

# 四瓣高斯光束经过偏心圆孔限制的矢量 非傍轴传输

张亮君 张军勇\* 张艳丽 陈宝算 刘德安 朱健强 林尊琪

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

**摘要** 基于矢量瑞利-索末菲衍射积分,建立了非傍轴条件下四瓣高斯光束经过偏心圆孔光阑在自由空间传输的矢量场模型。选取倾斜光轴作为参考光轴,借助于硬边圆孔的复高斯级数分解,得到了近场模型下衍射场分布的矢量解析式。通过数值计算和模拟,详细讨论了  $f$  参数、光束阶次、衍射孔位置和截断参数对像场分布的影响,包括衍射场主瓣强度的位置和光束宽度。这些结论有助于更好地理解四瓣高斯光束在离轴非对称光学系统中的传输特性。

**关键词** 物理光学;四瓣高斯光束;矢量瑞利-索末菲衍射积分;硬边圆孔光阑

**中图分类号** O436 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201138.0902005

## Vectorial Non-Paraxial Propagation of Four-Petal Gaussian Beams through an Eccentric Circular Aperture

Zhang Liangjun Zhang Junyong Zhang Yanli Chen Baosuan

Liu De'an Zhu Jianqiang Lin Zunqi

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, China)

**Abstract** Based on the vectorial Rayleigh-Sommerfeld diffraction integrals, the model for four-petal Gaussian beams propagating through an eccentric circular aperture is built. By choosing oblique optical axis as the reference optical axis and expanding the hard-edged circular aperture function as a finite sum of complex Gaussian functions, an analytical solution is performed. Furthermore, the detailed numerical calculation for the two-dimensional beams is presented. The simulation also shows that  $f$  parameters, beam order, location of aperture and truncation parameter affect the diffracted field, including location of center intensity and beam width. All these characteristics help us understand four-petal Gaussian beams propagation better.

**Key words** physical optics; four-petal Gaussian beam; vectorial Rayleigh-Sommerfeld diffraction integral; hard-edged circular aperture

**OCIS codes** 260.1960; 140.3295; 050.1220; 050.1970

## 1 引言

随着激光技术的广泛应用,光束通过傍轴光学系统的传输特性研究日趋完善。然而当光束发散角很大,或者强聚焦光束光斑尺寸为波长量级时,傍轴近似失效,要用严格的矢量场理论来处理光场的传输变换问题。目前,研究非傍轴光束传输变换的常用方法有微扰级数法、算子法、角谱分析法、虚点源

法、维格纳分布函数法和瑞利-索末菲衍射积分法等<sup>[1~8]</sup>。其中,瑞利-索末菲衍射积分法使用较为广泛,可以根据实际情况进行不同形式的近似处理。

文献[9~13]研究了四瓣高斯光束在不受限自由空间、晶体中以及在强非局域非线性介质中的传输特性,但未考虑光束被衍射小孔截断的情况对光传输变换的影响。本文借助圆孔光阑的复高斯级数

收稿日期: 2011-04-15; 收到修改稿日期: 2011-05-24

基金项目: 国际科技合作专项(2010DFB70490)资助课题。

作者简介: 张亮君(1985—),女,硕士,研究实习员,主要从事光学设计和光学理论等方面的研究。E-mail: zlj@siom.ac.cn

\* 通信联系人。E-mail: zhangjin829@163.com

分解和矢量瑞利-索末菲衍射积分公式<sup>[14~17]</sup>,以倾斜光轴作为参考光轴,研究了光束经过偏心圆孔的矢量非傍轴传输特性,得到了四瓣高斯光束经过偏心圆孔衍射的解析表达式。通过数值计算讨论了  $f$  参数、截断参数、光束阶次和衍射孔位置的变化对像场中心分布的影响。最后作为特例,研究了阶次  $n=0$  时的四瓣高斯光束,即高斯光束的传输变换特性。

