

# 三孔干涉条件下部分相干电磁光束的偏振特性

陈凯 曹润秋 陆启生

(国防科学技术大学光电科学与工程学院, 湖南长沙 410073)

**摘要** 推导了三孔干涉条件下的交叉谱密度矩阵,研究了该条件下部分相干光偏振特性的变化情况。比较了  $x$ 、 $y$  方向场分量不相关和相关的情况,并与同样条件下双孔干涉的偏振度变化进行了对比。研究表明,偏振度在观察面上是振荡变化的,离中心越远振荡越剧烈;不同位置的偏振度传输足够长的距离后都将趋于稳定,其稳定值与参量  $B_{xy}$  和  $\delta_{xy}$  有关,且离中心越远其偏振度达到稳定的传输距离越长;轴上偏振度与三孔的初始相干度是密切相关的。特别指出,当  $x$ 、 $y$  方向场分量相关时,对应点偏振度的值远远大于其不相关的情况。

**关键词** 相干光学;偏振度;交叉谱密度矩阵;部分相干电磁光束;相关系数;初始相干度

**中图分类号** O436.3 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201138.0802004

## Polarization Properties of Partially Coherent Electromagnetic Beams in Three Points' Interference Pattern

Chen Kai Cao Jianqiu Lu Qisheng

(College of Optoelectronics Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

**Abstract** The cross-spectral density matrix in three points' interference pattern is derived, and the variation of polarization properties of partially coherent beams under this condition is given. A comparison between the cases of unrelated and related field components of  $x$ -direction and  $y$ -direction is studied, and compared with two points' interference pattern in the same conditions. It is shown that the degree of polarization is oscillating in the observation plane. The farther away from the center, the more intense the oscillation is. The degree of polarization at different positions tends to the stable value after a long-propagation distance, which is related to the parameters of  $B_{xy}$  and  $\delta_{xy}$ . The farther away from the center, the longer-propagation distance that the degree of polarization tends to be stable. The degree of polarization on the axes is closely related to the initial degree of coherence of three points. In particular, when field components of  $x$ -direction and  $y$ -direction are related, the degree of polarization at the corresponding point is much larger than the case of unrelated field components.

**Key words** coherence optics; degree of polarization; cross-spectral density matrix; partially coherent electromagnetic beams; correlation coefficient; initial degree of coherence

**OCIS codes** 030.1640; 260.3160; 260.5430

## 1 引言

自从相干偏振的统一理论<sup>[1]</sup>被提出后,激光偏振特性在传输过程中的变化情况受到越来越多的关注,其在激光雷达、遥感技术和光通信等领域的应用也越来越明显。由于绝对相干光和绝对非相干光是

不存在的,研究部分相干光的传输性质更具有现实意义。研究表明,部分相干光的偏振特性在传输过程中是变化着的,传输足够远的距离后趋于稳定;该偏振特性还与光源的相关性有关<sup>[2~13]</sup>。本文对双孔干涉实验进行了拓展,将小孔数目由两个增加到

收稿日期: 2011-03-01; 收到修改稿日期: 2011-04-02

作者简介: 陈凯(1986—),男,硕士研究生,主要从事高能激光技术方面的研究。E-mail: chenkaiz2@yahoo.cn

导师简介: 陆启生(1942—),男,教授,主要从事激光器以及激光与物质相互作用等方面的研究。

E-mail: luqsheng@public.cs.hn.cn

三个, 研究其偏振特性的变化特点, 其结果将有助于深入了解部分相干光由双孔干涉演变到光束传输过程中的变化特性。

## 2 理论分析

假设部分相干电磁光束沿  $z$  轴作近轴传输。在  $z=0$  的位置垂直于  $z$  轴放置屏  $A$ , 分别在屏  $A$  的  $Q(\rho_1)$ 、 $Q(\rho_2)$  和  $Q(\rho_3)$  处开三个小孔。光束通过这三个小孔传输到平行于屏  $A$  的观察面  $B$ ,  $P(r)$  为该面上的一个观察点(图 1)。

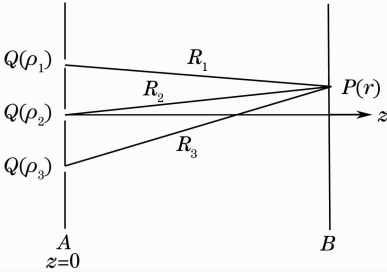


图 1 部分相干光三孔干涉示意图

Fig. 1 Illustration of the three points' interference pattern formed with partially coherent beams

