

涡旋光束传输中的光斑展宽研究

丁攀峰 蒲继雄 任洪亮

(华侨大学信息科学与工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要 推导了涡旋光束传输一段距离后观测平面上电场的解析表达式,在此基础上对观测平面上的光强分布及光斑大小进行了分析。和传统的高斯光束不同,涡旋光束传输后的光斑尺寸没有较为统一的定义。提出了均方根光斑尺寸以及等效光斑尺寸的定义,并分别采用这两种定义对涡旋光束的光斑展宽进行了分析。研究表明,涡旋光束在传输中的光斑展宽由拓扑电荷数以及传输距离决定,拓扑电荷数越大,光斑展宽越快。数值计算进一步说明,等效光斑尺寸更适合用来表征涡旋光束传输后的光斑大小。

关键词 物理光学; 涡旋光束; 光斑展宽; 传输; 光斑尺寸

中图分类号 O436.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201138.s102002

Analysis on Spreading of Vortex Beam while Propagating

Ding Panfeng Pu Jixiong Ren Hongliang

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Quanzhou, Fujian 362021, China)

Abstract The analytical expression of the electric field is derived on the observation plane for vortex beam after propagation. Based on the derived result, the intensity distribution and the beam size on the observation plane is analyzed. Different from the traditional Gaussian beam, there is no generous definition for vortex beam after propagation. The mean-square width and the equivalent-beam width are put forward to investigate the spreading of vortex beam while propagating. It is shown that the spreading of vortex beam depends on the topological charge and propagation length. The beam with bigger topological charge spreads faster. Calculation results reveal that the equivalent beam length is more suitable to describe the beam size of vortex beam after propagation.

Key words physical optics; vortex beam; spreading of beam; propagation; size of beam

OCIS codes 260.6042; 260.1960; 050.4865

1 引言

涡旋光束独特的相位结构,使其成为近期研究的热点之一,其应用范围从微小尺寸的光镊到自由空间光通信,受到了较为广泛的关注^[1~6]。拉盖尔-高斯光束是涡旋光束的典型代表,带有螺旋型相位分布,能使每个光子带上 $l\varphi$ 的轨道角动量^[7]。其中 l 为拓扑电荷数,决定绕涡旋点一周的相位变化。实验室产生涡旋光束的途径主要有计算全息法和利用螺旋相位板。相比而言,采用螺旋相位板效率比较高,光束质量好。固体激光器输出的高斯光入射到螺旋相位板,出射光束就是涡旋光束。值得注意的是,传统的高斯光束中心为光强极大值的位置,随着半径的增大光强逐渐降低,光强降低到中心点的

$1/e^2$ 时的半径定义为光束半径(光斑大小),而涡旋光束中心的光强为极小值,无法采用类似的方法对涡旋光束的光斑尺寸进行定义;另一方面,大多数研究者的兴趣主要集中于涡旋光束的相位特性以及轨道角动量,目前还没有针对涡旋光束光斑尺寸较为严格的定义,对于涡旋光束在自由空间中传输时光斑的展宽这一问题,还没有较为系统的研究,本文从均方根和等效功率两个角度来对涡旋光束的光斑尺寸进行界定,对涡旋光束在传输中的光斑展宽进行分析。

2 理论分析

固体激光器输出的高斯光,经过螺旋相位板的相位调制,输出光为高斯涡旋光束。其横截面上光

收稿日期: 2011-08-01; 收到修改稿日期: 2011-09-02

基金项目: 国家自然科学基金培育项目(JB-ZR1126)和厦门市科技计划项目(3502Z20113017)资助课题。

作者简介: 丁攀峰(1980—),男,博士,硕士生导师,主要从事光束传输及偏振光学等方面的研究。

E-mail: dingpanfeng@163.com

电场可以表示为^[8]

$$E(x', y', z = 0) = A_0 \left(\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\omega_0} \right)^l \exp\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{\omega_0^2}\right) \exp(i l \phi), \quad (1)$$