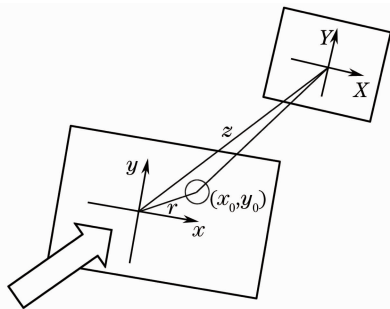


图 1 四瓣高斯光束通过偏心圆孔衍射的示意图

Fig. 1 Schematic of a four-petal Gaussian beam propagating through an eccentric circular aperture

## 2 四瓣高斯光束经过偏心圆孔衍射的理论分析

如图 1 所示,偏心圆孔在衍射平面  $xy$  上,圆孔的中心坐标为  $(x_0, y_0)$ ,半径为  $r$ ,衍射平面  $xy$  到观察平面  $XY$  的轴向距离为  $z$ 。

假定一沿  $x$  方向线偏振的四瓣高斯光束在  $xy$  面( $z=0$ )上的分布为

$$\begin{cases} E_x(x, y, 0) = \left( \frac{x-x_0}{w_0} \frac{y-y_0}{w_0} \right)^{2n} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{w_0^2}\right], \\ E_y(x, y, 0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中  $n$  为光束阶次,  $w_0$  为高斯光束( $n=0$ )的束腰半径。

根据矢量瑞利-索末菲衍射积分公式,在  $z>0$  的半空间存在解

$$\begin{cases} U_x(X, Y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} E'_x(x, y, 0) \frac{\partial}{\partial z} \frac{\exp(ikR)}{R} dx dy \\ U_y(X, Y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} E'_y(x, y, 0) \frac{\partial}{\partial z} \frac{\exp(ikR)}{R} dx dy \\ U_z(X, Y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[ E'_x(x, y, 0) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\exp(ikR)}{R} + E'_y(x, y, 0) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\exp(ikR)}{R} \right] dx dy \end{cases} \quad (2)$$

式中  $R = [(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2]^{1/2}$ ,  $k$  为波数。

选取倾斜光轴作为参考光轴,将衍射屏上的坐标原点平移到点  $(x_0, y_0)$ ,新的坐标系记作  $x'y'$ ,此时  $x = x' + x_0, y = y' + y_0$ ,同时对  $R$  进行泰勒级数展开,并保留前两项得

$$R = [(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2]^{1/2} = \{[X - (x' + x_0)] + [Y - (y' + y_0)] + z^2\}^{1/2} \approx L + \frac{x'^2 + y'^2 - 2X'x' - 2Y'y'}{2L} \quad (3)$$

式中  $X' = X - x_0, Y' = Y - y_0, L = (X'^2 + Y'^2 + z^2)^{1/2}$ 。

在新坐标系  $x'y'$  中,衍射屏上圆孔的复高斯级数分解为

$$t(x, y, 0) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{r}\right) = \sum_{m=1}^M A_m \exp\left[-\frac{B_m}{r^2}(x'^2 + y'^2)\right] \quad (4)$$

式中  $A_m, B_m$  为复高斯系数<sup>[14]</sup>,  $r$  为衍射圆孔的半径。

显然,衍射屏后的光场分布为

$$E'_p(x, y, 0) = E_p(x, y, 0)t(x, y, 0) \quad (5)$$

式中下标  $p$  分别取  $x, y$ 。

将(3)式和(5)式代入(2)式,并在  $R \gg \lambda$  条件下,利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} \exp(-at^2 - 2\beta t) dt = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{N!(2n-2N)!} \left(\frac{\alpha}{4\beta^2}\right)^N \quad (6)$$