屏  $A$  小孔处的光的统计特性可以由  $2 \times 2$  交叉谱密度矩阵<sup>[14]</sup>表示

$$\mathbf{W}(\rho_\alpha, \rho_\beta, \omega) = [\mathbf{W}_{ij}(\rho_\alpha, \rho_\beta, \omega)] = [\langle E_i^*(\rho_\alpha, \omega) E_j(\rho_\beta, \omega) \rangle], \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3; i, j = x, y) \quad (1)$$

式中  $E_x$  和  $E_y$  分别为  $(\rho, 0)$  处电场矢量  $\mathbf{E}(\rho, \omega)$  相互垂直的两个分量,  $*$  表示复共轭,  $\langle \rangle$  表示系综平均。同样, 观察点  $P(r)$  的交叉谱密度矩阵也可以表示为

$$\mathbf{W}(r, r, \omega) = [\mathbf{W}_{ij}(r, r, \omega)] = [\langle E_i^*(r, \omega) E_j(r, \omega) \rangle], \quad (i, j = x, y) \quad (2)$$

这里, 观察点  $P(r)$  处的电场矢量  $\mathbf{E}(r, \omega)$  也可以通过屏  $A$  上三个小孔的电场矢量  $\mathbf{E}(\rho_1, \omega)$ 、 $\mathbf{E}(\rho_2, \omega)$  和  $\mathbf{E}(\rho_3, \omega)$  表达

$$\mathbf{E}(r, \omega) = K_1 \mathbf{E}(\rho_1, \omega) + K_2 \mathbf{E}(\rho_2, \omega) + K_3 \mathbf{E}(\rho_3, \omega), \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (3)$$

式中  $K_\alpha$  为传播函数<sup>[12]</sup>, 可表示为

$$K_\alpha = -\frac{i}{\lambda} \frac{\exp(ikR_\alpha)}{R_\alpha} dS, \quad (4)$$

式中  $R_\alpha$  为观察点  $P(r)$  到屏  $A$  上第  $\alpha$  个小孔  $Q(\rho_\alpha)$  的距离,  $dS$  为小孔面积,  $\lambda$  为光波长,  $k$  为波数 ( $k = 2\pi/\lambda$ )。

将(3)式代入(2)式, 可以将观察点  $P(r)$  的交叉谱密度矩阵元  $W_{ij}(r, r, \omega)$  表示成屏  $A$  上三个小孔之间的交叉谱密度矩阵元  $W_{ij}(\rho_\alpha, \rho_\beta, \omega)$  的形式

$$W_{ij}(r, r, \omega) = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 K_1^* K_2 W_{ij}(\rho_\alpha, \rho_\beta, \omega), \quad (i, j = x, y) \quad (5)$$

为了研究三孔干涉的具体性质, 这里以高斯-谢尔模光束为研究对象。不妨设屏  $A$  上小孔  $Q(\rho_\alpha)$  处光谱强度的  $i$  成分为  $S_i(\rho_\alpha, \omega)$ , 小孔  $Q(\rho_\alpha)$  处电场矢量的  $i$  成分与小孔  $Q(\rho_\beta)$  处电场矢量的  $j$  成分的相关度为  $u_{ij}(\rho_\alpha - \rho_\beta, \omega)$ , 其相关表达式为<sup>[15]</sup>

$$S_i(\rho_\alpha, \omega) = A_i^2 \exp\left(-\frac{\rho_\alpha^2}{2\sigma_i^2}\right), \quad (\alpha = 1, 2, 3; i = x, y) \quad (6)$$

$$u_{ij}(\rho_\beta - \rho_\alpha, \omega) = B_{ij} \exp\left[-\frac{(\rho_\beta - \rho_\alpha)^2}{2\delta_{ij}^2}\right], \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3; i, j = x, y) \quad (7)$$

式中  $A_i$  表示光场  $i$  方向的振幅,  $\sigma_i$  表示光斑  $i$  方向的大小,  $B_{ij}$  表示光场  $i$  分量和  $j$  分量的相关系数,  $\delta_{ij}$  表示相关长度。参量  $A_i$ 、 $\sigma_i$ 、 $B_{ij}$  和  $\delta_{ij}$  均与位置无关, 只取决于频率  $\omega$ 。于是, 得到屏  $A$  上三个小孔之间的交叉谱密度矩阵元<sup>[15]</sup>

$$\mathbf{W}_{ij}(\rho_\alpha, \rho_\beta, \omega) = \sqrt{S_i(\rho_\alpha, \omega)} \sqrt{S_j(\rho_\beta, \omega)} \times u_{ij}(\rho_\beta - \rho_\alpha, \omega), \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3; i, j = x, y) \quad (8)$$

