

聚焦高斯光束在湍流大气中的远场传输及相位补偿效果

贺元兴^{1,2,3} 姜文汉^{1,2} 李新阳^{1,2}

¹中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209
²中国科学院自适应光学重点实验室, 四川 成都 610209
³国防科学技术大学光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073

摘要 从广义惠更斯-菲涅耳原理出发, 将残留相位结构函数方法引入到计算部分相位补偿光束通过湍流大气的传播问题中, 计算圆孔截断聚焦高斯光束通过不同强度湍流大气的传播后, 传输系统的调制传递函数以及远场光强的分布, 采用接收面峰值斯特雷尔比作为衡量相位补偿效果的指标, 考察前若干低阶泽尼克像差校正对远场光斑质量的改善效果, 并与相应文献的计算结果进行了比较, 发现新方法得出的计算曲线与该文献的曲线基本吻合, 而且新方法在计算复杂性方面优于该文献的方法。对计算结果进行了分析讨论。

关键词 大气光学; 自适应相位补偿; 斯特雷尔比; 湍流大气

中图分类号 TP273.2; TN012 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201138.0312001

Far-Field Propagation of Focused Gaussian Beam through Atmospheric Turbulence and Effects of Adaptive Phase Compensation

He Yuanxing^{1,2,3} Jiang Wenhan^{1,2} Li Xinyang^{1,2}

¹Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China
²The Key Laboratory on Adaptive Optics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China
³College of Optoelectronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China

Abstract From the generalized Huygens-Fresnel principle, residual phase structure function method is used to calculate the modulation transfer function and far-field irradiance profile of a focused Gaussian beam blocked by a circular aperture through atmospheric turbulence, the Strehl ratio is a useful measure which is used here to evaluate the effects of several lower-order aberration modes corrections on the spot quality in the received plane, and the results derived here agree well with the results of correlation reference, moreover, the complexity of the new method used here is superior to the method used by correlation reference. The calculated results are analysed and discussed.

Key words atmospheric optics; adaptive phase compensation; Strehl ratio; atmospheric turbulence

OCIS codes 010.3310; 010.1285; 010.1300; 010.1330

1 引言

大气湍流介质折射率的随机变化使得通过其中的光波的波前产生畸变, 从而严重制约和影响了光束的传输效能和远场的光束质量。天文观测和激光大气传输是受其影响最大的两个领域^[1]。为了克服

大气湍流对光波波前的影响, 自适应光学技术被广泛应用于天文成像和高能激光传输领域, 通过接收并探测信标光(由目标本身或目标附近的自然导星、人造导星产生)所携带的大气湍流波前畸变信息, 利用传输后自适应相位补偿技术(对天文成像而言)或

收稿日期: 2010-08-12; 收到修改稿日期: 2010-10-25

作者简介: 贺元兴(1984—), 男, 博士研究生, 主要从事高能激光技术方面的研究。E-mail: yuanxing-he@163.com

导师简介: 姜文汉(1936—), 男, 研究员, 博士生导师, 主要从事自适应光学技术等方面的研究。

E-mail: adopse@ioe.ac.cn(通信联系人)

传输前自适应相位预校正技术(对高能激光传输而言),以改善天文成像的质量或高能激光束传输至远场平面光斑的质量^[2]。在天文成像方面,Fried^[3]曾计算过长曝光和短曝光(仅校正湍流倾斜像差)时成像系统的调制传递函数(MTF)以及不同湍流强度条件下像的分辨率;J. Y. Wang 等^[4,5]将 Fried 的工作进行了推广,计算了任意阶泽尼克波像差补偿后成像系统的调制传递函数及像的分辨率,并解决了 Fried 处理方法可能出现的过校正问题;文献[6]通过引入补偿相位后的残留相位结构函数,计算了任意阶泽尼克模式校正后成像系统的调制传递函数、像分辨率,并将计算结果与 J. Y. Wang 方法^[4,5]得到的曲线进行了对比,结果表明这两种不同的处理方法得到了十分吻合的计算结果,说明文献[6]的方法是完全可行的。本文将文献[6]的处理

方法应用到激光通过湍流大气的传输问题中,以圆孔截断聚焦高斯光束为例,计算了其通过不同强度湍流大气的远场光强分布,通过引入远场峰值斯特雷尔比,考察近场相位补偿对远场光斑质量的改善效果,并与文献[7]的处理方法所得到的相应曲线做了对比,发现两种方法的计算结果吻合得较好,而且本文所采用的新方法在计算量方面要明显小于文献[7]的方法,这为部分相位补偿光束在湍流大气中的传输计算提供了一种新的方法和思路。

2 理 论

对于有限孔径发射光束,在通过局地均匀、各向同性湍流大气传输距离 z 后到达接收平面,由广义惠更斯-菲涅耳原理,在近轴近似下,接收面上 P 点处的平均光强为^[8]

$$\langle I(\mathbf{P}, z) \rangle = \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 \int d^2 \boldsymbol{\rho} \exp[-i(k/z) \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{P}] \int \langle G\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right) G^*\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right) \rangle \times U\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right) U^*\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right) \exp[i(k/z) \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{r}] d^2 \mathbf{r}, \quad (1)$$