式中 A_0 是电场振幅, ω_0 是光束的束腰, l 为拓扑电荷数。以上坐标表征源平面上的点, 加上撇号与观测平面相区别。由光束传输理论, 可以知道传输一段距离后观测平面上的电场为

$$E(\mathbf{r}, z) = -\frac{ik}{2\pi z} \exp(ikz) \iint E(\boldsymbol{\rho}, z = 0) \times \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})^2]\right\} d\boldsymbol{\rho}, \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式

$$E(x, y, z) = \frac{A_0 \exp\left[ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z} + z\right)\right]}{i\lambda z \omega_0^l} \times \iint \exp\left[-\beta^2(x'^2 + y'^2) - \frac{ik(xx' + yy')}{z}\right] \times (x' + iy')^l dx' dy', \quad (3)$$

式中 $\beta^2 = \frac{1}{\omega_0^2} - \frac{ik}{2z}$, 通过复变函数积分代换 $z_1 =$

$x' + \frac{ikx}{2z\alpha^2}$, $z_2 = y' + \frac{iky}{2z\alpha^2}$, (3)式转化为

$$E(x, y, z) = C_0 \iint \exp[-\beta^2(z_1^2 + z_2^2)] \times [z_1 + iz_2 + k(y - ix)/2\beta^2 z]^l dz_1 dz_2, \quad (4)$$

式中 $C_0 = -\frac{iA_0 k \exp(ikz) \exp[ik(x^2 + y^2)/2\omega_0^2 \beta^2 z]}{2\pi z \omega_0^l}$,

通过文献[9]的积分公式 Eq. (5.6-16), (4)式可以简化为

$$E(x, y, z) = \frac{\left(1 - i \frac{2z}{k\omega_0^2}\right)^{l+1} (x + iy)^l}{\Delta^{l+1} \omega_0^l} \times \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\Delta \omega_0^2} - i \frac{2z(x^2 + y^2)}{\Delta k \omega_0^4} + ikz\right], \quad (5)$$

式中 $\Delta = 1 + \frac{4z^2}{k^2 \omega_0^4}$, (5)式即为观测平面上电场解析表达式, 于是可以得到观测平面上的光强分布为

$$I(x, y, z) = \frac{(x^2 + y^2)^l}{\Delta^{2l+2} \omega_0^{2l}} \exp\left[-\frac{2(x^2 + y^2)}{\Delta \omega_0^2}\right]. \quad (6)$$

从(6)式的结果可以看出, 观测平面上光强分布仍然具有角向对称的特点, 可以将光强写为 r 的函数

$$I(r, z) = \frac{r^{2l}}{\Delta^{2l+2} \omega_0^{2l}} \exp\left(-\frac{2r^2}{\Delta \omega_0^2}\right). \quad (7)$$

(7)式给出的光强分布可以用来分析观测平面上光斑尺寸的大小, 可以看到, 和传统的高斯光束不同,

涡旋光束的光斑尺寸大小没有统一的定义标准, 以下仿照传统的定义方法, 从均方根和等效功率两个方面, 对涡旋光束在传输中的光斑展宽进行分析, 并对这两种定义的方法进行比较。

2.1 均方根定义下的光斑尺寸

由文献[10]中光斑尺寸的定义, 可以得到观测平面上光斑的均方根大小满足

$$w^2(z) = \frac{4 \int r^2 \times \frac{r^{2l}}{\Delta^{2l+2} \omega_0^{2l}} \exp\left(-\frac{2r^2}{\Delta \omega_0^2}\right) dr}{\int \frac{r^{2l}}{\Delta^{2l+2} \omega_0^{2l}} \exp\left(-\frac{2r^2}{\Delta \omega_0^2}\right) dr}. \quad (8)$$

化简后可得

$$w(z) = \sqrt{(2l+1)\Delta} \omega_0 = \sqrt{(2l+1)\left(1 + \frac{4z^2}{k^2 \omega_0^4}\right)} \omega_0. \quad (9)$$

(9)式即为均方根定义下经过传输一段距离后观测平面上涡旋光束的光斑大小。此结果表明涡旋光束在传输中光斑展宽的特点: 整体而言, 光斑的展宽与源平面上的光斑大小和波长相关; 在相同的传输距离处, 观测平面上光斑的展宽量由拓扑电荷数决定, 与 $\sqrt{(2l+1)}$ 成正比, 拓扑电荷数越大, 光斑展宽越快; 另一方面, 在拓扑电荷数一定的情况下, 随着传输距离的增大, 光斑的展宽量与参数 $\sqrt{\Delta}$ 成正比, 当传输距离足够远, 满足 $z \gg k\omega_0^2/2$ 时, $\sqrt{\Delta} \approx \frac{2z}{k\omega_0^2}$, 展宽量与传输距离近似成正比。