这里只考虑各向同性光源 ( $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ ), 光束  $x$  分量与  $y$  分量振幅相等 ( $A_x = A_y = A$ ), 并做如下假设<sup>[16]</sup>

$$B_{xx} = B_{yy} = 1, B_{xy} = B_{yx} = B_0, \quad (9a)$$

$$\delta_{xy} = \delta_{yx}, \quad (9b)$$

将(4)~(8)式代入(5)式, 则  $W_{ij}(r, r, \omega)$  可以表达为

$$W_{ij}(r, r, \omega) = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \frac{\cos[k(R_\beta - R_\alpha)] dS^2}{\lambda^2 R_\alpha R_\beta} A^2 B_{ij} \times \exp\left(-\frac{\rho_\alpha^2 + \rho_\beta^2}{4\sigma^2}\right) \exp\left[-\frac{(\rho_\beta - \rho_\alpha)^2}{2\delta_{ij}^2}\right], \quad (i, j = x, y) \quad (10)$$

根据相干度和光谱偏振度的定义, 得到三个小孔之间的初始相干度  $u_{\alpha\beta}(\rho_\alpha, \rho_\beta, \omega)$  和观察点的光谱偏振度  $P(r, \omega)$ <sup>[17]</sup>

$$u_{\alpha\beta}(\rho_\alpha, \rho_\beta, \omega) = \frac{\text{Tr}[\mathbf{W}(\rho_\alpha, \rho_\beta, \omega)]}{\sqrt{\text{Tr}[\mathbf{W}(\rho_\alpha, \rho_\alpha, \omega)]} \sqrt{\text{Tr}[\mathbf{W}(\rho_\beta, \rho_\beta, \omega)]}}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3; \alpha \neq \beta) \quad (11)$$

$$P(r, \omega) = \sqrt{1 - \frac{4\text{Det}[\mathbf{W}(r, r, \omega)]}{\{\text{Tr}[\mathbf{W}(r, r, \omega)]\}^2}}, \quad (12)$$

式中  $\text{Tr}$ ,  $\text{Det}$  分别表示交叉谱密度矩阵中的迹和秩。由上面推导得到的部分相干电磁高斯-谢尔模

型光束通过三个小孔后的交叉谱密度矩阵,可对观察点偏振度的变化行为进行研究。

### 3 数值计算

在数值模拟中,取波长和光斑大小分别为  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ,  $\sigma = 1 \text{ cm}$ 。为了方便与双孔干涉作比较,令孔  $Q(\rho_1)$  和  $Q(\rho_3)$  关于中心对称,孔  $Q(\rho_2)$  取在中心处,即三个小孔的位置分别为  $\rho_1 = -\rho_3 = \rho = 5 \text{ mm}$ ,  $\rho_2 = 0$ 。显然,当  $K_2 = 0$  时该三孔干涉就退化

为经典的双孔干涉。

首先考虑  $x, y$  方向的场分量不相关,即  $B_{xy} = B_{yx} = 0$  的情况。图 2 给出了不同距离处偏振度随发散角  $r/z$  的变化曲线图。图 2 参量选取为  $\delta_{xx} = 2 \text{ mm}$ ,  $\delta_{yy} = 1.5 \text{ mm}$ 。从图 2 可以看出,观察面上的偏振度是振荡变化的,离中心越远振荡越剧烈。此外,随着传输距离的增大,偏振度的相对关系也在变化:当  $z = 1 \text{ m}$  时轴上偏振度处于振荡低点,当  $z$  足够大时观察面上偏振度的相对关系趋于稳定。

