湍流对部分相干厄米-高斯列阵光束等效曲率半径的影响

邵晓利　季小玲

（四川师范大学物理学院，四川 成都 610068）

摘要　推导出部分相干厄米-高斯(H-G)列阵光束在大气湍流中等效曲率半径 R 的解析公式。该公式具有一般性，它可简化为几种典型特例。研究表明湍流导致光束的 R 减小。光强叠加时 R 受湍流的影响比交叉谱密度函数叠加时小。自由空间中高斯-谢尔模型列阵光束和高斯列阵光束的 R 比部分相干 H-G 列阵光束的大，但受湍流的影响也更大。自由空间中单束部分相干 H-G 光束的 R 比部分相干 H-G 列阵光束的小，但受湍流的影响也更小。光强叠加情况下，自由空间中完全相干 H-G 列阵光束的 R 比部分相干 H-G 列阵光束的大，但受湍流的影响也更大。一般来说，自由空间中 R 越大其受湍流影响也越大。因此，当光束传输到一定距离之后，湍流使得原来在自由空间中较大的 R 变小，而较小的 R 变大。

关键词　大气光学；等效曲率半径；解析研究方法；大气湍流；部分相干厄米-高斯列阵光束；列阵光束的叠加方式

中图分类号　O436；TN012　　**文献标识码**　A　　**doi**：10.3788/CJL201138.s102003

Influence of Turbulence on the Effective Radius of Curvature of Partially Coherent Hermite-Gaussian Array Beams

Shao Xiaoli　Ji Xiaoling

(*Department of Physics*, *Sichuan Normal University*, *Chengdu*, *Sichuan* 610068, *China*)

Abstract　The analytical expression for the effective radius of curvature R of partially coherent Hermite-Gaussian (H-G) array beams propagating through atmospheric turbulence is derived, which is general and can be reduced to several typical cases. It is shown that turbulence results in a decrease of R. For the superposition of the intensity R is less sensitive to turbulence than that for the superposition of the cross-spectral density function. In free space, R of Gaussian Schell-model array beams and Gaussian array beams is larger than that of partially coherent H-G array beams, but it is more affected by turbulence. In free space, R of a single partially coherent H-G beam is smaller than that of the partially coherent H-G array beam, but it is less affected by turbulence. For the superposition of the intensity, the R of fully coherent H-G array beams is larger than that of partially coherent H-G array beams, but it is more affected by turbulence. In general, R is more sensitive to turbulence, if R is larger in free space. Therefore, the R of laser beams with larger R in free space will become smaller than the R of those with smaller R in free space after a certain propagation distance in turbulence.

Key words　atmospheric optics; effective radius of curvature; analytical method; atmospheric turbulence; partially coherent Hermite-Gaussian array beam; superposition method of array beams

OCIS codes　010.1300; 010.1290; 010.1330; 010.3310

1　引　　言

由于一般光束的等相面为非球面或非高斯面，使得对光束等相面传输特性的研究遇到很大困难。Miguel 等[1]提出了采用球面拟合实际非球面和非高斯等相面的方法，但未能给出拟合等相面曲率半径的简单解析式。Ricklin 等[2]利用互相干函数给

收稿日期：2011-07-20；**收到修改稿日期**：2011-09-01

基金项目：国家自然科学基金(61178070)和中国科学院大气成分与光学重点实验室开放课题基金(JJ-10-08)资助课题。

作者简介：邵晓利(1985—)，女，硕士研究生，主要从事激光的传输方面的研究。E-mail：xiaoli1288@163.com

导师简介：季小玲(1963—)，女，博士，教授，主要从事光束的传输与控制等方面的研究。E-mail：jiXL100@163.com

出了高斯-谢尔模型(GSM)光束在大气湍流中的曲率半径公式,但该方法仅适用于只含高斯项的光束。2010年,本课题组提出采用等效曲率半径的概念[3]来研究等相面为非球面或非高斯面的光束的等相面传输特性[4]。此方法使得解析研究任意光束等相面传输特性成为可能。最近,本课题组还给出了一般光束等效曲率半径的传输方程[5]。激光在大气湍流中的传输是一个有重要理论和实际意义的课题[6]。列阵光束由于在高功率系统、惯性约束聚变和高能武器等方面的应用而日趋受到人们的关注。已有大量文献报道了各类激光列阵光束在大气湍流中的传输特性,主要包括列阵光束在大气湍流中的光强分布、光束扩展、M^2 因子和方向性等[7~12]。实际激光束存在部分相干和高阶模的情况,因此研究部分相干高阶模列阵激光束曲率半径在大气湍流中的传输特性是十分重要的。