2.2 等效功率定义下的光斑尺寸

考虑到从中心至高斯光束束腰处的圆面内, 包含的功率占整个光束平面的 86.47%。类似地, 提出等效功率光斑尺寸的概念: 半径等于等效功率光斑尺寸的圆面内, 包含的光功率占横截面上总光功率的 $(1 - 1/e^2) \approx 86.47\%$, 该半径对应的光斑尺寸简称等效光斑尺寸。为区别均方根的定义, 等效光斑尺寸记作 $w_{\text{eff}}(z)$, 满足

$$\frac{\int_0^{w(z)} \frac{r^{2l}}{\Delta^{2l+2} \omega_0^{2l}} \exp\left(-\frac{2r^2}{\Delta \omega_0^2}\right) r dr}{\int_0^\infty \frac{r^{2l}}{\Delta^{2l+2} \omega_0^{2l}} \exp\left(-\frac{2r^2}{\Delta \omega_0^2}\right) r dr} = 1 - \frac{1}{e^2}, \quad (10)$$

化简可以得到

$$w_{\text{eff}}(z) = \sqrt{\frac{t}{2}} \sqrt{\Delta} \omega_0, \quad (11)$$

式中 t 为一常数, 与拓扑电荷数 l 有关, 满足方程

$$1 - \sum_{n=0}^l \frac{t^n}{n!} \exp(-t) = 86.47\%, \quad (12)$$

通过(12)式求出 t , 即可求出等效光斑尺寸 $\omega_{\text{eff}}(z)$ 。(11)式表明, 和均方根定义下的光斑情况类似, 对于一定拓扑电荷数的涡旋光束, 传输一段距离后其等效光斑尺寸仍然和 $\sqrt{\Delta}$ 成正比。不同之处在于拓扑电荷数的大小对光斑展宽的影响表现不同, 在两种定义下, 拓扑电荷数的影响分别通过参数 $\sqrt{(2l+1)}$ 和 t 来体现。

3 两种光斑定义的比较

由于第二种定义中参数 t 没有解析解, 拓扑电

表 2 两种定义下拓扑电荷数对应的参数比较

Table 2 Comparison of parameters under the two definitions

l	1	2	3	4	5	6
$\sqrt{(2l+1)}$	1.73205	2.23607	2.64575	3	3.31662	3.60555
$\sqrt{t/2}$	1.32387	1.56169	1.75874	1.93075	2.08536	2.22699

表 2 说明, 拓扑电荷数的影响在两种定义下有较明显的差异, 均方根定义下的参数大于等效功率定义下的参数。为了说明在以上两种定义下涡旋光束在传输中的光斑展宽情况, 并对两种定义进行对比, 需要进行详细的数值计算。

4 数值计算

为了具体说明哪一种定义更加适用于表征涡旋光束展宽后的光斑尺寸, 模拟计算了传输一定距离

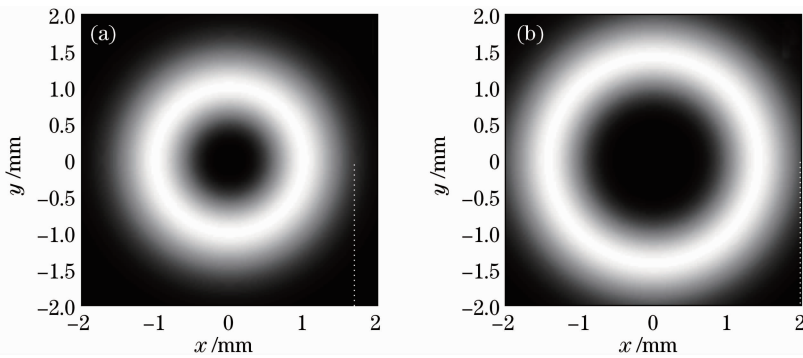


图 1 传输 1.2 m 处观测平面上的光强分布。(a) $l=2$; (b) $l=4$

Fig. 1 Distribution of intensity on the observation plane while $z=1.2$ m. (a) $l=2$; (b) $l=4$