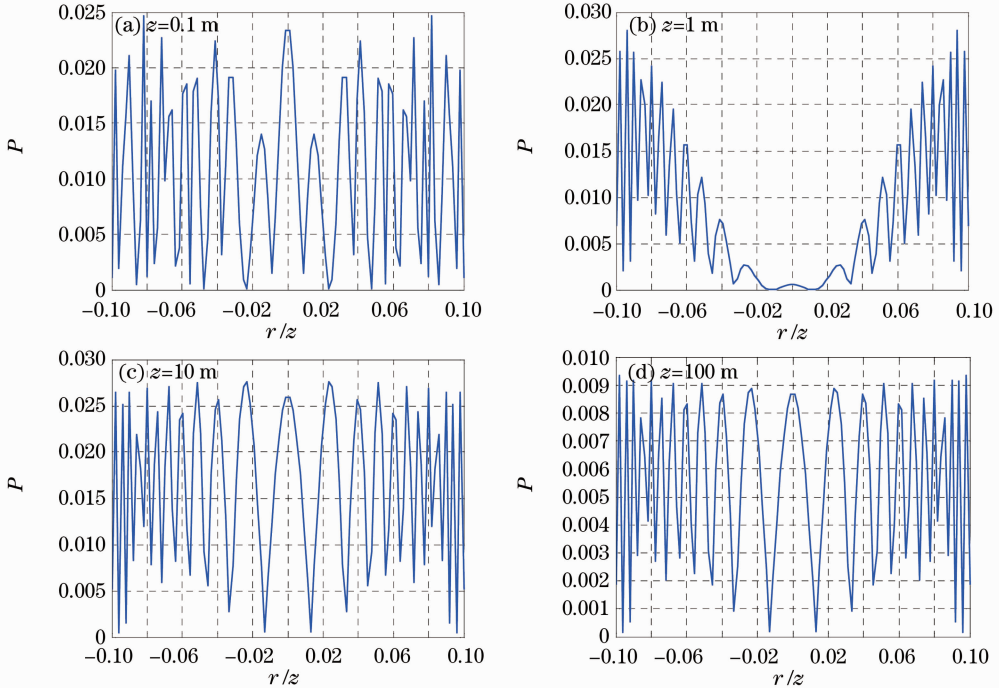


图 2 三孔干涉下不同距离处偏振度随发散角  $r/z$  的变化关系

Fig. 2 Variation of the degree of polarization with angle of divergence  $r/z$  at different distances in three points' interference pattern

图 3(a)和(b)分别给出了三孔干涉和双孔干涉不同位置的偏振度随传输距离的变化关系。图 4 则给出了不同  $\delta_{yy}/\delta_{xx}$  条件下三孔干涉轴上点的偏振

度随传输距离的变化关系。图 3 的参量选取为  $\delta_{xx} = 2 \text{ mm}$ ,  $\delta_{yy} = 1.5 \text{ mm}$ ;图 4 的参量选取为  $\delta_{xx} = 2 \text{ mm}$ ,  $\delta_{yy} = 1.5, 3, 4.5 \text{ mm}$ 。结果表明,不同位置的

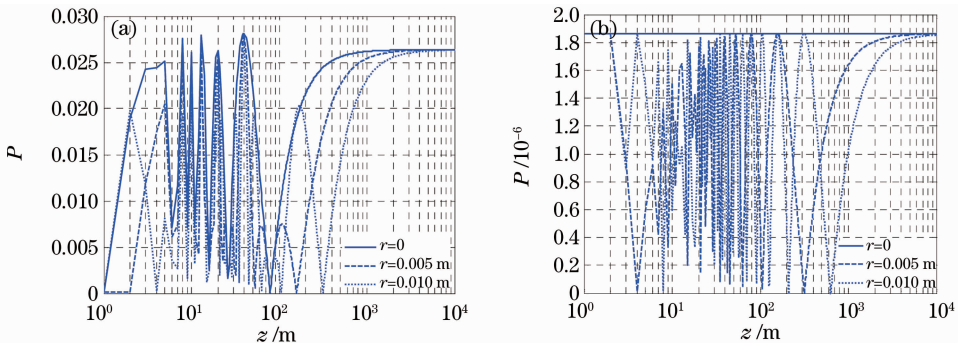


图 3 不同位置处偏振度随距离  $z$  的变化关系。(a)三孔干涉;(b)双孔干涉

Fig. 3 Variation of the degree of polarization with distance  $z$  at different positions.

