

# 洛伦兹光束的 Wigner 分布函数及其应用

陈献亚<sup>1</sup> 余 泉<sup>1</sup> 蔡苗苗<sup>1</sup> 袁 孝<sup>2</sup> 丁桂林<sup>1</sup>

(<sup>1</sup>江苏大学机械工程学院, 江苏 镇江 212013  
<sup>2</sup>苏州大学现代光学研究所, 江苏 苏州 215104)

**摘要** 从 Wigner 分布函数定义和非涅耳衍射积分出发, 导出了洛伦兹光束在束腰参考面、自由空间任一参考面以及 ABCD 系统出射参考面的 Wigner 分布函数的解析表达式。作为其典型应用, 导出了洛伦兹光束二阶矩的解析表达式。数值模拟了束宽、发散角的变化规律并与相应的高斯光束参数的变化规律进行比较。结果表明洛伦兹光束比高斯型光束更适合作为二极管激光光束模型。

**关键词** 光束传输; Wigner 分布函数; 二阶矩; 洛伦兹光束; 二极管激光

**中图分类号** O435; TN012 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201138.0502013

## Wigner Distribution Function of Lorentz Beam and Its Application

Chen Xianya<sup>1</sup> Yu Quan<sup>1</sup> Cai Miaomiao<sup>1</sup> Yuan Xiao<sup>2</sup> Ding Guilin<sup>1</sup>

(<sup>1</sup>School of Mechanical Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, China)  
<sup>2</sup>Institute of Modern Optics, Soochow University, Suzhou, Jiangsu 215104, China)

**Abstract** Based on the definition of Wigner distribution function and Fresnel diffraction integral, the analytical expressions of Wigner distribution function of Lorentz beam on the waist plane, and on a plane in free space as well as on the exit reference plane of an ABCD system are derived. As their typical applications, the analytical expressions of the second-order moments of Lorentz beam are derived. The transformation rules of beam width and divergence angle of Lorentz beam are simulated and compared with those of the corresponding Gaussian beam. It is shown that Lorentz beam is a more appropriate model than Gaussian beam for diode laser beams.

**Key words** beam propagation; Wigner distribution function; second-order moments; Lorentz beam; diode laser

**OCIS codes** 010.3310; 350.5500; 140.2020

## 1 引 言

洛伦兹光束是随着二极管激光应用的日趋广泛深入应运而生的一种新的光束模型。1975 年 Dumke<sup>[1]</sup>利用具有洛伦兹分布的光束模型研究了二极管激光束的特性, 其结果比用高斯光束所得结果更为接近实际。1990 年 Naqwi 等<sup>[2]</sup>利用具有洛伦兹分布的光束模型研究了二极管激光束的远场分布, 得到了与实验较为符合的结果。2006 年 Gawharyand 等<sup>[3]</sup>正式提出了洛伦兹光束模型, 随后对其性质进行了研究<sup>[4]</sup>。近几年来, 有关洛伦兹

光束的特性及其近轴和非近轴传输特性的研究有了长足进步<sup>[5~14]</sup>。到目前为止, 公开报道的有关研究都以洛伦兹光束的场分布为对象并在此基础上讨论光束的强度分布、束宽、远场发散角和  $M^2$  因子等的变换规律。但是洛伦兹光束通过光学系统变换后, 其场分布包含了误差函数<sup>[15]</sup>, 这对于研究洛伦兹光束构成了相当大的限制。Wigner 分布函数和基于 Wigner 分布函数的二阶矩是研究光束及其传输特性的另一种重要方法<sup>[12]</sup>。关于洛伦兹光束的 Wigner 分布函数的研究还未见到公开报道。本文

收稿日期: 2010-12-20; 收到修改稿日期: 2011-03-09

基金项目: 江苏省重点实验室开放项目(KJS0902)资助课题。

作者简介: 陈献亚(1983—), 男, 硕士研究生, 主要从事激光束传输与控制等方面的研究。E-mail: yaandmiao@163.com

导师简介: 丁桂林(1957—), 男, 博士, 教授, 主要从事激光束传输、光学系统设计和非线性光学等方面的研究。

E-mail: guilinding@yahoo.com.cn

的主要工作就是研究洛伦兹光束的 Wigner 分布函数及其二阶矩的特性。导出洛伦兹光束的 Wigner 分布函数的解析表达式,并证明其通过一阶光学系统的传输变换公式。导出洛伦兹光束二阶矩的解析表达式,讨论其通过研究光学系统的变换规律。利用所得公式数值模拟比较洛伦兹光束和相应的高斯光束的传输变换特性,结果表明,洛伦兹光束比高斯光束更适合作为二极管激光束的模型。