本文推导出具有一般性的部分相干厄米-高斯(H-G)列阵光束在大气湍流中的等效曲率半径解析公式。而部分相干H-G列阵光束在自由空间中的等效曲率半径,以及GSM列阵光束、完全相干H-G列阵光束、高斯列阵光束和单束部分相干H-G光束在大气湍流中的等效曲率半径均可作为该解析公式的特例给出。在列阵光束两种叠加方式[交叉谱密度函数(CSDF)叠加和光强叠加]下,详细研究了部分相干H-G列阵光束在自由空间和大气湍流中的等效曲率半径变化规律。研究了部分相干H-G列阵光束分别与几种典型的部分相干和完全相干列阵光束和单束激光束的等效曲率半径受湍流影响的差异。

2　理论公式

假设在直角坐标系下,$z=0$ 平面内有 M 束部分相干H-G光束沿 x 轴排列,相邻子光束间的间距为 x_d。为便于计算,M 取奇数。当 $M=1$ 时,如图1所示一维(1D)列阵部分相干H-G光束简化为一束位于坐标原点的部分相干H-G光束。

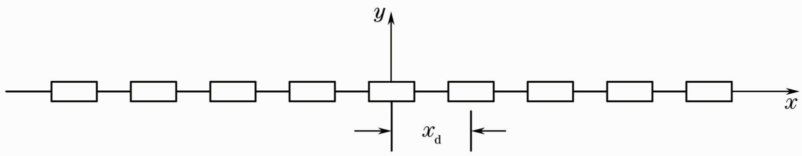

图1　1D列阵光束示意图

Fig.1　Schematic diagram of the 1D array beam

2.1　CSDF叠加

假设这 M 束子光束是相同的,且位于两个不同子光束相同位置处的两点是完全相干的,即相位锁定。此时1D列阵部分相干H-G光束按照CSDF叠加。$z=0$ 平面处1D列阵部分相干H-G光束的CSDF可表示为

$$W^{(0)}(x_1',x_2',z=0)=\sum_{p=-(M-1)/2}^{(M-1)/2}\sum_{q=-(M-1)/2}^{(M-1)/2}H_m\left[\frac{\sqrt{2}(x_1'-px_d)}{w_0}\right]H_m\left[\frac{\sqrt{2}(x_2'-qx_d)}{w_0}\right]\times$$
$$\exp\left[-\frac{(x_1'-px_d)^2+(x_2'-qx_d)^2}{w_0^2}\right]\exp\left\{-\frac{[(x_1'-px_d)-(x_2'-qx_d)]^2}{2\sigma_0^2}\right\},\quad(1)$$

式中 w_0 为对应高斯光束在 $z=0$ 平面处的束腰宽度,σ_0 为 $z=0$ 平面处一束离轴部分相干H-G光束的相干长度,H_m 为 m 阶厄米多项式。

根据广义惠更斯-菲涅耳原理,由(1)式表征的1D列阵部分相干H-G光束在自由空间中传输的光强为[6]

$$I(x,z)=\frac{k}{2\pi z}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dx_1'dx_2'W^{(0)}(x_1',x_2',z=0)\exp\left\{\frac{ik}{2z}[(x_1'^2-x_2'^2)-2x(x_1'-x_2')]\right\},\quad(2)$$

式中波数 $k=2\pi/\lambda$,λ 为波长。

定义二阶矩 $\langle x^2\rangle$ 为

$$\langle x^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x^2I(x,z)dx\Big/\int_{-\infty}^{\infty}I(x,z)dx.\quad(3)$$

将(2)式代入(3)式,并利用以下积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-\mathrm{i}sx)\,\mathrm{d}x = -2\pi\delta''(s), \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_m(x+y) H_m(x+z)\,\mathrm{d}x = 2^m \sqrt{\pi} L_m(-2yz), \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta''(s)\,\mathrm{d}x = f''(0), \tag{6}$$