(a) Three points' interference pattern; (b) two points' interference pattern

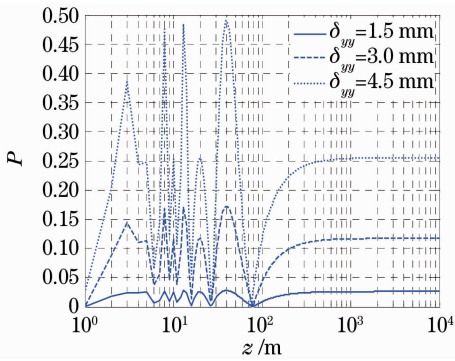


图 4 不同  $\delta_{yy}/\delta_{xx}$  条件下三孔干涉的轴上偏振度随距离  $z$  的变化关系

Fig. 4 Variation of the degree of polarization on the axes with distance  $z$  at different positions in three points' interference pattern for different values of  $\delta_{yy}/\delta_{xx}$

偏振度传输足够长的距离后都将到达稳定值,位置离中心越远其偏振度达到稳定值所需的距离越长。不同的是,三孔干涉的偏振度稳定值与其参量  $\delta_{yy}/\delta_{xx}$  有关;而双孔干涉的偏振度稳定值等于初始偏振度,并且其轴上偏振度传输不变。这是因为双孔干

涉的轴上点到两孔的光程差始终为 0,不受距离变化的影响;而三孔干涉由于多一个孔透光的关系,其到轴上点的光程差是随距离不断变化的。在对称双孔干涉的基础上,从中心孔透过的光束对其后面的光场也有一定的贡献,故其偏振度稳定值会与初始偏振度有所不同。

图 5(a)表明,  $u_{12}(\rho_1, \rho_2, \omega)$  与  $u_{13}(\rho_1, \rho_3, \omega)$  呈二次关系,这是因为这三个点光源均源于同一光束,它们之间的关系与孔间距有关。图 5(b)和(c)分别给出了三孔干涉和双孔干涉不同距离轴上偏振度与初始相干度  $u_{13}$  的关系。不难看出,三孔干涉中观察面距离越远,轴上偏振度随初始相干度  $u_{13}$  的振荡变化越平缓;而双孔干涉中,轴上偏振度和初始相干度  $u_{13}$  的关系与传输距离无关。由于对称双孔到轴上点的光程差始终为 0,该双孔光场的相干度对轴上偏振度的影响不随距离变化。对于三孔情况,中心孔透光的干扰将使轴上偏振度随对称孔光场的相干度振荡变化。当传输距离足够远时,变化关系与对称双孔情况相似,这是因为此时三个孔到轴上点的光程差近似为 0,中心孔透光的影响可以忽略。

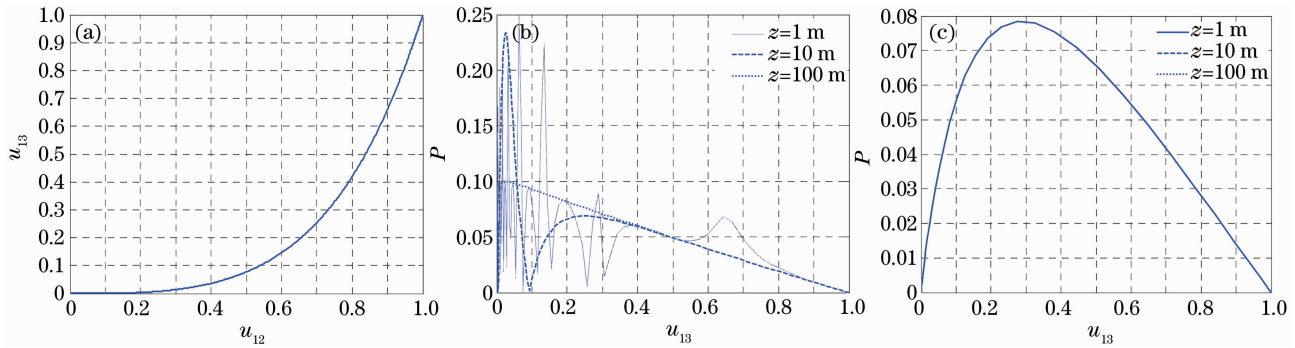


图 5 不同距离处轴上偏振度随初始相干度的变化关系。(a) 初始相干度  $u_{12}$  和  $u_{13}$  的关系;(b) 三孔干涉;(c) 双孔干涉

Fig. 5 Variation of the degree of polarization on the axes with initial degree of coherence at different distances. (a) The relations between the initial degree of coherence  $u_{12}$  and  $u_{13}$ ; (b) three points' interference pattern; (c) two points' interference pattern

