

非科尔莫戈罗夫湍流下望远镜的分辨力分析

彭起^{1,2} 陈洪斌¹ 王继红¹ 曹雷¹

(¹中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209)
(²中国科学院研究生院, 北京 100049)

摘要 为分析不同大气湍流条件下望远镜的分辨力, 计算了非科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)湍流条件下望远镜的分辨力。通过非科尔莫戈罗夫湍流条件下大气的相位结构函数推出望远镜长曝光和短曝光传递函数, 进而推导了望远镜的分辨力函数, 并得到望远镜口径无穷大时的长曝光极限分辨力与湍流功率谱指数 β 之间的关系, 最后由望远镜的极限分辨力函数推导了望远镜的归一化分辨力函数。结果表明, β 越小望远镜的极限分辨力越高, β 越大望远镜的极限分辨力越低; 不同的 β , 望远镜的短曝光和长曝光的最佳分辨力所对应的 D/r_0 也不同。

关键词 大气光学; 非科尔莫戈罗夫湍流; 望远镜分辨力; 湍流功率谱指数; 极限分辨力; 大气相干长度

中图分类号 O436 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201239.0113002

Analysis of Solving Power of Telescopes for Non-Kolmogorov Turbulence

Peng Qi^{1,2} Chen Hongbin¹ Wang Jihong¹ Cao Lei¹

(¹Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China)
(²Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract The solving power of non-Kolmogorov turbulence is calculated for analyzing resolution of telescopes in different atmosphere condition. Modulation transfer function (MTF) of long exposure and short exposure is deduced by using the structure function of no-Kolmogorov turbulence, then the solving power is generalized, and the limiting resolution is gotten, which are functions of power-law exponent β . Finally, the normalized resolution is achieved by dividing by the 'limiting resolution'. The results show that the larger β is, the smaller resolution is, and the smaller β is, the larger resolution is. Also, D/r_0 is different for the best solving power of long exposure and short exposure, if the β is different.

Key words atmospheric optics; non-Kolmogorov turbulence; solving power of telescopes; power-law exponent of turbulence; limiting resolution; atmospheric coherence length

OCIS codes 010.1290; 010.1330; 110.0115; 110.6770

1 引言

长期以来, 光波在大气湍流中的传播研究均是围绕科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)^[1]湍流理论展开的, 且日臻成熟。Tatarskii^[2]应用科尔莫戈罗夫模型求解了光波在大气湍流中传播的方程。根据Tatarskii的结果, Fried^[3,4]应用泽尼克(Zernike)多项式描述了大气湍流对光学系统性能的影响, 并且定义了一个表征大气湍流强度的参量大气湍流相干

长度 r_0 。在科尔莫戈罗夫湍流条件下, Fried^[4]计算了望远镜长曝光和短曝光的空间分辨力, 得到了望远镜分辨率的表达式, 其分辨率直径与大气湍流相干长度 r_0 相关。Rodier^[5]还分析了科尔莫戈罗夫湍流条件下, 低阶校正后的望远镜的空间分辨力。

各观测台的站址不同, 观测时间不同, 大气湍流的强度和功率谱分布也不尽相同。在许多天文观测和地面激光传输测试中, 发现大气湍流波前并不完

收稿日期: 2011-07-01; 收到修改稿日期: 2011-10-08

基金项目: 中国科学院前沿课题基金(ck0308)资助课题。

作者简介: 彭起(1978—), 男, 博士研究生, 助理研究员, 主要从事望远镜方面的研究。

E-mail: phiqi@163.com

导师简介: 陈洪斌(1953—), 男, 研究员, 博士生导师, 主要从事激光技术方面的研究。E-mail: chb@ioe.ac.cn

全服从科尔莫戈罗夫谱。近几年来,国内外已经报道了很多这方面的测试结果^[6~8],对非科尔莫戈罗夫湍流的研究也越来越受到各方面的关注。美国空军实验室高空测量结果表明大气温度功率谱指数的区间在(-2.5, -1.0)之内,只有极少数严格等于-5/3的情况,也就是说大气湍流相位功率谱指数也极少等于11/3。Boreman等^[8]对非科尔莫戈罗夫湍流的泽尼克多项式展开进行了计算,梅海平等^[9]阐述了非科尔莫戈罗夫大气湍流温度谱标度指数的测量,饶长辉等^[10]对非科尔莫戈罗夫湍流情况下低级校正自适应光学系统的性能进行了分析与研究。