式中 L_m 为 m 阶拉盖尔多项式，δ 表示狄拉克 delta 函数，δ'' 为其二阶导数，f 为任意函数，f'' 为该函数的二阶导数，经过复杂的积分运算得到

$$\langle x^2 \rangle = A + (B/k^2) z^2, \tag{7}$$

式中

$$A = \frac{\sum\limits_{p=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} \sum\limits_{q=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} (Cw_0^2/4)[L_m(D) - 2L'_m(D) + (p+q)^2 x'^2_{\mathrm{d}} L_m(D)]}{\sum\limits_{p=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} \sum\limits_{q=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} CL_m(D)}, \tag{8}$$

$$B = \frac{\sum\limits_{p=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} \sum\limits_{q=-(M-1/2)}^{(M-1)/2} C/w_0^2\{(1+1/\alpha^2)L_m(D) - 2L'_m(D) - [(1+1/\alpha^2)^2 L_m(D) - 4(1+1/\alpha^2)L'_m(D) + 4L''_m(D)]D\}}{\sum\limits_{p=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} \sum\limits_{q=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} CL_m(D)}, \tag{9}$$

$$C = \exp[-(1+1/\alpha^2)(p-q)^2 x'^2_{\mathrm{d}}/2], \tag{10}$$

$$D = (p-q)^2 x'^2_{\mathrm{d}}, \tag{11}$$

式中 L'_m 和 L''_m 分别为拉盖尔多项式的一阶和二阶导数。$x'_{\mathrm{d}} = x_{\mathrm{d}}/w_0$ 和 $\alpha = \sigma_0/w_0$ 分别是子光束相对间距和光束相干参数。部分相干光束通过大气湍流传输的二阶矩满足[13]

$$\langle x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_0 + 2\langle x\theta \rangle_0 z + \langle \theta^2 \rangle_0 z^2 + (2/3)Tz^3, \tag{12}$$

$$\langle x\theta \rangle = \langle x\theta \rangle_0 + \langle \theta^2 \rangle_0 z + Tz^2, \tag{13}$$

这里尖括号下脚标“0”代表光束 $z=0$ 处的二阶矩。并且

$$T = \pi^2 \int_0^{\infty} \kappa^3 \Phi_n(\kappa)\,\mathrm{d}\kappa, \tag{14}$$

式中 $\Phi_n(\kappa)$ 为大气湍流介质的折射率起伏功率谱函数。

结合(7)，(12)和(13)式得到 1D 列阵部分相干 H-G 光束在大气湍流中的二阶矩为

$$\langle x^2 \rangle = A + (B/k^2) z^2 + (2/3)Tz^3, \tag{15}$$

$$\langle x\theta \rangle = (B/k^2) z + Tz^2. \tag{16}$$

根据文献[3]，交叉二阶矩 $\langle x\theta_x \rangle$ 反比于光束等相面曲率半径，且任意场光束沿 x 轴的等效曲率半径表示为[3]

$$R = \langle x^2 \rangle / \langle x\theta \rangle. \tag{17}$$

将式(15)和(16)式代入(17)式得到 1D 列阵部分相干 H-G 光束在大气湍流中的等效曲率半径为

$$R = \frac{A + (B/k^2) z^2 + (2/3)Tz^3}{(B/k^2) z + Tz^2}. \tag{18}$$

上式是具有一般性的表达式。当 $T=0$ 时，(18)式简化为 1D 列阵部分相干 H-G 光束在自由空间中传输的等效曲率半径；当 $m=0$ 时，(18)式简化为 1D 列阵 GSM 光束在大气湍流中传输的等效曲率半径；当 $\alpha \to \infty$（即 $\sigma_0 \to \infty$）时，(18)式简化为完全相干 H-G 列阵光束在大气湍流中传输的等效曲率半径；当 $m=0$，$\alpha \to \infty$ 时，(18)式简化为完全相干高斯列阵光束在大气湍流中传输的等效曲率半径；当 $M=1$ 时，(18)式简化为单束部分相干 H-G 光束在大气湍流中传输的等效曲率半径。