为了不失一般性,接下来研究  $x$ 、 $y$  方向的场分量相关的情况,即  $B_{xy} = B_{yx} \neq 0$  的情况。图 6~9 给出了三孔干涉和双孔干涉两种情况下的变化关系:偏振度随发散角  $r/z$  的变化关系,偏振度随传输距离  $z$  的变化关系以及轴上偏振度与初始相干度  $u_{13}$  的变化关系。图 6 的参数取为  $B_{xy} = 0.3, \delta_{xx} = 2 \text{ mm}, \delta_{yy} = 1.5 \text{ mm}, \delta_{xy} = \delta_{yx} = 3 \text{ mm}$ 。显然,双孔干涉情况下偏振度随发散角  $r/z$  的振荡变化远没有三孔干涉时剧烈,说明在双孔的基础上增加一个孔对偏振度的振荡变化有影响。

同位置的偏振度随传输距离的变化关系。图 8 则给出了不同  $B_{xy}$ 、 $\delta_{xy}$  条件下三孔干涉轴上点的偏振度随传输距离的变化关系。图 7 的参量选取为  $B_{xy} = 0.3, \delta_{xx} = 2 \text{ mm}, \delta_{yy} = 1.5 \text{ mm}, \delta_{xy} = 3 \text{ mm}$ ;图 8 的参量选取为  $\delta_{xx} = 2 \text{ mm}, \delta_{yy} = 1.5 \text{ mm}$ , (a)  $\delta_{xy} = 3 \text{ mm}, B_{xy} = 0.1, 0.3, 0.5$ , (b)  $B_{xy} = 0.3, \delta_{xy} = 1, 3, 5 \text{ mm}$ 。结果表明,三孔干涉的偏振度稳定值还与相关系数  $B_{xy}$ 、互相关长度  $\delta_{xy}$  有关;相关系数  $B_{xy}$  影响偏振度的大小,而互相关长度  $\delta_{xy}$  影响偏振度振荡变化的剧烈程度。这也是当  $x$ 、 $y$  方向的场分量相关时,其偏振度比不相关时大得多的原因。

图 7 给出了三孔干涉和双孔干涉两种情况下不

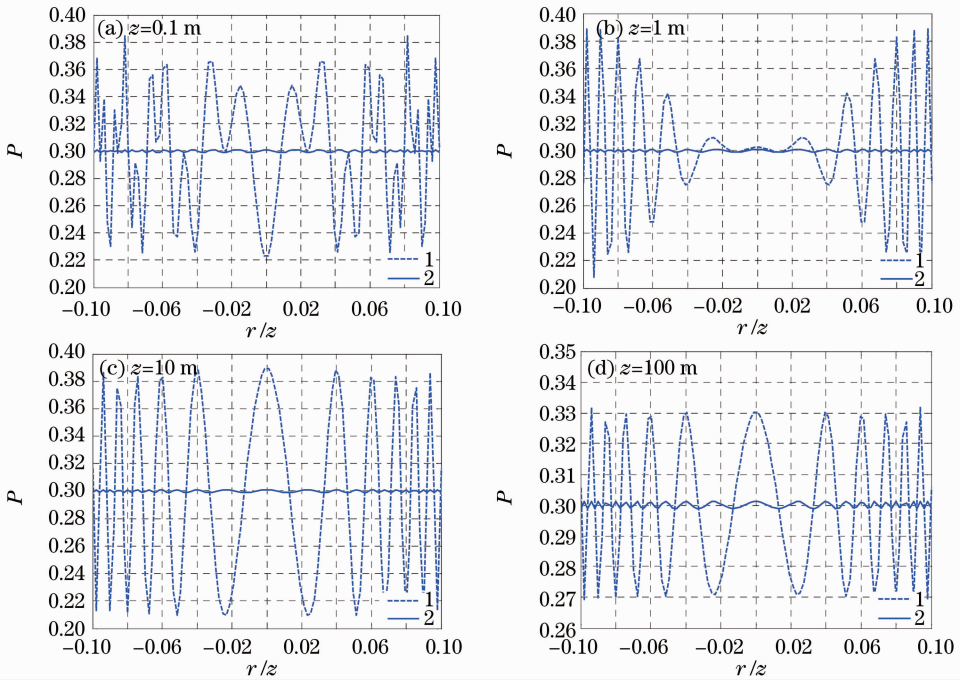


图 6 不同距离处偏振度随发散角  $r/z$  的变化关系(线 1 表示三孔干涉情况;线 2 表示双孔干涉情况)

Fig. 6 Variation of the degree of polarization with angle of divergence  $r/z$  at different distances (line 1 denotes the three points' interference pattern, line 2 denotes the Young's interference pattern)