但是,在国内外有关文献中,关于望远镜的空间分辨力的分析均是对科尔莫戈罗夫湍流情形,而对于非科尔莫戈罗夫湍流情况下的望远镜空间分辨力的分析还未见报道。本文通过引入非科尔莫戈罗夫湍流情况下的归一化相位空间功率谱,针对望远镜长曝光和短曝光两种情形,分别推导了非科尔莫戈罗夫湍流情况下望远镜空间分辨力与望远镜口径,大气相干长度 ρ_0 以及大气相位空间功率谱指数下降因子 β 之间的关系。本文的分析同样适合科尔莫戈罗夫湍流情形。

2 湍流相位结构函数

惯性区域内非科尔莫戈罗夫湍流定义为折射率三维功率谱随频率增加呈任意功率指数下降。非科尔莫戈罗夫湍流情况下,归一化相位空间功率谱为^[8]

$$W(k) = A_\beta k^{-\beta/\rho_0^{\beta-2}}, \quad 2 < \rho < 4 \quad (1)$$

式中 k 为空间频率; ρ_0 为归一化大气湍流相干长度,它类似于大气湍流相干长度 r_0 ,是一个表征大气湍流强度的参数; A_β 为当 $D = \rho_0$ (D 为观测系统口径)和去除整体平移后波前残余方差为 1 rad^2 时的归一化系数。当 $\beta = 11/3$ 时,(1)式就是对应科尔莫戈罗夫湍流的空间功率谱,此时 $A_{11/3} = 0.023, \rho_0 = r_0$ 。

文献[11]根据归一化相位功率谱推导出了相位空间结构函数为

$$D_\phi(r) = \gamma_\beta (r/\rho_0)^{\beta-2}, \quad (2)$$

式中

$$\gamma_\beta = \frac{2^{\beta-1} \left[\Gamma\left(\frac{\beta+2}{2}\right) \right]^2 \Gamma\left(\frac{\beta+4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right) \Gamma(\beta+1)}, \quad (3)$$

式中 $\Gamma(x)$ 为伽玛函数。需要指出,当 $\beta = 11/3$ 时, $\gamma_\beta = 6.67$ 。

3 空间分辨力函数

考虑通光孔为圆形孔,直径为 D ,系统焦距为 F ,望远镜系统长曝光传递函数为^[4]

$$\langle \tau(f) \rangle_{\text{LE}} = \tau_0(f) \exp\left[-\frac{1}{2} D_\phi(\lambda F f)\right]. \quad (4)$$

波前整体倾斜得到校正后,望远镜传递函数为^[12]

$$\langle \tau(f) \rangle_{\text{SE}} = \tau_0(f) \times \exp\left\{-\frac{1}{2} [D_\phi(\lambda F f) - \langle a_2^2 + a_3^2 \rangle d_2]\right\}, \quad (5)$$

式中 d_2 是Zernike多项式二阶的形状函数^[11]

$$d_2 = d_3 = 8 \left(\frac{\lambda F f}{D}\right)^2, \quad (6)$$

a_2, a_3 是大气湍流波像差的倾斜量,对于 Z 倾斜(不考虑模式间的耦合)情况^[8],

$$\langle a_2^2 + a_3^2 \rangle = Z_\beta = \langle a_2^2 \rangle + \langle a_3^2 \rangle = \frac{-4(\beta-2) \sin[\pi(\beta-2)/2]}{(\beta+4) [\sin(\pi\beta/2)]} \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^{\beta-2}. \quad (7)$$

而对于 G 倾斜情况,

$$\langle a_2^2 + a_3^2 \rangle = G_\beta = \frac{\beta^{\beta-7} (\beta+2) \beta^3 [\Gamma(\beta/2)]^2}{2\Gamma(\beta+1)} \times \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^{\beta-2} \int_0^1 dt (1-t) [(1+t^2)^{(\beta-2)/2} - t^{\beta-2}]. \quad (8)$$

(4)、(5)式中的 $\tau_0(f)$ 是望远镜直径为 D 的衍射极限条件下的传递函数,为

$$\tau_0(f) = \begin{cases} (2/\pi) \{ \arccos(\lambda F f/D) - (\lambda F f/D) [1 - (\lambda F f/D)^2]^{1/2} \}, & \lambda F f \leq D \\ 0, & \lambda F f > D \end{cases} \quad (9)$$