## 2 洛伦兹光束通过一阶轴对称光学系统的传输特性

### 2.1 洛伦兹光束在光腰处的 Wigner 分布函数

建立笛卡尔直角坐标系  $oxz$ ,  $z$  轴沿光束传输方向。洛伦兹光束在  $z=0$  平面的场分布为<sup>[3]</sup>

$$U_1(x_1, 0) = \frac{E}{w_x} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x_1}{w_x}\right)^2\right]}, \quad (1)$$

式中  $E$  为归一化常数,  $w_x$  为洛伦兹光束在  $x$  方向的光腰半径,即  $x$  方向的半束宽。本文试图用(1)式定义的函数描述双异质结激光器输出面快轴方向的场分布,因此  $w_x$  取激活介质横向高度的一半,对于双异质结激光器这样的取值是符合其物理机制的。为得到洛伦兹光束的 Wigner 分布函数,将(1)式做傅里叶变换得到洛伦兹光束的频域空间场分布表达式:

$$U_1(u_1; 0) = E\pi \exp(-2\pi|u_1|w_x), \quad (2)$$

式中  $u$  为空间频率(按傅里叶变换规度因子和 Wigner 分布函数规度因子,光束传输过程中空间频率  $u$  和光束发散角  $\theta$  之间的关系为  $u = -\theta/\lambda$ , 这样所涉及的积分运算大为简化)。

Wigner 分布函数的定义为<sup>[15]</sup>

$$W(x, u) = \int_{-\infty}^{\infty} U\left(u + \frac{u'}{2}\right) U^*\left(u - \frac{u'}{2}\right) \exp(i2\pi x u') du'. \quad (3)$$

将(2)式代入(3)式得到洛伦兹光束的 Wigner 分布函数的积分表达式

$$W(x_1, u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} E^2 \pi^2 \exp\left(-2\pi\left|u_1 + \frac{u'_1}{2}\right|w_x - 2\pi\left|u_1 - \frac{u'_1}{2}\right|w_x + i2\pi x_1 u'_1\right) du'_1. \quad (4)$$

充分注意到被积函数中的绝对值符号,经过直接分

段函数积分运算,得到洛伦兹光束在光腰处的 Wigner 分布函数的解析表达式为

$$W(x_1, u_1) = \frac{E^2 \pi w_x^2 \exp(-4\pi w_x |u_1|)}{(w_x^2 + x_1^2)} \times \left[ \frac{\cos(4\pi x_1 u_1)}{w_x} + \frac{\sin(4\pi x_1 |u_1|)}{x_1} \right]. \quad (5)$$

### 2.2 洛伦兹光束通过自由空间的 Wigner 分布函数

洛伦兹光束通过自由空间传输时,频域空间任一参考面的场分布可由频域空间的 Collins 公式<sup>[16]</sup>

$$U_2(u_2) = \frac{i\lambda}{C} \int_{-\infty}^{\infty} U_1(u_1) \times \exp\left[-\frac{i\pi\lambda}{C}(Du_1^2 + Au_2^2 - 2u_1 u_2)\right] du_1, \quad (6)$$

$$U_2(u_2) = \frac{1}{D} \exp\left(-\frac{i\pi\lambda B}{D} u_2^2\right) U_1\left(\frac{u_2}{D}\right), \quad (C=0) \quad (7)$$

和自由空间系统矩阵

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

求出。将(2),(8)式代入(7)式,得到自由空间任一参考面处洛伦兹光束的场分布为

$$U_2(u_2; z) = E\pi^2 \exp(i\pi\lambda z u_2^2) \exp(-2\pi w_x |u_2|). \quad (9)$$