当拓扑电荷数为 2 时, 按照前面两种定义, 传输距离 1.2 m 处的光斑尺寸分别为 2.23 mm, 1.56 mm, 图 1(a) 中显示的光斑尺寸为 1.6 mm 左右, 与等效光斑尺寸计算的结果更接近; 当拓扑电荷数为 4 时, 按照前面两种定义, 传输距离 1.2 m 处的光斑尺寸分别为 2.99 mm 和 1.93 mm, 图 1(b) 中显示的光斑尺寸约为 2 mm, 仍然与等效光斑尺寸计算的结果更接近; 此外针对其他的拓扑电荷数和

荷数对光斑展宽的影响不能直观地反映出来, 用数值计算方法求出了 l 分别等于 1, 2, 3, 4, 5, 6 的情况下 t 的值, 如表 1 所示。

表 1 参数 t 随拓扑电荷数的改变

Table 1 Change of t with topological charge

l	1	2	3	4	5	6
t	3.50524	4.87773	6.18633	7.45557	8.69747	9.91895

两种定义下, 拓扑电荷数对涡旋光束光斑展宽的影响略有差异, 对应的参数分别为 $\sqrt{(2l+1)}$ 和 $\sqrt{t/2}$, 表 2 给出了详细的比较结果。

处观测平面上的光强分布, 从光强分布图上初步估计光斑的大小, 然后按照两种定义, 分别计算此时观测平面上光斑展宽后的大小, 将计算的两个结果与光斑图上显示的结果比较, 看哪一个计算结果与光斑图上的显示结果更接近, 从而确定两种定义的优劣。模拟计算中源平面上光斑 $\omega_0=0.25$ mm, 波长为 632.8 nm, 图 1 给出了拓扑电荷数为 2 和 4 的涡旋光束在传输距离 1.2 m 处观测平面上的光强分布。

传输距离进行了多次的模拟计算, 结果都表明, 等效光斑尺寸的结果与光斑分布图中显示的结果更接近, 而均方根定义下的光斑尺寸则显得偏大。

5 结 论

在推导了涡旋光束传输一段距离后观测平面上的电场解析表达式的基础上, 对涡旋光束在传输中的光斑展宽进行了分析, 理论结果和数值计算的结

果综合表明,虽然均方根定义下的光斑尺寸可以给出涡旋光束传输一段距离后光斑展宽量的解析表达式,但该结果与光斑图上显示的结果符合不够好,在分析涡旋光束传输中的光斑尺寸时,选择等效光斑尺寸更加合适。

参 考 文 献

- 1 H. He, M. E. Friese, N. R. Heckenberg *et al.*. Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser beam with a phase singularity[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**(5): 826~829
- 2 Q. S. Xie, D. M. Zhao. Optical vortices generated by multi-level achromatic spiral phase plates for broadband beams[J]. *Opt. Commun.*, 2008, **281**(1): 7~11
- 3 L. Z. Rao, J. X. Pu. Spatial correlation properties of focused partially coherent vortex beams[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2007, **24**(8): 2242~2247
- 4 Z. M. Zhang, J. X. Pu, X. Q. Wang. Tight focusing of radially and azimuthally polarized vortex beams through a uniaxial birefringent crystal[J]. *Appl. Opt.*, 2008, **47**(12): 1963~1967
- 5 Lu Xuanhui, Huang Huiqing, Zhao Chengliang *et al.*. Optical vortex beams and optical vortices[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2008, **45**(1): 50~56
陆璇辉, 黄慧琴, 赵承良 等. 涡旋光束和光学涡旋[J]. *激光与光电子学进展*, 2008, **45**(1): 50~56
- 6 Chen Ziyang, Zhang Guowen, Rao Lianzhou *et al.*. Determining the orbital angular momentum of vortex beam by Young's double-slit interference experiment[J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(7): 1063~1067
陈子阳, 张国文, 饶连周 等. 杨氏双缝干涉实验测量涡旋光束的轨道角动量[J]. *中国激光*, 2008, **35**(7): 1063~1067
- 7 L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw *et al.*. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes [J]. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**(11): 8185~8189
- 8 Wei Zhang, Mark G. Kuzyk. Effect of thin optical Kerr medium on a Laguerre-Gaussian beam[J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2006, **89**(10): 101103
- 9 L. Mandel, E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 10 A. E. Siegman. *New developments in laser resonators* [C]. *SPIE*, 1990, **1224**: 2~14

栏目编辑:宋梅梅