式中角括号 $\langle \rangle$ 表示统计平均值; $k = 2\pi/\lambda$ 为波数; $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 为发射孔径内任意两点的位置矢量; $G(\mathbf{r})$ 表示由发射孔径内 \mathbf{r} 点发出的球面波经湍流大气到达接收面上 P 点处光场的扰动量; $U(\mathbf{r})$ 为发射孔径内光波复振幅分布; (1) 式等号右边内部积分经归一化后为整个光传输系统总的调制传递函数

$$\langle \tau(\boldsymbol{\rho}) \rangle = A \int \langle G\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right) G^*\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right) \rangle \times U\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right) U^*\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right) \exp[i(k/z) \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{r}] d^2 \mathbf{r}, \quad (2)$$

式中 A 为归一化系数,使得 $\langle \tau(0) \rangle = 1$ 。

对于 Kolmogoroff 湍流,满足局地均匀、各向同性条件,在未进行波前相位补偿时,(2) 式等号右边被积函数中的摄动项可写为^[3]

$$\langle G\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right) G^*\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right) \rangle = \exp[-D(\boldsymbol{\rho})/2], \quad (3)$$

式中 $D(\boldsymbol{\rho})$ 为波结构函数,可表示为

$$D(\boldsymbol{\rho}) = D_i(\boldsymbol{\rho}) + D_\varphi(\boldsymbol{\rho}) = 6.88(\rho/r_0)^{5/3}, \quad (4)$$

式中 $D_i(\boldsymbol{\rho}), D_\varphi(\boldsymbol{\rho})$ 分别为对数振幅结构函数和相位结构函数;在近场区, $D \gg (\lambda z)^{1/2}$, 振幅波动可以忽略, $D_\varphi(\boldsymbol{\rho}) \approx D(\boldsymbol{\rho})$; 在远场区, $D \ll (\lambda z)^{1/2}$, 振幅波动不能忽

略, $D_\varphi(\boldsymbol{\rho}) \approx D(\boldsymbol{\rho})/2$; r_0 为大气湍流的相干长度。

将(3)式代入(2)式中,激光传输系统总的调制传递函数(MTF)可表示为无湍流扰动激光发射系统的 MTF 与大气湍流所对应的 MTF 之积

$$\langle \tau(\boldsymbol{\rho}) \rangle = \tau_0(\boldsymbol{\rho}) \exp[-D(\boldsymbol{\rho})/2], \quad (5)$$

式中无湍流扰动激光发射系统的 MTF 为

$$\tau_0(\boldsymbol{\rho}) = A \int U\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right) U^*\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right) \times \exp[i(k/z) \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{r}] d^2 \mathbf{r}. \quad (6)$$

如果激光发射前引入自适应光学相位补偿,采用泽尼克模式补偿法,假设前 N 阶泽尼克波像差被校正掉,不考虑一阶活塞像差,发射孔径内补偿相位分布为

$$\varphi_c(\mathbf{r}) = \sum_{i=2}^N a_i Z_i(\mathbf{r}), \quad (7)$$

式中 $Z_i(\mathbf{r})$ 为第 i 阶泽尼克多项式; a_i 为第 i 阶模式展开系数。

假设补偿相位分布满足局地均匀和各向同性条件,则经相位补偿后的激光传输系统总的 MTF 可表示为大气湍流所对应的 MTF 与衍射受限透镜 MTF 之积,只是大气湍流所对应的 MTF 的表达式中的使用经部分相位补偿后的残留相位结构函数代替相位结构函数,则经前 N 阶泽尼克模式补偿后,激光传输系统总的 MTF 可表示为

$$\langle \tau(\boldsymbol{\rho}) \rangle = \exp\{-[D_l(\rho) + D_N(\rho)]/2\} \tau_0(\boldsymbol{\rho}), \quad (8)$$

式中残留相位结构函数为 $D_N(\rho)$ [6]

$$D_N(\rho) = D_\varphi(\rho) - \sum_{i=2}^N \langle a_i^2 \rangle d_i(\rho/D) - 2 \sum_{i=2}^N \sum_{i'=i+1}^{i_{\max}} \langle a_i a_{i'} \rangle c_{i,i'}(\rho/D), \quad (9)$$

式中 D 为发射孔径的直径；考虑到对于相同的 i ，泽尼克系数之间的协方差 $\langle a_i a_{i'} \rangle$ 随 i' 增加而迅速减小，对(9)式右边二重求和项的求和上限已由 $+\infty$ 截断到 i_{\max} ；泽尼克像差系数之间的协方差 $\langle a_i a_{i'} \rangle$ 为 [5]

$$\langle a_i a_{i'} \rangle = \begin{cases} 0.0072 \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} (-1)^{(n+n'-2m)/2} [(n+1)(n'+1)]^{1/2} \pi^{8/3} \delta_{mm'} \times \\ \frac{\Gamma(14/3)\Gamma\left[\left(n+n'-\frac{5}{3}\right)/2\right]}{\Gamma\left[\left(n-n'+\frac{17}{3}\right)/2\right]\Gamma\left[\left(n'-n+\frac{17}{3}\right)/2\right]\Gamma\left[\left(n+n'+\frac{23}{3}\right)/2\right]}, & \text{for } (i-i') \text{ is even} \\ 0, & \text{for } (i-i') \text{ is odd} \end{cases} \quad (10)$$