将(9)式代入(3)式,经过积分运算得到洛伦兹光束通过自由空间传输时,任一参考面处 Wigner 分布函数的解析表达式为

$$W(x_2, u_2) = \frac{E^2 \pi w_x^2 \exp(-4\pi w_x |u_2|)}{w_x^2 + (x_2 + \lambda z u_2)^2} \times \left\{ \frac{\cos[4\pi u_2 (x_2 + \lambda z u_2)]}{w_x} + \frac{\sin[4\pi |u_2| (x_2 + \lambda z u_2)]}{x_2 + \lambda z u_2} \right\}. \quad (10)$$

### 2.3 洛伦兹光束通过 ABCD 系统的 Wigner 分布函数

当洛伦兹光束通过一般一阶光学系统传输时,设由输入面到输出面的系统矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (11)$$

设输入面的洛伦兹光束由(10)式表示,其自变量改写为  $(x_1, u_1)$ , 将(11)式和改写后的(10)式代入 Wigner 分布函数定义式(3)式,利用  $\delta$  函数的性质,经过积分运算,得到出射面的 Wigner 分布函数的解析表达式为

$$W_2(x_2, u_2) = \frac{E^2 \pi w_x^2 \exp\left[-4\pi\left(w_x \left| \frac{C}{\lambda} x_2 + Au_2 \right| \right)\right]}{[w_x^2 + (Dx_2 + \lambda Bu_2)^2]} \times \left\{ \frac{1}{w_x} \cos\left[4\pi\left(\frac{C}{\lambda} x_2 + Au_2\right)(Dx_2 + \lambda Bu_2)\right] + \frac{1}{Dx_2 + \lambda Bu_2} \sin\left[4\pi\left|\frac{C}{\lambda} x_2 + Au_2\right|(Dx_2 + \lambda Bu_2)\right] \right\}. \quad (12)$$

(5), (10) 和 (12) 式分别是洛伦兹光束在束腰参考面、经过自由空间传输时任一参考面和经过一阶光学系统传输时出射参考面的 Wigner 分布函数的解析表达式。

### 3 洛伦兹光束的二阶矩

光束在任一参考面的二阶矩定义为<sup>[16]</sup>

$$\langle st \rangle = \frac{\int st W(x, u) dx du}{\int W(x, u) dx du}, \quad (13)$$

式中  $W(x, u)$  为 Wigner 分布函数,  $s = x, u; t = x, u$ 。

#### 3.1 光腰参考面的二阶矩

将光腰处洛伦兹光束的 Wigner 分布函数(5)式代入(13)式,有

$$\langle s_1 t_1 \rangle = \frac{\iint \frac{s_1 t_1 \exp(-4\pi w_x |u_1|)}{x_1^2 + w_x^2} \left[ \frac{\cos(4\pi x_1 |u_1|)}{w_x} + \frac{\sin(4\pi x_1 |u_1|)}{x_1} \right] dx_1 du_1}{\iint \frac{\exp(-4\pi w_x |u_1|)}{x_1^2 + w_x^2} \left[ \frac{\cos(4\pi x_1 |u_1|)}{w_x} + \frac{\sin(4\pi x_1 |u_1|)}{x_1} \right] dx_1 du_1}. \quad (14)$$

经过积分运算和化简得到

$$\langle x_1^2 \rangle = w_x^2, \langle u_1^2 \rangle = \frac{1}{8\pi^2 w_x^2}, \langle x_1 u_1 \rangle = 0, \quad (15)$$

或写为

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle x\theta_x \rangle \\ \langle \theta_x x \rangle & \langle \theta_x^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x^2 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2}{8\pi^2 w_x^2} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

式中  $\theta_x$  为光束的远场发散角, 这里  $\theta_x = -\lambda u$ 。众所周知, 光束的  $M^2$  因子的定义为

$$M^2 = \frac{4\pi}{\lambda} |\mathbf{V}|^{1/2}. \quad (17)$$

将(16)式代入(17)式, 得到光腰参考面的洛伦兹光束的  $M^2$  因子为

$$M^2 = \sqrt{2}. \quad (18)$$

#### 3.2 通过 ABCD 系统传输时的二阶矩

洛伦兹光束通过 ABCD 系统时, 出射参考面的二阶矩由(12)式表示的 Wigner 分布函数和由(13)式定义的二阶矩表达式求出。要求得二阶矩  $\langle x_2^2 \rangle$ , 将(12)式代入得到