因此,望远镜短曝光传递函数为

$$\langle \tau(f) \rangle_{\text{SE}} \approx \tau_0(f) \exp\left[-\frac{1}{2} D_\phi(\lambda F f) + 4G_\beta (\lambda F f)^2 / D^2\right]. \quad (10)$$

这里分析 G 倾斜,用 Z 倾斜时,可能存在过校

正,文献[10,12]有此现象。

望远镜光学系统的分辨力函数 R ,通常被定义为光学系统的整体传递函数。因此,有大气扰动时望远镜的分辨力函数定义为

$$R = \int df \langle \tau(f) \rangle. \quad (11)$$

R_0 表示望远镜短曝光的分辨力函数, R_∞ 表示望远镜长曝光的分辨力函数,

$$R_\infty = \left(\frac{2D}{\lambda F}\right)^2 \int_0^1 u [\arccos u - u(1-u^2)^{1/2}] \times \exp\left[-\frac{\gamma_\beta}{2} \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^{\beta-2} u^{\beta-2}\right] du. \quad (12)$$

考虑 G 倾斜时,

$$R_0 = \left(\frac{2D}{\lambda F}\right)^2 \int_0^1 u [\arccos u - u(1-u^2)^{1/2}] \times \exp\left[-\frac{\gamma_\beta}{2} \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^{\beta-2} u^{\beta-2} + 4G_\beta \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^{\beta-2} u^2\right] du. \quad (13)$$

当湍流较强和望远镜口径特别大 ($D \rightarrow \infty$) 时, 不考虑望远镜的衍射极限对系统分辨率的影响, 认为望远镜的传递函数为 1, 此时仅考虑大气湍流对望远镜分辨力的影响, 由此得到望远镜的分辨力函数为

$$R_{\max} = \int df \exp\left[-\frac{1}{2} D_\phi(\lambda F f)\right] = \int \exp\left[-\frac{\gamma_\beta}{2} \left(\frac{\lambda F f}{\rho_0}\right)^{\beta-2}\right] df, \quad (14)$$

这样就得到了大气条件下的长曝光极限分辨力

$$R_{\max} = \frac{2\pi}{(\beta-2)} \Gamma\left(\frac{2}{\beta-2}\right) \left(\frac{r_\beta}{2}\right)^{2/(2-\beta)} \left(\frac{\rho_0}{\lambda R}\right)^2 = \xi_\beta \left(\frac{\rho_0}{\lambda F}\right)^2. \quad (15)$$

需要指出, 在科尔莫戈罗夫湍流情况下, $\beta = 11/3$,

$$R_{\beta=11/3} \approx \pi(\rho_0/\lambda F)^2/4, \quad (16)$$

从(15)式可以看出, 在大气相干长度 ρ_0 不变条件下当大气功率谱指数 β 趋近于 2 时, ξ_β 趋近于无穷大, 极限分辨力 R_{\max} 趋近于无穷大, 如图 1 所示。

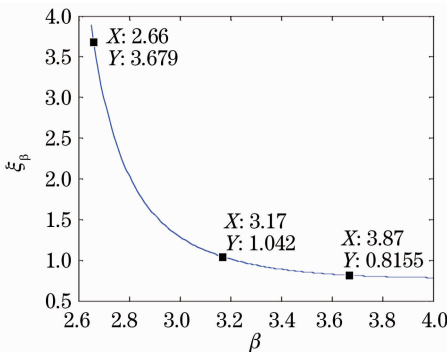


图 1 系数 ξ_β 随 β 的变化曲线

Fig. 1 Curve for ξ_β versus β

$$\lim_{\beta \rightarrow 2} R_{\max} = \infty. \quad (17)$$

也就是说当大气功率谱指数 β 趋近于 2, 望远镜口径特别大时, 望远镜的长曝光分辨力趋近于无穷大, 这主要是由于当大气功率谱指数 β 趋近于 2 时, 大气湍流引起的波像差也趋近于 0。从图 1 还可以看出当大气功率谱指数 β 趋近于 4 时极限分辨率系数 ξ_β 取值最小, 在相同条件下 R_{\max} 取值也最小(不考虑相干长度、波长和望远镜焦距), 这说明大气功率谱指数 β 趋近于 4, 望远镜长曝光分辨力最小, 这是由于此时大气湍流引起的波像差最大的缘故。

