件,对整个成像过程进行模拟,得出其分别对应的光强分布图,如图 5(d)~(f)所示,模拟结果和实验结果相符,同时可将对比光强分布曲线的峰值和宽度作为清晰位置判断的一种方法。

根据清晰成像的位置,按照柱透镜中心轴位置标定的方法,对柱透镜中心轴位置进行标定。可知柱透镜中心轴位置为  $Z_0 = Z - 35.531 \text{ mm} = 22.209 \text{ mm} - 35.531 \text{ mm} = -13.322 \text{ mm}$ 。

系统经标定后即可将待测液体注入柱透镜芯

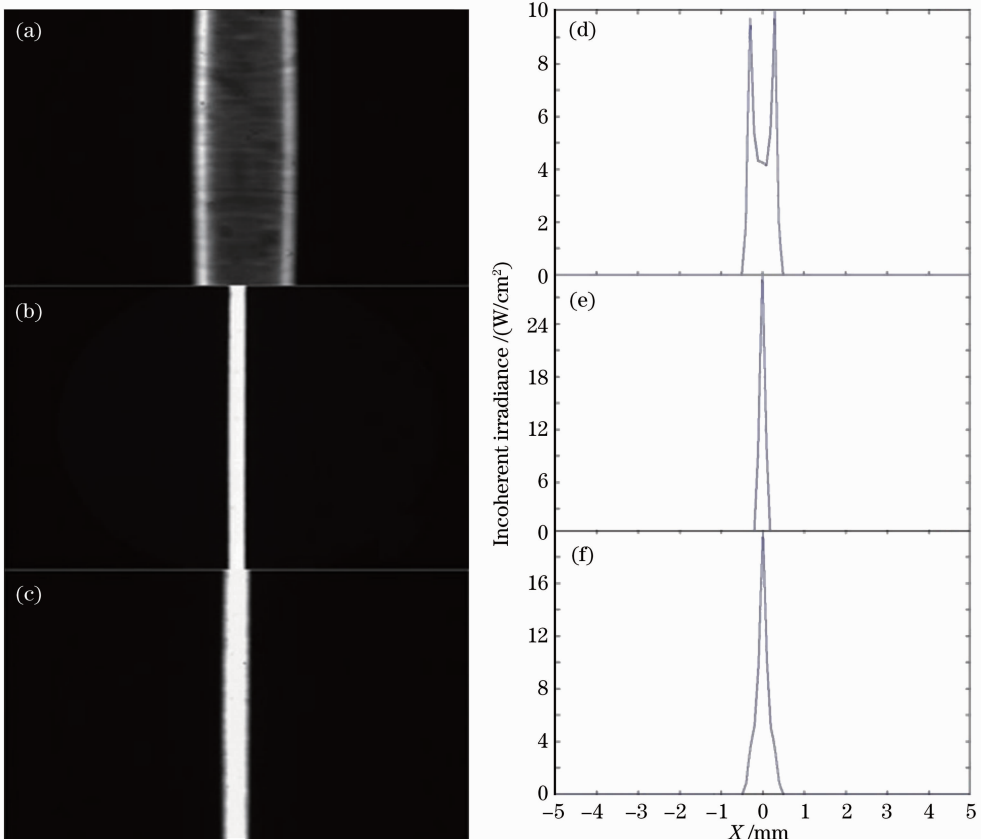


图 5 观测成像过程图及其对应光强分布图

Fig. 5 Diagrams for observing the imaging process and corresponding light intensity distributions

区,依照同样的方法测得“亮线”(焦点)所在的位置  $Z'$ ,进而计算出相对应的焦距( $f = Z' - Z_0$ ),然后根据(5)式得出光线经最后一个成像曲面后的像距  $S'(O_4)$ ,按照(1)~(4)式计算出芯区所注液体的折射率  $n$ 。

### 3.2 折射率测量结果及分析

第一种方法:采用纯水(折射率文献值为1.3335,阿贝折射仪测量值为1.3332,低折射率液体)为标准液体对系统进行标定,依次在室温(20℃)下测量乙醇(纯度大于或等于99.7%无水乙醇)、饱和KCl溶液、乙二醇、丙三醇、硝基苯、喹啉。