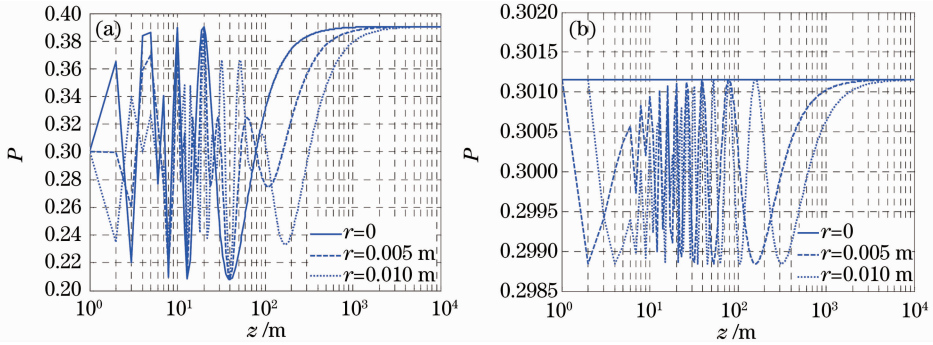


图 7 不同位置处偏振度随距离  $z$  的变化关系。(a)三孔干涉;(b)双孔干涉

Fig. 7 Variation of the degree of polarization with distance  $z$  at different positions.

(a) Three points' interference pattern; (b) two points' interference pattern

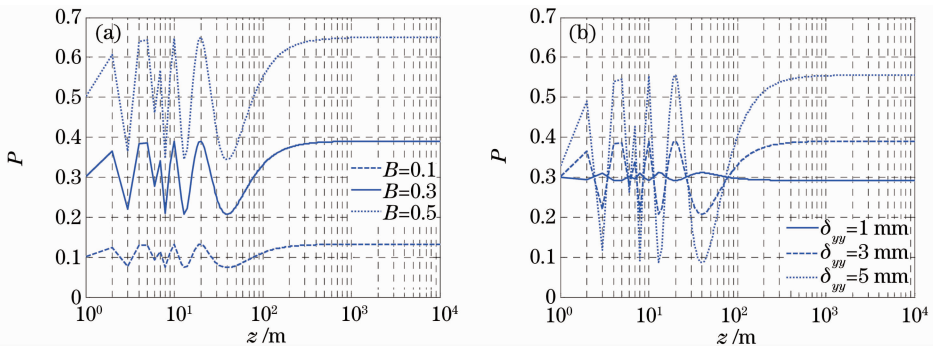


图 8 不同参数下三孔干涉的轴上偏振度随距离  $z$  的变化关系。(a)不同的  $B_{xy}$ ; (b)不同的  $\delta_{xy}$

Fig. 8 Variation of the degree of polarization on the axes with distance  $z$  at different positions in three points' interference pattern for different parameters. (a) Different  $B_{xy}$ ; (b) different  $\delta_{xy}$

图 9 给出了不同距离处偏振度随初始相干度的变化关系。不难发现,与  $x$ 、 $y$  方向的场分量不相关情况相似,三孔干涉中观察面距离越远,轴上偏振度

随初始相干度  $u_{13}$  的振荡变化越平缓;而双孔干涉中,轴上偏振度和初始相干度  $u_{13}$  的关系与传输距离无关。

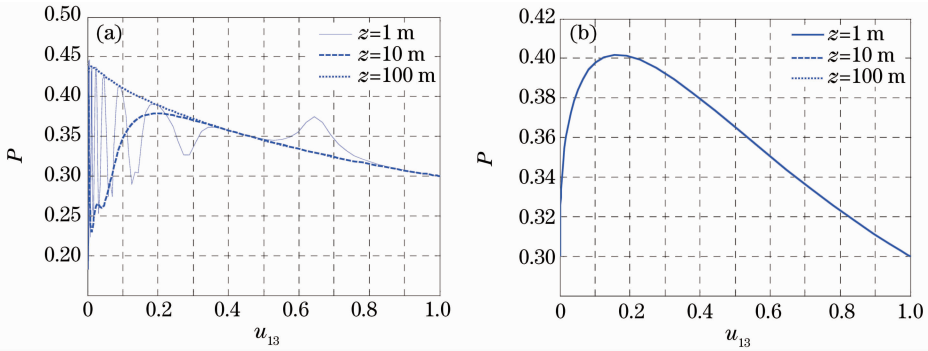


图 9 不同距离处偏振度随初始相干度的变化关系。(a)三孔干涉;(b)双孔干涉

Fig. 9 Variation of the degree of polarization on the axes with initial degree of coherence at different distances.