$$\langle x_2^2 \rangle = \frac{\iint x_2^2 \frac{\exp(-4\pi w_x \left| \frac{C}{\lambda} x_2 + Au_2 \right|)}{(Dx_2 + \lambda Bu_2)^2 + w_x^2} \left\{ \frac{\cos[4\pi(C/\lambda x_2 + Au_2)(Dx_2 + \lambda Bu_2)]}{w_x} + \frac{\sin[4\pi|C/\lambda x_2 + Au_2|(Dx_2 + \lambda Bu_2)]}{Dx_2 + \lambda Bu_2} \right\} dx_2 du_2}{\iint \frac{\exp(-4\pi w_x \left| \frac{C}{\lambda} x_2 + Au_2 \right|)}{(Dx_2 + \lambda Bu_2)^2 + w_x^2} \left\{ \frac{\cos[4\pi(C/\lambda x_2 + Au_2)(Dx_2 + \lambda Bu_2)]}{w_x} + \frac{\sin[4\pi|C/\lambda x_2 + Au_2|(Dx_2 + \lambda Bu_2)]}{Dx_2 + \lambda Bu_2} \right\} dx_2 du_2}. \quad (19)$$

令  $p = \frac{C}{\lambda} x_2 + Au_2, q = Dx_2 + \lambda Bu_2$ , 则(19)式简化为

$$\langle x_2^2 \rangle = \frac{\iint \frac{(Aq - \lambda Bp)^2 \exp(-4\pi w_x |p|)}{w_x^2 + q^2} \left[ \frac{\cos(4\pi pq)}{w_x} + \frac{\sin(4\pi |p|q)}{q} \right] dp dq}{\iint \frac{\exp(-4\pi w_x |p|)}{w_x^2 + q^2} \left[ \frac{\cos(4\pi pq)}{w_x} + \frac{\sin(4\pi |p|q)}{q} \right] dp dq}. \quad (20)$$

(19)式与(14)式类似,直接积分得到

$$\begin{aligned} \langle x_2^2 \rangle &= A^2 \langle x_1^2 \rangle - 2\lambda AB \langle u_1 x_1 \rangle + \\ &\lambda^2 B^2 \langle u_1^2 \rangle = A^2 \omega_x^2 + \frac{\lambda^2 B^2}{8\pi^2 \omega_x^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

同理得到

$$\begin{aligned} \langle u_2^2 \rangle &= \frac{C^2}{\lambda^2} \langle x_1^2 \rangle - \frac{2CD}{\lambda} \langle x_1 u_1 \rangle + \\ D^2 \langle u_1^2 \rangle &= \frac{C^2}{\lambda^2} \omega_x^2 + \frac{D^2}{8\pi^2 \omega_x^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \langle x_2 u_2 \rangle &= \langle u_2 x_2 \rangle = -\frac{AC}{\lambda} \langle x_1^2 \rangle + (AD + BC) \times \\ &\langle x_1 u_1 \rangle - \lambda BD \langle u_1^2 \rangle = -\frac{AC}{\lambda} \omega_x^2 - \frac{\lambda BD}{8\pi^2 \omega_x^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

光束通过 ABCD 系统后二阶矩矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle x\theta_x \rangle \\ \langle \theta_x x \rangle & \langle \theta_x^2 \rangle \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} A^2 \omega_x^2 + \frac{\lambda^2 B^2}{8\pi^2 \omega_x^2} & AC \omega_x^2 + \frac{\lambda^2 BD}{8\pi^2 \omega_x^2} \\ AC \omega_x^2 + \frac{\lambda^2 BD}{8\pi^2 \omega_x^2} & C^2 \omega_x^2 + \frac{\lambda^2 D^2}{8\pi^2 \omega_x^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

利用(17)式得到洛伦兹光束通过 ABCD 系统后其  $M^2$  因子为

$$M^2 = \sqrt{2}. \quad (25)$$

若光束在自由空间传输,则为上述结果的特例。众所周知,光束的远场发散角  $\theta_{ax}$ ,光斑半径  $W_x$  和曲率半径  $R_x$  与光束二阶矩之间的关系为

$$\theta_{ax} = \sqrt{\langle \theta_x^2 \rangle}, \quad W_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle}, \quad R_x = \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle x\theta_x \rangle}. \quad (26)$$