第二种方法:采用喹啉(折射率文献值为1.6257,阿贝折射仪测量值为1.6276,高折射率液体)为标准液体对系统进行标定,依次在室温(20℃)下测量纯

水、乙醇(纯度大于或等于99.7%无水乙醇)、饱和KCl溶液、乙二醇、丙三醇、硝基苯。

由表3、表4可知用高折射率的液体对系统进行标定,测量折射率的相对误差比低折射率液体标定的测量误差小,且相对误差值比较稳定,波动较小。这与目前市售阿贝折射仪选取折射率较高的校准液体作为校准液规律一致。

表2 测量系统的标定参数标准

Table 2 Calibration parameters of measurement system

Standard liquid	Refractive index	Focal length / mm	Measuring position $Z$ / mm	Center shaft position $Z_0$ / mm
Water	1.3335	35.5307	22.209	-13.322
Quinoline	1.6257	18.3927	4.992	-13.401

表3 以纯水作为标准液体标定后的测量结果

Table 3 Measurement results with pure water as calibration liquid

Liquid	Water	Ethanol	Saturated KCl solution	Glycol	Glycerol	Nitrobenzene	Quinoline
Theoretical focal length /mm	35.531	32.481	31.744	26.800	24.403	20.811	18.393
Measuring focal length /mm	35.531	32.387	31.736	26.706	24.251	20.771	18.314
Measuring refractive index	1.33350	1.36236	1.36909	1.43314	1.47496	1.55307	1.62848
Refractive index in literature	1.3335	1.3614	1.3690	1.4317	1.4721	1.5520	1.6257
Relative error /%	0	0	0.007	0.10	0.19	0.07	0.17

表4 以喹啉为标准液体标定后的测量结果

Table 4 Measurement results with quinoline as a calibration liquid

Liquid	Water	Ethanol	Saturated KCl solution	Glycol	Glycerol	Nitrobenzene	Quinoline
Theoretical focal length /mm	35.531	32.481	31.744	26.800	24.403	20.811	18.393
Measuring focal length /mm	35.610	32.466	31.815	26.785	24.330	20.850	18.393
Measuring refractive index	1.33285	1.36156	1.36826	1.43193	1.47346	1.55097	1.62570
Refractive index in literature	1.3335	1.3614	1.3690	1.4317	1.4721	1.5520	1.6257
Relative error /%	0.05	0.01	0.05	0.02	0.09	0.06	0

### 3.3 景深分析

如图6所示,实验装置中所用的显微物镜可等效为一个凸透镜,而物镜的镜筒外壳(AP)为孔径光阑,其数值为  $D$ 。实验过程中,光斑未能完全覆盖镜筒,则有效孔径光阑为  $D_{\text{eff}}$ 。

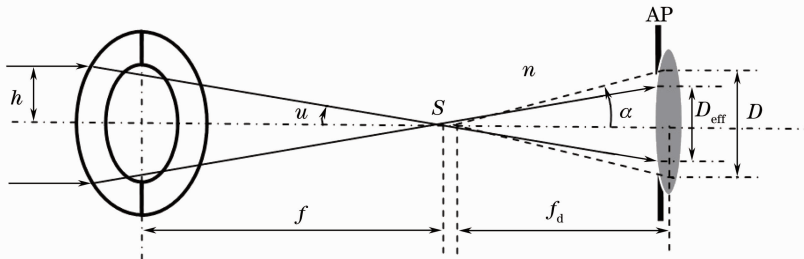


图6 观测系统数值孔径示意图

Fig. 6 Schematic of numerical aperture in the observing system

显微物镜的数值孔径<sup>[14,15]</sup>  $NA = n \sin \alpha \approx n \tan \alpha = \frac{D}{2f_d}$  ( $n$ 为空气折射率,  $f_d$ 为物镜焦距)。本实验装置的有效数值孔径值  $NA_{\text{eff}} = n \sin u \approx n \tan u = h/f$ 。

根据景深计算公式<sup>[16]</sup>有



$$L = \frac{\lambda}{(NA')^2} = \frac{\lambda f^2}{h^2}. \quad (7)$$

将中心波长  $\lambda = 580 \text{ nm}$ , 缝宽  $h = 6 \text{ mm}$ , 代入(7)式, 可得读数显微镜的景深值  $L$  随变焦柱透镜焦距  $f$  的变化关系, 再结合(6)式, 得到  $L$  值随待测液体折射率  $n$  变化的曲线关系, 如图 7 中的细实线所示。