(a) Three points' interference pattern; (b) two points' interference pattern

## 4 结 论

以部分相干电磁高斯-谢尔模型光束为例,推导了三孔干涉条件下的交叉谱密度矩阵,研究了该条件下部分相干光偏振特性的变化情况。比较了  $x$ 、 $y$  方向场分量不相关和相关的情况,并与同样条件下双孔干涉的偏振度变化进行了对比。研究发现在双孔的基础上增加一个孔,将使偏振度的变化更为剧烈,其传输足够远距离后的稳定值也与初始偏振度不同,而是与参量  $B_{xy}$  和  $\delta_{xy}$  有关。特别指出,当  $x$ 、 $y$  方向场分量相关时,对应点偏振度的值远远大于其不相关的情况。

## 参 考 文 献

- 1 E. Wolf. Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams[J]. *Phys. Lett. A.*, 2003, **312**(5-6): 263~267
- 2 Mohamed Salem, Olga Korotkova, Aristide Dogariu *et al.*. Polarization changes in partially coherent electromagnetic beams propagating through turbulent atmosphere[J]. *Waves Random Media*, 2004, **14**(4): 513~523
- 3 Xiaoling Ji, Entao Zhang, Baida Lü. Changes in the spectrum and polarization of polychromatic partially coherent electromagnetic beams in the turbulent atmosphere [J]. *Opt. Commun.*, 2007, **275**(2): 292~300
- 4 Ji Xiaoling, Chen Senhui, Li Xiaoqing. Polarization properties of partially coherent electromagnetic Hermite-Gaussian beams in atmospheric turbulence[J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(1): 67~72

季小玲, 陈森会, 李晓庆. 部分相干电磁厄米-高斯光束通过湍流大气传输的偏振特性[J]. *中国激光*, 2008, **35**(1): 67~72

- 5 H. T. Eyyuboglu, Y. Baykal, Y. Cai. Degree of polarization for partially coherent general beams in turbulent atmosphere[J]. *Appl. Phys. B*, 2007, **89**(1): 91~97
- 6 Daniel F. V. James. Change of polarization of light beams on

- propagation in free space [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**(5): 1641~1643
- 7 Olga Korotkova, E. Wolf. Changes in the state of polarization of a random electromagnetic beam on propagation [J]. *Opt. Commun.*, 2005, **246**(3): 35~43
- 8 T. Shirai., Polarization properties of a class of electromagnetic Gaussian-Schell model beams which have the same far-zone intensity distribution as a fully coherent laser beam [J]. *Opt. Commun.*, 2005, **256**(4-6): 197~209
- 9 Ziyang Chen, Jixiong Pu. Degree of polarization in Young's double-slit interference experiment formed by stochastic electromagnetic beams[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2007, **24**(7): 2043~2048
- 10 Hema Roychowdhury, E. Wolf. Young's interference experiment with light of any state of coherence and of polarization[J]. *Opt. Commun.*, 2005, **252**(4-6): 268~274
- 11 F. Gori, M. Santarsiero, R. Borghi *et al.*. Effects of coherence on the degree of polarization in a Young interference pattern[J]. *Opt. Lett.*, 2006, **31**(6): 688~690
- 12 Yajun Li, Hungte Lee, E. Wolf. Spectra, coherence and polarization in Young's interference pattern formed by stochastic electromagnetic beams [J]. *Opt. Commun.*, 2006, **265**(1): 63~72
- 13 E. Wolf. Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light[M]. 1st ed., UK: Cambridge University Press, 2007. 191~194
- 14 E. Wolf. Correlation-induced changes in the degree of polarization, the degree of coherence, and the spectrum of random electromagnetic beams on propagation[J]. *Opt. Lett.*, 2003, **28**(13): 1078~1080
- 15 F. Gori, M. Santarsiero, G. Piquero *et al.*. Partially polarized Gaussian Schell-model beams[J]. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 2001, **3**(1): 1~9
- 16 H. Roychowdhury, O. Korotkova. Realizability conditions for electromagnetic Gaussian Schell-model sources [J]. *Opt. Commun.*, 2005, **249**(4-6): 379~385
- 17 Ji Jiarong. Advanced Optics Course-Fundamental Electromagnetic Theory[M]. Beijing: Science Press, 2007. 261~267

季家镛. 高等光学教程-光学的基本电磁理论[M]. 北京: 科学出版社, 2007. 261~267