式中  $\text{Re}(\alpha) > 0$ ,经过积分运算,得到观察平面  $XY$  上的衍射场分布为

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x(X, Y, z) = \sum_{m=1}^M A_m \frac{iz\pi}{\lambda a L \omega_0^4} \frac{\exp(ikL)}{L} \left(\frac{b}{2a}\right)^{4n} (X'Y')^{2n} \exp\left[-\frac{b^2}{4a}(X'^2 + Y'^2)\right] \times \\ \quad \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{N!(2n-2N)!} \left(-\frac{a}{b^2 X'^2}\right)^N \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{N!(2n-2N)!} \left(-\frac{a}{b^2 Y'^2}\right)^N \\ U_y(X, Y, z) = 0 \\ U_z(X, Y, z) = \sum_{m=1}^M A_m \frac{-iX' \exp(ikL)}{\omega_0^4 \lambda L^2 a^{2n+2}} \exp\left[-\frac{b^2}{4a}(X'^2 + Y'^2)\right] \times \left[ a\Gamma^2\left(n + \frac{1}{2}\right) {}_1F_1\left(-n; \frac{1}{2}; \frac{b^2}{4a}X'^2\right) \times \right. \\ \quad \left. {}_1F_1\left(-n; \frac{1}{2}; \frac{b^2}{4a}Y'^2\right) + b\Gamma^2\left(n + \frac{3}{2}\right) {}_1F_1\left(-n; \frac{3}{2}; \frac{b^2}{4a}X'^2\right) {}_1F_1\left(-n; \frac{1}{2}; \frac{b^2}{4a}Y'^2\right) \right], \end{array} \right. \quad (7)$$

式中  $a = -B_m/r^2 - 1/\omega_0^2 + b/2$ ,  $b = ik/L$ ,  $\Gamma(\cdot)$  为伽玛函数,  ${}_1F_1(\cdot)$  为超几何函数。

远场近似

$$R \approx L - \frac{X'x' + Y'y'}{L}. \quad (8)$$

在(7)式中, 只要令  $a = -B_m/r^2 - 1/\omega_0^2$ , 即得到远场近似下的衍射场分布。

在  $z$  处横截面上的光强通常用时间平均波印廷矢量表示<sup>[18]</sup>, 即为

$$\langle \mathbf{s} \rangle = \text{Re}(\mathbf{U} \times \mathbf{H}^*), \quad (9)$$

对于线偏振光而言, 平均能量密度的  $z$  分量为

$$\langle s_z \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(U_x H_y^*), \quad (10)$$

式中  $s$  为平均能量密度,  $U$  和  $H$  分别表示电场强度和磁场强度,

$H_y = \frac{1}{ik} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right)$ ,  $\epsilon$  为介电常数,  $\mu$  为磁导率。

### 3 数值计算与分析

为了分析矢量非傍轴四瓣高斯光束经过偏心圆孔光阑衍射后的传输特性, 针对(7)式, 利用 Matlab

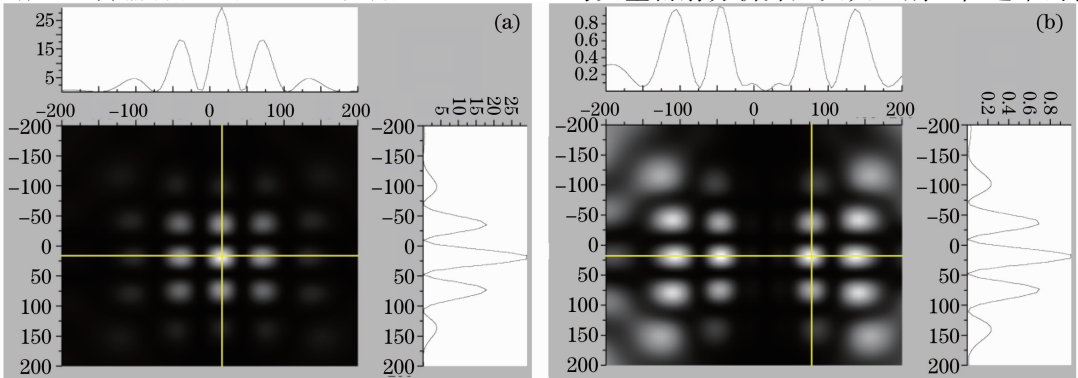


图 2 相对于  $I_z$  最大值归一化后的能流分布,  $f=0.1$ ,  $x_0=10 \mu\text{m}$ ,  $y_0=12 \mu\text{m}$ ,  $z=30z_R$ 。