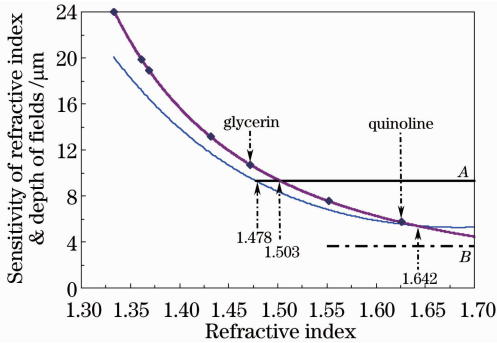


图 7 折射率灵敏度和景深值随折射率变化曲线

Fig. 7 Sensitivity of refractive index (solid thick curve) and the depth of field (solid thin curve) vary with refractive index. The line A (or B) indicates the depths of field when a "10 ×" (or "20 ×") objective is used

### 3.4 灵敏度分析

根据逐面成像原理推导的焦距和折射率之间的关系(6)式可得

$$\frac{\Delta f}{\Delta n} = \frac{\Delta[S_4'(O_4)]}{\Delta n}. \quad (8)$$

定义折射率灵敏度为折射率变化 0.02% ( $\Delta n = 0.0002$ ) 引起的焦距变化, 结合(1)~(5)式对(8)式进行数值计算, 得到折射率灵敏度随待测液体折射率  $n$  变化的曲线关系, 如图 7 中粗实线所示。

当折射率灵敏度大于景深值时, 单次测量折射率的误差值小于 0.0002; 当折射率灵敏度小于景深值时, 单次测量折射率的误差值大于 0.0002。由图 7 可知随着折射率的增大, 折射率灵敏度和景深值之间的差值变小, 高折射率液体若能精确测量则低折射率液体一定能够精确测量。即验证了用高折射率液体对测量系统标定校准后, 测量折射率的相对误差比低折射率液体标定校准系统后的测量误差小。与 3.2 节中折射率测量结果分析一致。

当选取实验物镜为 10× 时 ( $NA = 0.25$ ), 光线全部覆盖镜筒时(图 6 中  $u \geq \alpha$ ) 对应的理论景深值为  $9.28 \mu\text{m}$ , 如图 7 中实线 A 所示。当柱透镜芯区折射率为 1.478 时, 光线已经全部覆盖镜筒, 随着芯区折射率的变大, 测量系统的景深值不再变化。折

射率  $n$  在小于 1.503 时, 折射率灵敏度大于景深值, 单次测量折射率的误差值小于 0.0002。

当选取实验物镜为 20× 时 ( $NA = 0.4$ ), 光线全部覆盖镜筒其所对应的理论景深值为  $3.625 \mu\text{m}$ , 如图 7 中虚线 B 所示。随着注入柱透镜芯区液体折射率的增大, 光线会聚角度变大, 所对应的数值孔径值变大, 测量景深值减小, 本实验中直至柱透镜芯区折射率达到最大值(喹啉折射率 1.6257) 时, 光线也未能覆盖全部镜筒。由图 7 知折射率  $n$  小于 1.642 时, 折射率灵敏度大于景深值, 单次测量折射率的误差值小于 0.0002。本实验中所有测量的液体样品折射率都在此范围内, 即单次测量折射率误差值都小于 0.0002。

## 4 结 论

用制作的液芯柱透镜精确测量了几种液体的折射率。用 Zemax 光学设计软件模拟了成像过程, 模拟结果表明, 对制作的液芯柱透镜, 液体折射率变化 0.0001 引起的焦距变化值远远超过了“毛细管焦点测量方法”对应的数值, 液芯柱透镜测量方法能够有效地增加液体折射率的测量灵敏度。用逐面成像法推导出了柱透镜液芯折射率和焦距间的函数关系, 以此函数关系为基础, 用一种高折射率标准样品对测量系统的参数做校正后, 可使本实验中所选取的待测液体样品的折射率单次测量误差小于 0.0002。