如果将长曝光分辨力 R_∞ 和短曝光分辨率 R_0 分别除以极限分辨率 R_{atm} 来将其归一化, 这样得到

$$\frac{R_\infty}{R_{\max}} = \frac{4}{\xi_\beta} \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^2 \int_0^1 u [\arccos u - u(1-u^2)^{1/2}] \times \exp\left[-\frac{\gamma_\beta}{2} \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^{\beta-2} u^{\beta-2}\right] du. \quad (18)$$

对于 G 倾斜,

$$\frac{R_0}{R_{\max}} = \frac{4}{\xi_\beta} \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^2 \int_0^1 u [\arccos u - u(1-u^2)^{1/2}] \times \exp\left[-\frac{\gamma_\beta}{2} \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^{\beta-2} u^{\beta-2} + 4G_\beta \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^{\beta-2} u^2\right] du. \quad (19)$$

从图 2 中可以看出, 对于望远镜短曝光的分辨力, 不同的湍流功率谱指数 β 有一个最优 D/r_0 , 当望远镜口径超过最优口径时望远镜的分辨力反而会降低。当 β 等于 2.33 时, 最优 D/r_0 等于 1406, 当 β 等于 2.67 时, 最优 D/r_0 等于 15.8, 当 β 等于 3.17 时, 最优 D/r_0 等于 4, 当 β 等于 3.67 时, 最优 D/r_0 等于 2.6, 当 β 等于 3.97 时, 最优 D/r_0 等于 6.4, 详见表 1。需要指出的是本文与参考文献[4]略有不同, 主要是由于这里分析的是 G 倾斜, 采用 Z 倾斜时, 结果与参考文献[4]基本相同, 当 β 等于 3.67 时, 最优 D/r_0 等于 3.7。

表 1 不同 β 下的最优 D/r_0 , G 倾斜

Table 1 Best D/r_0 for different β when G tilt

β	D/r_0
2.33	1406
2.67	15.8
3.00	5.1
3.17	4
3.42	3.4
3.67	2.6
3.77	3.7
3.87	4.5
3.97	6.4

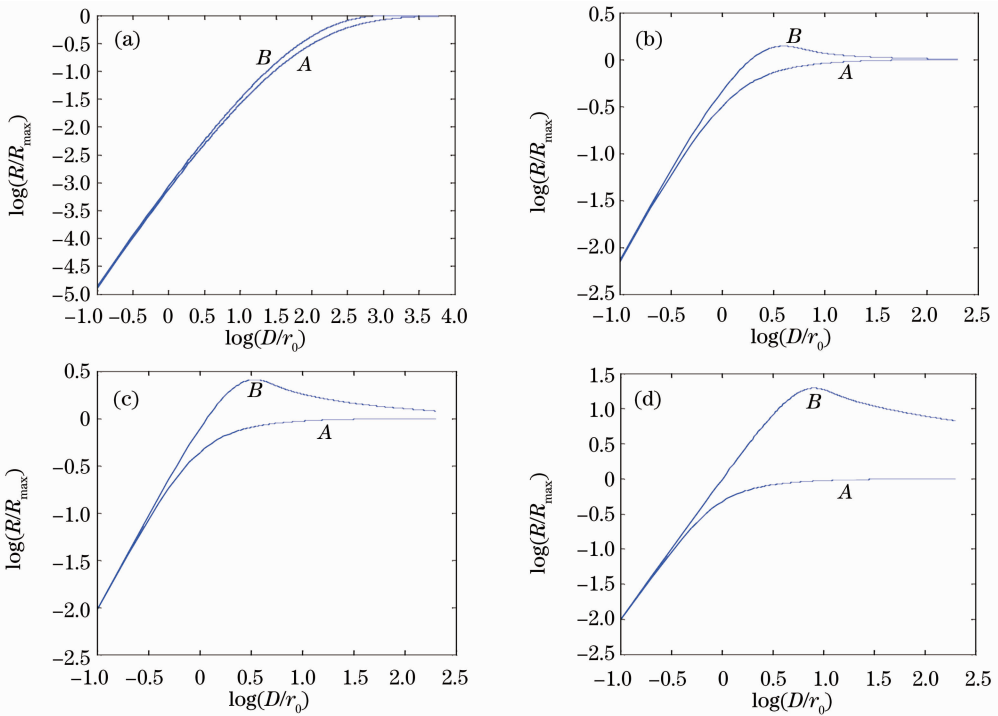


图2 望远镜分辨力 R/R_{\max} , 曲线 A 是长曝光 R_{∞}/R_{\max} , 曲线 B 是短曝光 R_0/R_{\max} . (a) $\beta=7/3$; (b) $\beta=9.5/3$; (c) $\beta=11/3$; (d) $\beta=11.9/3$