(a) 参考(9)式计算的能流分布; (b)  $I_z$  归一化后的强度分布

Fig. 2 Normalized intensity distribution relative to the maximum of  $I_z$ ,  $f=0.1$ ,  $x_0=10 \mu\text{m}$ ,  $y_0=12 \mu\text{m}$ ,  $z=30z_R$ .

(a) Intensity distribution based on Eq. (9); (b) normalized intensity distribution  $I_z$

近似参考的是主光轴,这样在远场衍射下,空域的位移对应频域的相移,在衍射场分布中不会产生主瓣中心移动。另外,对比图 2 和图 3 可知,  $f=0.6$  较之于  $f=0.1$  的束腰小,其对应的菲涅耳数更小,所

以会显得更加“远场”,旁瓣与主瓣的对比度更加显著,从而使得主瓣更加突显。图 3(b)所示的纵向场  $I_z$  最大值对能流最大值的贡献小于 5.8%。

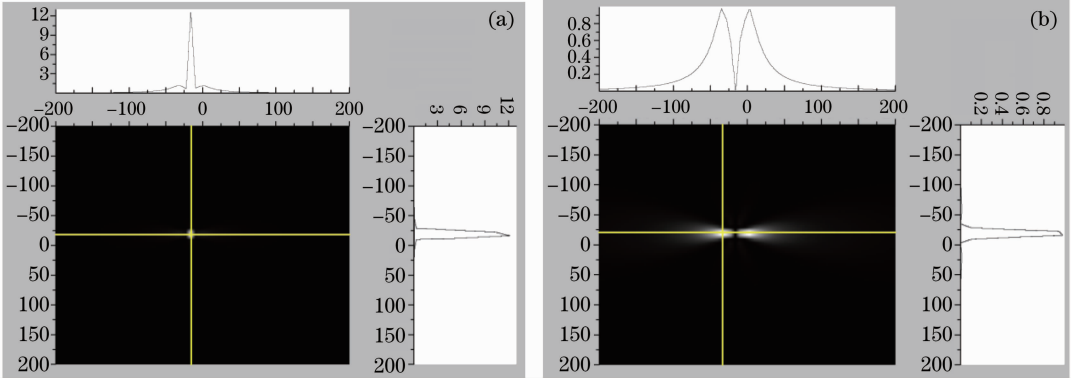


图 3 相对于  $I_z$  最大值归一化后的能流分布,  $f=0.6, x_0 = -10 \mu\text{m}, y_0 = 12 \mu\text{m}, z = 30z_R$ 。

(a) 参考(9)式计算的能流分布; (b)  $I_z$  归一化后的强度分布

Fig. 3 Normalized intensity distribution relative to the maximum of  $I_z$ ,  $f=0.6, x_0 = -10 \mu\text{m}, y_0 = 12 \mu\text{m}, z = 30z_R$ .

(a) Intensity distribution based on Eq. (9); (b) normalized intensity distribution  $I_z$

图 4 给出了衍射孔中心位置在第一象限,当光束阶次  $n$  和截断参数  $\delta$  分别取不同值时,  $I_{z\text{max}}(X, 0, 30z_R)/I_{x\text{max}}(X, 0, 30z_R)$  随  $f$  参数变化的关系图。当  $n = 0$  时,四瓣高斯光束过渡到高斯光束,其变化趋势由图中的菱形空心图标曲线所示。此外,随着光束阶次的增加,不同的截断参数对四瓣高斯光束的影响不同。数值计算表明,当  $n = 2, \delta = 1.4, f > 0.46$  时,  $I_{z\text{max}}(X, 0, 30z_R)$  对衍射场光强度的贡献将超过  $I_{x\text{max}}(X, 0, 30z_R)$ , 相反的情况可以从图 4 的曲线看出。另外,从图 2~4 也可以明显地看出,  $f$  参数比截断参数  $\delta$  对衍射场的影响更加重要。