### 参 考 文 献

- Li Qiang, Han Guanghui, Xing Mannan *et al.*. The Apparatus of Accurate Measuring the Refractive Index of Micro-quantity Liquid; China, 200820081301.1[P]. 2008-06-04  
李 强, 韩广辉, 邢曼男 等. 一种精确测量微量液体折射率的仪器; 中国, 200820081301.1[P]. 2008-06-04
- R. G. Wenzel, G. P. Arnold. Measurement of refractive index of small liquid specimens in capillaries[J]. *Rev. Sci. Inst.*, 1969, **40**(10): 1355~1360
- Ding Shunxun, Zhang Lianfang. A Course of Physics Experiments[M]. 2nd ed.. Beijing: Tsinghua University Press, 2002. 212~214  
丁慎训, 张连芳. 物理实验教程[M]. 第二版. 北京: 清华大学出版社, 2002. 212~214
- S. W. Yang, X. Q. Zhang, C. P. Zhang *et al.*. Analysis of capillary interferometry for measuring refractive indices of minute samples[J]. *Appl. Opt.*, 2004, **43**(3): 530~536
- Zhang Jian, Rao Yunjiang, Ran Zengling *et al.*. Novel Fabry-Perot fiber refractive index sensor with microchannel[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(2): 326~329  
张 健, 饶云江, 冉曾令 等. 带微通道的新型光纤法布里-珀罗折射率传感器[J]. 光学学报, 2010, **30**(2): 326~329
- Ke Tao, Zhu Tao, Rao Yunjiang *et al.*. All-fiber Fabry-Perot interferometer refractive index sensor formed by ring reflector [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(6): 1608~1612  
柯 涛, 朱 涛, 饶云江 等. 基于环形反射面的全光纤法-珀干

- 涉式折射率传感器[J]. 光学学报, 2010, **30**(6): 1608~1612
- 7 Li Qiang, Han Guanghui, Xing Mannan *et al.*. Measuring refractive index of micro-quantity liquid by focus method[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(9): 2468~2472  
李 强, 韩广辉, 邢曼男等. 用毛细管焦点法精确测量微量液体的折射率[J]. 光学学报, 2009, **29**(9): 2468~2472
- 8 Li Qiang, Su Guanghui, Zhang Ruikai *et al.*. Nondestructive measurement of refractive index of transparency capillary [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2010, **18**(6): 1264~1270  
李 强, 苏光辉, 张瑞凯等. 透明毛细管管壁折射率的无损测量[J]. 光学精密工程, 2010, **18**(6): 1264~1270
- 9 Li Yu, Li Qiang, Sun Licun *et al.*. Measuring method for refractive index of micro-quantity liquid [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2012, **49**(2): 68~74  
李 宇, 李 强, 孙丽存等. 测量微量液体折射率的新方法[J]. 激光与光电子学进展, 2012, **49**(2): 68~74
- 10 M. Born, E. Wolf. Principles of Optics[M]. 7th ed.. London: Cambridge University Press, 2003
- 11 Wang Zhijiang. Optical Technology Manual [M]. Vol. 1. Beijing: China Machine Press, 1987. 235  
王之江. 光学技术手册[M]. 上册. 北京: 机械工业出版社, 1987. 235
- 12 Sinopharm Chemical Reagent Co. Ltd.. Nitrobenzene [OL]. <http://www.reagent.com.cn/productsinfot.asp?id=18344>, 2012-8-24  
国药集团化学试剂有限公司. 硝基苯 [OL]. <http://www.reagent.com.cn/productsinfot.asp?id=18344>, 2012-8-24
- 13 Sinopharm Chemical Reagent Co. Ltd.. Quinoline[OL]. <http://www.reagent.com.cn/productsinfot.asp?id=22172>, 2012-8-24  
国药集团化学试剂有限公司. 喹啉[OL]. <http://www.reagent.com.cn/productsinfot.asp?id=22172>, 2012-8-24
- 14 An Liansheng. Applied Optics[M]. 3rd ed.. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2004. 100~102  
安连生. 应用光学[M]. 第三版. 北京: 北京理工大学出版社, 2004. 100~102
- 15 Yun Daoyin. Tan Hengying. Engineering Optics[M]. 2nd ed.. Beijing: China Machine Press, 2007. 67~72  
郁道银, 谈恒英. 工程光学[M]. 第二版. 北京: 机械工业出版社, 2007. 67~72
- 16 Chang Seongsik. Lasing Characteristics of Deformed Micro Cavities[D]. New Haven: Yale University, 1998. 74~77

栏目编辑:何卓铭