2.2 光强叠加

在相位不锁定情况下，部分相干 H-G 列阵光束按照光强叠加。中心位于 $(jx_{\mathrm{d}}, 0)$ 处的第 j 束部分相干 H-G 光束 CSDF 表示为

$$W_j^{(0)}(x_1',x_2',z=0)=H_m\left[\frac{\sqrt{2}(x_1'-jx_d)}{w_0}\right]H_m\left[\frac{\sqrt{2}(x_2'-jx_d)}{w_0}\right]\times \exp\left[-\frac{(x_1'-jx_d)^2+(x_2'-jx_d)^2}{w_0^2}\right]\exp\left[-\frac{(x_1'-x_2')^2}{2\sigma_0^2}\right], \tag{19}$$

式中 $j\in\left[-\frac{M-1}{2},\frac{M-1}{2}\right]$。光强叠加的部分相干 H-G 列阵光束通过自由空间传输的光强为

$$I(x,z)=\sum_{j=-(M-1)/2}^{(M-1)/2}I_j(x,z), \tag{20}$$

式中 $I_j(x,z)$ 为第 j 束离轴 H-G 光束在自由空间中传输的光强。

将(20)式代入(3)式，采用 2.1 节处理方法，得到光强叠加的部分相干 H-G 列阵光束通过大气湍流传输的等效曲率半径

$$R=\frac{w_0^2\{[(1+2m)/4]+[(M^2-1)/12]x_d'^2\}+(1/(k^2w_0^2)[1+2m+(1/\alpha^2)]z^2+(2/3)Tz^3}{1/(k^2w_0^2)(1+2m+1/\alpha^2)z+Tz^2}. \tag{21}$$

由(21)式可知，光强叠加的 1D 列阵部分相干 H-G 光束的等效曲率半径 R 与光束参数($M,m,w_0^2,x_d',\lambda,\alpha$)有关，$R$ 随着光束数目 M 和子光束相对间距 x_d' 的增大而增大。特别当 $T=0$ 时，(21)式简化为部分相干 H-G 列阵光束在自由空间中传输的等效曲率半径

$$R=\frac{w_0^2\{[(1+2m)/4]+[(M^2-1)/12]x_d'^2\}+(1/k^2w_0^2)(1+2m+1/\alpha^2)z^2}{(1/k^2w_0^2)(1+2m+1/\alpha^2)z}. \tag{22}$$

当 $m=0$ 时，(21)式简化为 1D 列阵 GSM 光束在大气湍流中传输的等效曲率半径

$$R=\frac{w_0^2\{(1/4)+[(M^2-1)/12]x_d'^2)+(1/k^2w_0^2)(1+1/\alpha^2)z^2+(2/3)Tz^3}{(1/k^2w_0^2)(1+1/\alpha^2)z+Tz^2}. \tag{23}$$

当 $\alpha\to\infty$ 时，(21)式简化为完全相干 H-G 列阵光束在大气湍流中传输的等效曲率半径

$$R=\frac{w_0^2\{[(1+2m)/4]+[(M^2-1)/12]x_d'^2\}+(1/k^2w_0^2)(1+2m)z^2+(2/3)Tz^3}{(1/k^2w_0^2)(1+2m)z+Tz^2}. \tag{24}$$

当 $m=0,\alpha\to\infty$ 时，(21)式简化为完全相干高斯列阵光束在大气湍流中传输的等效曲率半径

$$R=\frac{w_0^2\{(1/4)+[(M^2-1)/12]x_d'^2\}+(1/k^2w_0^2)z^2+(2/3)Tz^3}{(1/k^2w_0^2)z+Tz^2}. \tag{25}$$

当 $M=1$ 时，(21)式简化为单束部分相干 H-G 光束在大气湍流中传输的等效曲率半径

$$R=\frac{[(1+2m)/4]w_0^2+(1/k^2w_0^2)(1+2m+1/\alpha^2)z^2+(2/3)Tz^3}{(1/k^2w_0^2)(1+2m+1/\alpha^2)z+Tz^2}. \tag{26}$$