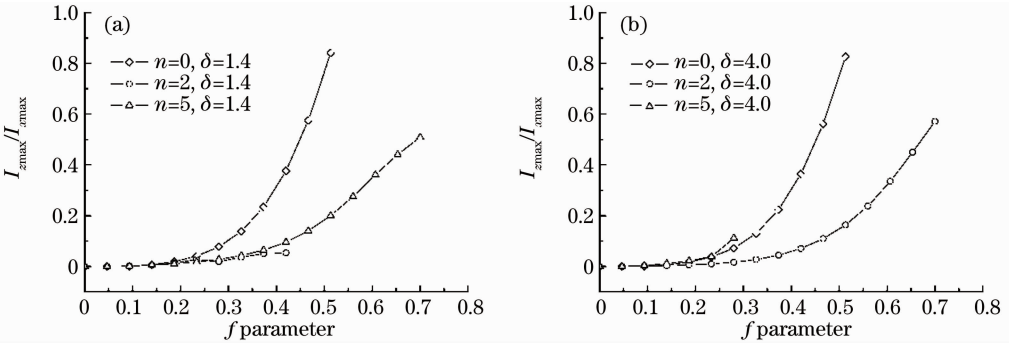


图 4  $I_{z\text{max}}(X, 0, 30z_R)/I_{x\text{max}}(X, 0, 30z_R)$  在不同的光束阶次和截断参数下随  $f$  参数变化的关系图

Fig. 4 Relationship between  $I_{z\text{max}}(X, 0, 30z_R)/I_{x\text{max}}(X, 0, 30z_R)$  and  $f$  parameter with different values of beam order  $n$  and truncation parameter  $\delta$

最后研究一下高斯光束(即  $n = 0$  时的四瓣高斯光束)通过偏心圆孔衍射的情况。更一般地,以椭圆高斯光束为例,计算参数取  $f_y = 0.01, x_0 = 10 \mu\text{m}, y_0 = 12 \mu\text{m}, z = 30z_R$ 。计算结果如图 5 所示,该图表明,随着截断参数的增大,孔的衍射效应逐渐减弱;当截断参数趋于无穷大,即没有光阑限制时,  $I_{z\text{max}}(X, 0, 30z_R)/I_{x\text{max}}(X, 0, 30z_R)$  趋近 0.2313。

## 4 结 论

在非傍轴情形下,基于矢量瑞利-索末菲衍射积分,以倾斜光轴作为参考光轴,并借助圆孔光阑的复高斯级数分解,得到了四瓣高斯光束经过偏心圆孔衍射的矢量解析式。数值计算表明,光束阶次、 $f$  参数、衍射圆孔的位置和截断参数共同影响偏心圆孔衍射光束的非傍轴行为。此外,非傍轴效应随  $f$  参

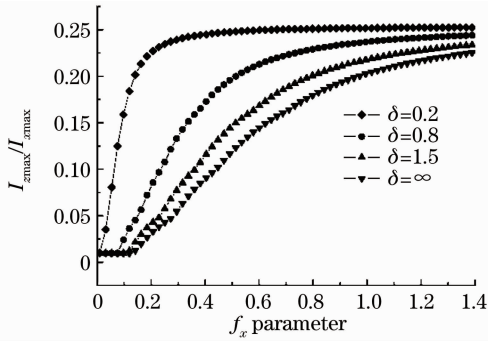


图5  $I_{z_{\max}}(X, 0, 30z_R)/I_{x_{\max}}(X, 0, 30z_R)$ 在不同的截断参数下随  $f_x$  参数变化的函数关系