当光束在自由空间传输距离  $z$  时,有

$$\begin{aligned} \theta_{ax} &= \sqrt{\frac{1}{8}} \frac{\lambda}{\pi \omega_x(0)}, \\ W_x(z) &= \omega_x(0) \sqrt{1 + (z/Z_R)^2}, \\ R_x &= Z_R \left( \frac{Z_R}{z} + \frac{z}{Z_R} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

式中

$$Z_R = \sqrt{8} \frac{\pi \omega_x(0)^2}{\lambda} \quad (28)$$

为洛伦兹光束的瑞利半径。(27)式描述了洛伦兹光束在  $x$  方向的远场发散角和自由空间传输距离  $z$  后的光斑半径和曲率半径。显然,洛伦兹光束的瑞利距离是具有相同光腰和波长的高斯光束瑞利距离的  $\sqrt{8}$  倍,洛伦兹光束的远场发散角是具有相同束腰半径和波长的高斯光束远场发散角的  $1/\sqrt{8}$ 。这说明

在自由空间传输时,洛伦兹光束光斑半径的展宽速度比高斯光束光斑半径的展宽速度小。光束的曲率半径与高斯光束的参数在自由空间传输时的变换公式具有相同的形式,不同之处在于瑞利距离。

为直观起见,举一典型数据例子说明如下:取  $\lambda = 0.8 \mu\text{m}$ ,  $\omega_x = 0.08 \mu\text{m}$ ,这是较为典型的双异质结激光器光束的波长和快轴横向尺寸<sup>[2]</sup>。将(28)式代入(27)式计算近场发散角,用  $\theta_L$  和  $\theta_G$  分别表示洛伦兹光束和高斯光束的发散角,当  $z = 0.03 \mu\text{m}$  时,  $\theta_L = 26.95^\circ$ ,  $\theta_G = 139.80^\circ$ ;当  $z = 0.07 \mu\text{m}$  时,  $\theta_L = 45.24^\circ$ ,  $\theta_G = 171.65^\circ$ 。二极管激光束的近场发散角范围为  $25^\circ \sim 45^\circ$ <sup>[2]</sup>。由此可见,高斯光束与二极管激光束的实际情况相差甚远,不适合作为二极管激光束的模型;而洛伦兹光束相比高斯光束更要接近于二极管激光束,更适合描述二极管激光器。

图 1 为洛伦兹光束与高斯光束在自由空间传输时光斑半径  $W_x(z)$  随传输距离  $z$  的变化比较,表明了自由空间传输时洛伦兹光束的光斑半径  $W_x(z)$  随  $z$  的扩展比高斯光束的慢。图 2 为洛伦兹光束与高斯光束在自由空间传输时,光束远场发散角  $\theta(z)$  随传输距离  $z$  的变化比较,可以看出在自由空间传输时,洛伦兹光束的发散角比高斯光束的发散角小。