3　数值计算结果及分析

数值计算中采用 Tatarskii 谱，即[6]

$$\Phi_n(\kappa)=0.033\,C_n^2\kappa^{-11/3}\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2), \tag{27}$$

式中 $\kappa_m=5.92/l_0$，l_0 是湍流内尺度，C_n^2 是折射率结构常数，表征湍流的强弱。当湍流内尺度取值 $l_0=0.01$ m 时，将(27)式代入(14)式积分后得 $T=7.6113\,C_n^2$。计算中取光束参数：$\lambda=1.06$ μm，$w_0=1$ cm。

图 2 为 CSDF 和光强叠加时，不同光束阶数 m 下，部分相干 H-G 列阵光束等效曲率半径 R 随传输距离 z 的变化。图 2(a)和(b)均表明自由空间中，随着光束阶数 m 的减小，R 的最小值及其位置均增大。显然，在自由空间中 GSM($m=0$)列阵光束对应的 R 最大，其 R 最小值位置离束腰 $z=0$ 处最远。湍流使得 R 减小，且光束阶数 m 越大，R 受湍流的影响越小。这就使得光束传输到一定距离后，R 随着 m 的减小而减小，且 GSM 列阵光束对应的 R 最小。比较图 2(a)和(b)可知：自由空间中光强叠加的 R 随光束阶数 m 的变化比 CSDF 叠加的缓慢，并且湍流对按 CSDF 叠加的 R 的影响比按光强叠加的要大。

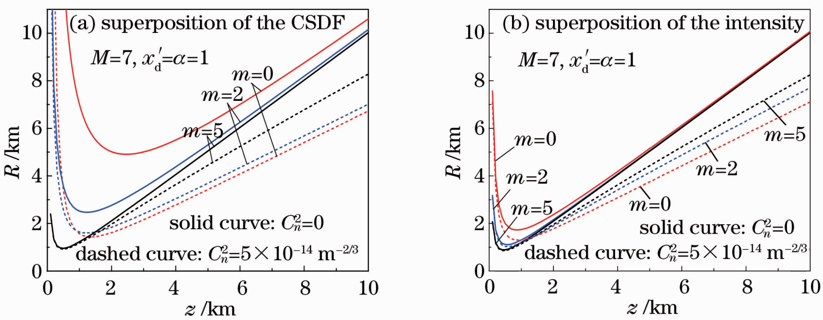

图 2 不同 m 下，R 随 z 的变化

Fig. 2 Curves of R versus z with different m

图 3 为 CSDF 和光强叠加时，不同子光束数目 M 下，部分相干 H-G 列阵光束等效曲率半径 R 随传输距离 z 的变化。图 3(a)和(b)均表明自由空间中，随着 M 的增大，R 的最小值及其位置均增大。显然，在自由空间中单束($M=1$)部分相干 H-G 光束对应的 R 最小，其 R 最小值位置离束腰$z=0$处最近。由图 3(a)可知子光束数目 M 越大，R 受湍流的影响越大。这就使得光束传输到一定距离后，R 随着 M 的增大而减小，且单束($M=1$)部分相干 H-G 光束对应的 R 最大。这一结论与自由空间中的差异很大。