Fig. 5 Relationship between  $I_{z_{\max}}(X, 0, 30z_R)/I_{x_{\max}}(X, 0, 30z_R)$  and  $f_x$  parameter with different values of truncation parameters  $\delta$

数、孔中心偏移量的增加而增加,衍射效应随截断参数的增加而减弱。

### 参 考 文 献

- 1 M. Lax, W. H. Louisell, W. B. Mcknight. From Maxwell to paraxial wave optics [J]. *Phys. Rev. A.*, 1975, **11**(4): 1365~1370
- 2 A. Wünsche. Transition from the paraxial approximation to exact solutions of the wave equation and application to Gaussian beams[J]. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 1992, **9**(5): 765~774
- 3 Carl G. Chen, Paul T. Konkola, Juan Ferrera *et al.*. Analyses of vector Gaussian beam propagation and validity of paraxial and spherical approximations [J]. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 2002, **19**(2): 404~412
- 4 S. R. Seshadri. Virtual source for the Bessel-Gauss beam[J]. *Opt. Lett.*, 2002, **27**(12): 998~1000
- 5 R. K. Luneburg. *Mathematical Theory of Optics* [M]. Berkeley: University of California Press, 1964
- 6 Y. C. Zhang, B. Lü. Propagation of the Wigner distribution function for partially coherent nonparaxial beams[J]. *Opt. Lett.*, 2004, **29**(23): 2710~2712

- 7 Li Binzhong, Lü Baida. Beam combination characteristics of partially coherent beams[J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(9): 2337~2340
- 李宾中, 吕百达. 部分相干光光束合并的光束传输变换特性[J]. *中国激光*, 2009, **36**(9): 2337~2340
- 8 Xing Yan, Lü Baida. Propagation of off-axis Gaussian-Schell model electromagnetic beams beyond the paraxial approximation [J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(3): 726~732
- 邢燕, 吕百达. 离轴高斯-谢尔模型电磁光束的非傍轴传输[J]. *中国激光*, 2010, **37**(3): 726~732
- 9 Gao Zenghui, Lü Baida. Vectorial nonparaxial four-petal Gaussian beams and their propagation in free space[J]. *Chin. Phys. Lett.*, 2006, **23**(8): 2070~2073
- 10 Kailiang Duan, Baida Lü. Four-petal Gaussian beams and their propagation[J]. *Opt. Commun.*, 2006, **261**(2): 327~331
- 11 Bin Tang, Yi Jin, Meiping Jiang *et al.*. Diffraction properties of four-petal Gaussian beams in uniaxially anisotropic crystal[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2008, **6**(10): 779~781
- 12 Zhenjun Yang, Daquan Lu, Dongmei Deng *et al.*. Propagation of four-petal Gaussian beams in strongly nonlocal nonlinear media [J]. *Opt. Commun.*, 2010, **283**(4): 595~603
- 13 Jia Li, Yanru Chen, Yu Xin *et al.*. Diffraction properties of partially coherent electromagnetic four-petal Gaussian beams[J]. *Opt. Commun.*, 2010, **283**(16): 3105~3114
- 14 J. J. Wen, M. A. Breazeale. Diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams[J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1988, **83**(5): 1752~1756
- 15 Kailiang Duan, Baida Lü. Vectorial nonparaxial propagation equation of elliptical Gaussian beams in the presence of a rectangular aperture[J]. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 2004, **21**(9): 1613~1620
- 16 Baida Lü, Kailiang Duan. Nonparaxial propagation of vectorial Gaussian beams diffracted at a circular aperture[J]. *Opt. Lett.*, 2003, **28**(24): 2440~2442
- 17 Yaoju Zhang. Nonparaxial propagation analysis of elliptical Gaussian beams diffracted by a circular aperture [J]. *Opt. Commun.*, 2005, **248**(4-6): 317~326
- 18 Kang Xiaoping, He Zhong. Overview of Laser Beam Quality Evaluation [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Literature Press, 2007
- 康小平, 何仲. 激光光束质量评价概论 [M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 2007