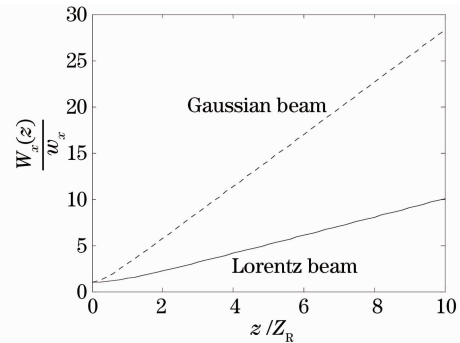


图 1 自由空间传输中光斑半径  $W_x(z)$  随  $z$  的变化

Fig. 1 Beam waist radius  $W_x(z)$  versus  $z$  in free-space

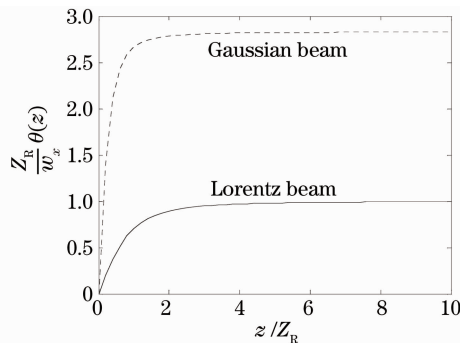


图 2 自由空间传输中光束发散角  $\theta(z)$  随  $z$  的变化

Fig. 2 Beam divergence  $\theta(z)$  versus  $z$  in free-space

## 4 结 论

导出了洛伦兹光束 Wigner 分布函数的解析表达式, 包括束腰参考面、自由空间任一参考面和 ABCD 系统出射参考面。导出了相应参考面处, 基于 Wigner 分布函数定义的洛伦兹光束二阶矩的解析表达式。讨论了洛伦兹光束光斑半径和远场发散角的传输规律。结果表明, 洛伦兹光束的瑞利距离是具有相同光腰和波长的高斯光束瑞利距离的 $\sqrt{8}$ 倍, 而洛伦兹光束的远场发散角是具有相同光腰和波长的高斯光束远场发散角的 $1/\sqrt{8}$ ; 在相同光腰和波长的情况下, 洛伦兹光束比高斯光束更适合描述尺寸小、发散性大的二极管激光光束。值得指出的是, 本文的工作仅限于近轴近似, 由于二极管激光器输出的光束具有较大的发散角, 近轴近似与实验可能有相当的误差。其解决方法是以近轴近似为基础, 研究非近轴情况下的 Wigner 分布函数和二阶矩, 相应的研究工作正在进行中。

### 参 考 文 献

- 1 W. P. Dumke. Angular beam divergence in double-heterojunction lasers with very thin active regions[J]. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1975, **QE-11**(7): 400~402
- 2 Amir Naqwi, Franz Durst. Focusing of diode laser beams: a simple mathematical-model[J]. *Appl. Opt.*, 1990, **29**(12): 1780~1785
- 3 Omar El Gawharyand, Sergio Severini. Lorentz beams and symmetry properties in paraxial optics[J]. *J. Opt. A: Pure and Appl. Opt.*, 2006, **8**(5): 409~414
- 4 Omar El Gawharyand, Sergio Severini. Lorentz beams as a basis for a new class of rectangularly symmetric optical fields[J]. *Opt. Commun.*, 2007, **269**(2): 274~284
- 5 Yang Jiong, Chen Tingting, Ding Guilin *et al.*. Focusing of diode laser beams: a partially coherent Lorentz model [C]. *SPIE*, 2008, **6824**: 68240A
- 6 Lu Qunying, Chen Tingting, Ding Guilin *et al.*. Propagation properties of Lorentz beam passing through first-order axisymmetric optical systems [J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(4): 539~543
- 7 Guoquan Zhou. Nonparaxial propagation of a Lorentz-Gauss beam[J]. *J. Opt. Soc. Am, B*, 2009, **26**(1): 141~147
- 8 Hong Yu, Linging Xiong, Baida Lü. Nonparaxial Lorentz and Lorentz-Gauss beams[J]. *Optik*, 2010, **121**(16): 1455~1461
- 9 Guoquan Zhou, Xiuxiang Chu. Average intensity and spreading of a Lorentz-Gauss beam in turbulent atmosphere [J]. *Opt. Express*, 2010, **18**(2): 726~731
- 10 Pu Zhou, Xiaolin Wang, Yangxing Ma *et al.*. Propagation properties of a Lorentz beam array [J]. *Appl. Opt.*, 2010, **49**(13): 2497~2503
- 11 Zhou Guoquan. Propagation of a Lorentz beam through an apertured misaligned paraxial optical system [J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **58**(9): 6185~6191
- 12 Liang Yiping, He Huawei, Xiong Lingling *et al.*. A partial-coherence model describing the far-field distribution of laser diode [J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(8): 2180~2184
- 13 Deng Qinghua, Ding Lei, He Shaobo *et al.*. Evaluating specifications on coupled pump distribution in LDA side-pumped rod gain medium [J]. *Chinese J. Lasers*, 2010, **37**(5): 1176~1181
- 14 Wen Du, Chengliang Zhao, Yangjian Cai. Propagation of Lorentz and Lorentz-Gauss beams through an apertured fractional Fourier transform optical system [J]. *Opt. Lasers Engng.*, 2011, **49**(1): 25~31
- 15 M. J. Bastiaans, The Wigner distribution function applied to optical signals and systems [J]. *Opt. Commun.*, 1978, **25**(1): 26~30
- 16 Zhongyong Liu, Xiuying Wu, Dianyuan Fan. Collins formula in frequency-domain and fractional Fourier transforms [J]. *Opt. Commun.*, 1998, **155**(1-3): 7~11