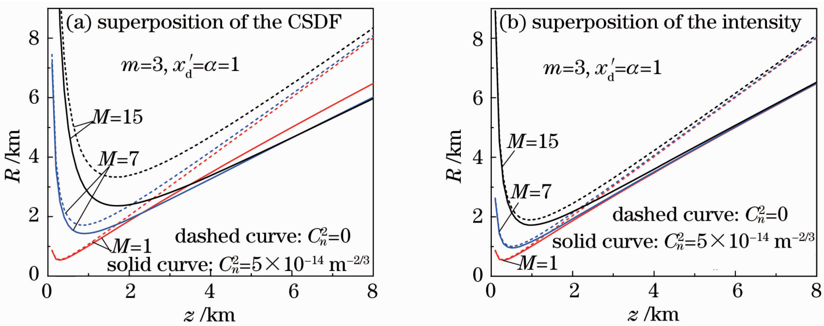

图 3 不同 M 下，R 随 z 的变化

Fig. 3 Curves of R versus z with different M

图 4 为 CSDF 和光强叠加时，不同相干参数 α 下，部分相干 H-G 列阵光束等效曲率半径 R 随传输距离 z 的变化。图 4(a)表明 CSDF 叠加时，R 随 α 的变化是非单调的(与光束阶数 m 和子光束相对间距 x'_{d}有关)。图 4(b)表明，光强叠加时，自由空间中 R 随 α 的增大而增大，且完全相干光($\alpha \to \infty$)对应的 R 最大。在湍流中，α 越大，R 受湍流的影响越大。因此，当光束传输到一定距离后，R 随 α 的增大而减小，且完全相干($\alpha \to \infty$)H-G 列阵光束对应的 R 最小。

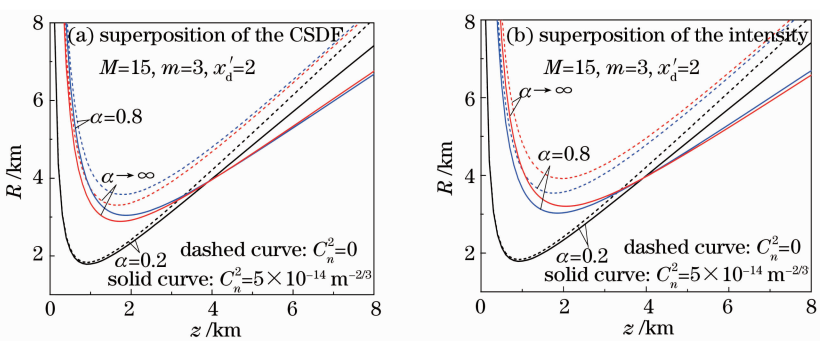

图 4 不同 α 下，R 随 z 的变化

Fig. 4 Curves of R versus z with different α

图 5 为 CSDF 和光强叠加时，相邻子光束相对间距 x'_{d}不同下，部分相干 H-G 列阵光束等效曲率半径 R 随传输距离 z 的变化。图 5(a)表明 CSDF 叠加时，R 随 x'_{d}的变化是非单调的。图 5(b)表明光