Fig. 2 Resolution power of telescopes R/R_{\max} , curve A-long exposure results R_{∞}/R_{\max} , curve B-short exposure results R_0/R_{\max} . (a) $\beta=7/3$; (b) $\beta=9.5/3$; (c) $\beta=11/3$; (d) $\beta=11.9/3$

从图2还可以看出, β 越小望远镜达到最优比值时的短曝光 R_0/R_{\max} 值越小, 曲线 B 与曲线 A 越接近; β 越大望远镜达到最优比值时的短曝光 R_0/R_{\max} 值越大。这似乎说明 β 越小望远镜短曝光最佳分辨力越小, β 越大望远镜最佳分辨力越大, 但是这里指的是归一化分辨力, 并不是绝对分辨力; 出现这个现象的主要原因是 β 越小, 倾斜量在整个波面误差中所占的比例越小, β 越大, 倾斜量在整个波面误差中所占的比例越大的缘故。其实, β 越小望远镜的极限分辨力越大, 如图1所示, 也就是说当湍流功率谱指数 β 越接近2, 望远镜的分辨力越大。

对望远镜长曝光分辨力而言, β 越小, 望远镜达到最佳分辨力的 D/r_0 越大, β 越大, 望远镜达到最佳分辨力的 D/r_0 越小。

4 结 论

对于非科尔莫戈罗夫大气湍流, 不同的湍流功率谱指数 β 下望远镜的极限分辨力不同, 当 β 趋近于2时望远镜的极限分辨力趋近于无穷大, 当 β 趋近于4时望远镜的极限分辨力最小。不同的湍流功率谱指数 β 下, 望远镜达到最佳短曝光和长曝光分辨力的 D/r_0 是不同的。

不同湍流功率谱指数条件下望远镜最优分辨力不同, 为评价望远镜在不同大气湍流条件下的性能提供参考, 也为设计阶段望远镜口径的选择提供参考。

参 考 文 献

- 1 A. N. Kolmogorov. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluids for Very Large Reynold's Numbers [M]. S. K. Friedlander, L. Topper ed. New York: Wiley Interscience, 1961. 151~155
- 2 V. I. Tatarskii. Wave Propagation in a Turbulent Medium[M]. New York: Dover Publications, 1967
- 3 D. L. Fried. Statistics of a geometric representation of wavefront distortion [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1965, **55** (11): 1427~1435
- 4 D. L. Fried. Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1966, **56**(10): 1372~1379
- 5 Nicolas Roddier. Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials [J]. *Opt. Engng.*, 1990, **29** (10): 1174~1180
- 6 Mikhail S. Belen'kii, Stephen J. Karis, James M. Brown II et al.. Experimental study of the effect of non-Kolmogorov stratospheric turbulence on star image motion. stratospheric turbulence on star image motion [C]. *SPIE*, 1995, **3126**: 113~123
- 7 M. S. Belen'kii. Effect of the stratosphere on star image motion [J]. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(12): 1359~1361
- 8 G. D. Boreman, C. Dainty. Zernike expansions for non-Kolmogorov turbulence[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1996, **13**(3):

517~522

9 Mei Haiping, Wu Xiaoqing, Rao Ruzhong. Measurement and analysis of temperature power spectrum scaling exponent in non-Kolmogorov turbulent atmosphere[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2006, **18**(9): 1423~1427

梅海平, 吴晓庆, 饶瑞中. 非 Kolmogorov 大气湍流温度谱标度指数的测量与分析[J]. *强激光与粒子束*, 2006, **18**(9): 1423~1427

10 Rao Changhui, Jiang Wenhan, Ling Ning. Analysis of compensation effectiveness for adaptive optical system used as low-order modes correction [J]. *Acta Optica Sinica*, 1999,

19(12): 1615~1624

饶长辉, 姜文汉, 凌 宁. 低阶模式校正自适应光学系统的补偿效果分析[J]. *光学学报*, 1999, **19**(12): 1615~1624

11 Guangming Dai. Modal compensation of atmospheric turbulence with the use of Zernike polynomials and Karhunen-Loeve functions[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, **12**(10): 2182~2193

12 J. Y. Wang. Optical resolution through a turbulent medium with adaptive phase compensations[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**(3): 383~390

栏目编辑: 谢 婧