强叠加时，$x'_{\rm d}$越大，R 越大，且 R 受湍流影响越大。

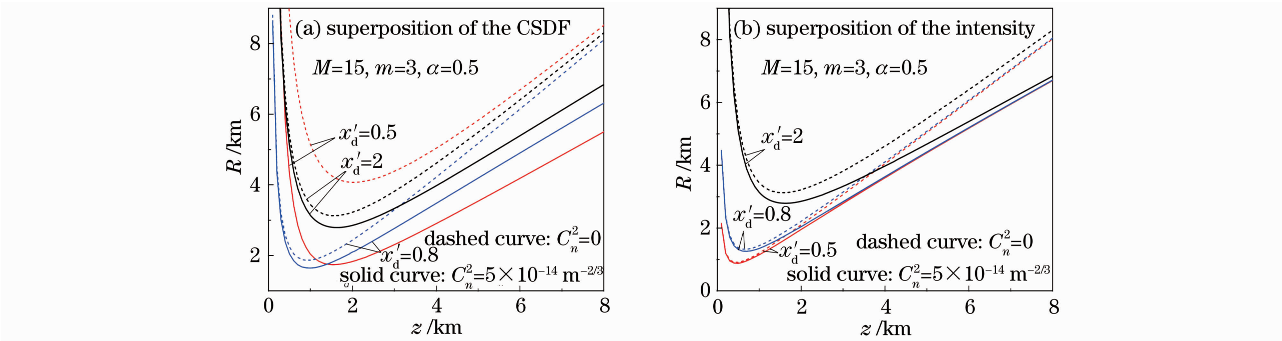

图 5 不同 $x'_{\rm d}$下，R 随 z 的变化

Fig. 5 Curves of R versus z with different $x'_{\rm d}$

4 结 论

推导出了部分相干 H-G 列阵光束在大气湍流中等效曲率半径 R 的解析公式。该公式具有一般性，它可容易地简化为几种典型特例，如 GSM 列阵光束、完全相干 H-G 列阵光束、高斯列阵光束和单束部分相干 H-G 光束等效曲率半径的解析公式。详细研究了大气湍流强度、列阵光束的叠加方式（CSDF 叠加和光强叠加）以及光束参数（光束阶数 m、子光束数目 M、光束相干参数 α 和子光束相对间距 $x'_{\rm d}$）对光束等效曲率半径的影响。研究表明湍流会导致光束的 R 减小。光强叠加时 R 受湍流的影响比 CSDF 叠加时要小。对于两种叠加方式，在自由空间中，随着 m 的减小和 M 的增大，R 会增大，并且 R 受湍流的影响也会增大。因此，在自由空间中 GSM 列阵光束和高斯列阵光束的 R 比部分相干 H-G列阵光束的大，同时受湍流的影响也会更大。而单束部分相干 H-G 光束的 R 比部分相干 H-G 列阵光束的小，受湍流的影响也会更小。CSDF 叠加情况下，R 随着 α 和 $x'_{\rm d}$的变化为非单调的。光强叠加情况下，R 随着 α 和 $x'_{\rm d}$的增大而增大，并且 R 受湍流的影响也会增大。所以，在光强叠加情况下，完全相干 H-G 列阵光束的 R 比部分相干 H-G 列阵光束的大，同时受湍流的影响也会更大。一般来说，自由空间中 R 越大其受湍流的影响也越大。因此，当光束传输到一定距离以后，湍流会使得原来在自由空间中较大的 R 变小，而较小的 R 变大。

参 考 文 献

1 A. P. Miguel, A. Javier, B. Eusebio. Complex beam parameter and ABCD law for non-Gaussian and nonspherical light beams [J]. *Appl. Opt.*, 1992, **31**(30): 6389～6402

2 J. C. Ricklin, F. M. Davidson. Atmospheric turbulence effects on a partially coherent Gaussian beam: implications for free-space laser communication[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2002, **19**(9): 1794～1802

3 H. Weber. Propagation of higher-order intensity moments in quadratic-index media[J]. *Opt. & Quant. Electron.*, 1992, **24** (9): 1027～1049

4 X. Ji, H. Eyyuboğlu, Y. Baykal. Influence of turbulence on the effective radius of curvature of radial Gaussian array beams[J]. *Opt. Express*, 2010, **18**(7): 6922～6928

5 Ji Xiaoling. Propagation equation of the effective radius of curvature of general beams[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30** (10): 2845～2848
季小玲. 一般光束等效曲率半径的传输方程[J]. 光学学报, 2010, **30**(10): 2845～2848

6 L. Andrews, R. Phillips. Laser Beam Propagation in the Turbulent Atmosphere[M]. 2nd ed. Bellingham, Washington: SPIE Press, 2005

7 Y. Zhu, D. Zhao, X. Du. Propagation of stochastic Gaussian-Schell model array beams in turbulent atmosphere[J]. *Opt. Express*, 2008, **16**(22): 18437～18442

8 X. Ji, E. Zhang, B. Lü. Superimposed partially coherent beams propagating through atmospheric turbulence[J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2008, **25**(5): 825～833

9 P. Zhou, Y. Ma, X. Wang *et al.*. Average intensity of a partially coherent rectangular flat-topped laser array propagating in a turbulent atmosphere[J]. *Appl. Opt.*, 2009, **48**(28): 5251～5258

10 X. Ji, X. Shao. Influence of turbulence on the beam propagation factor of Gaussian Schell-model array beams[J]. *Opt. Commun.*, 2010, **283**(6): 869～873

11 X. Li, X. Ji, H. Eyyuboğlu *et al.*. Turbulence distance of radial Gaussian Schell-model array beams[J]. *Appl. Phys. B*, 2010, **98**(2～3): 557～565

12 Li Xiaoqing, Ji Xiaoling. Directionality of partially coherent Hermite-Gaussian array beams propagating in atmospheric turbulence[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(12): 3241～3247
李晓庆, 季小玲. 部分相干厄米-高斯列阵光束通过湍流大气传输的方向性[J]. 光学学报, 2009, **29**(12): 3241～3247

13 Y. Dan, B. Zhang. Second moments of partially coherent beams in atmospheric turbulence[J]. *Opt. Lett.*, 2009, **34**(5): 563～565

栏目编辑：宋梅梅