式中 m, n 分别为第 i 阶泽尼克多项式的角向频率数和径向自由度；令 $u = \rho/D$ ，交叉模形状函数 $c_{i,i'}(u)$ 为 [6]：

$$c_{i,i'}(u) = 2\omega(u) \sum_{s'=0}^{n'-m} \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^{s'+s} (n'-s)! (n-s)! b}{s'! s! t_1! t_2! s_1! s_2!} \int [(x')^{n'-2s'} \cos(m\theta') - x^{n-2s} \cos(m\theta)] \times \\ [(x')^{n-2s} \cos(m\theta') - x^{n-2s} \cos(m\theta)] d^3 u', \quad (11)$$

式中 $b = [(n'+1)(n+1)]^{1/2}$ ； $s_1 = (n'+m)/2 - s'$ ； $s_2 = (n+m)/2 - s$ ； $t_1 = (n'-m)/2 - s'$ ； $t_2 = (n-m)/2 - s$ ；当 $i = i'$ 时，交叉模形状函数即为模形状函数 $d_i(u)$ 。

考察圆孔截断高斯光束经透镜聚焦后，通过湍流大气传播至远场焦平面的传输问题。假设高斯光束束腰所在平面位于发射平面上，初始发射光场的复振幅分布为

$$U(\mathbf{r}) = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{ik}{2f}\right)r^2\right], & |\mathbf{r}| \leq D/2 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (12)$$

式中 ω_0 为束腰半宽度，计算中取 $\omega_0 = D/\sqrt{2}$ ； f 为聚焦透镜的焦距。

由圆对称性， $\tau_0(\boldsymbol{\rho})$ ， $\tau(\boldsymbol{\rho})$ 仅依赖于 ρ ；将(9)式代入(8)式，并将空间频率归一化，得到自适应相位

补偿前 N 阶泽尼克波像差后激光传输系统总的 MTF 为

$$\langle \tau(u) \rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}D(u)\right] \exp\left[\frac{1}{2} \sum_{i=2}^N \langle a_i^2 \rangle d_i(u) + \sum_{i=2}^N \sum_{i'=i+1}^{i_{\max}} \langle a_i a_{i'} \rangle c_{i,i'}(u)\right] \tau_0(u), \quad (13)$$

式中无湍流扰动情况下传输系统的 MTF 可由(6)，(12)式得到

$$\tau_0(u) = \frac{2}{\pi(1-e^{-1})} \exp(-u^2) \int_0^{\pi/2} \{1 - \exp[-(-u \cos \theta + \sqrt{1-u^2 \sin^2 \theta})^2]\} d\theta, \quad (14)$$

为方便比较，给出 J. Y. Wang 等 [7] 所得到的空间频率未归一化的部分泽尼克模式补偿聚焦高斯光束远场传输系统的 MTF 的表达式

$$\langle \tau(\rho) \rangle = 4D^2 \exp\left[-\frac{1}{2}D(\rho)\right] \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{L(\theta)} r dr \exp\left[-4\left(\frac{r}{D}\right)^2 - \left(\frac{\rho}{D}\right)^2\right] \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{i=2}^N \langle a_i^2 \rangle \left[Z_i\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right) - Z_i\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right)\right]^2 + \sum_{i=2}^N \sum_{j=N+1}^{i_{\max}} \langle a_i a_j \rangle \left[Z_i\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right) - Z_i\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right)\right] \left[Z_j\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right) - Z_j\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right)\right]\right\}, \quad (15)$$

式中 $L(\theta) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{D}\right)\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{D}\right)\left[\left(\frac{\rho}{D}\right)^{-2} - \sin^2\theta\right]^{1/2}$ 。

不难看出，当未进行泽尼克像差补偿时，(13)，(15)式中的有限求和项均为 0，(13)，(15)式完全相同；当引入部分模式补偿后，本文所采用的(13)式相比于 J. Y. Wang 的表达式(15)，不需要计算十分复杂的数值积分，交叉模形状函数 $c_{i,i'}(u)$ 为多项式函数形式，因此只需计算有限项多项式函数的和以及简单的积分运

算。文献[9]列出了 $n \leq 6$ 时交叉模形状函数 $c_{i,r}(u)$ 的具体数学表达式,方便了应用。

在汉克变换下,由(1)式可得到远场焦面上的平均光强分布为

$$\langle I(\alpha, f) \rangle = \left(\frac{k}{2\pi f} \right)^2 \frac{1}{A'} \int_0^1 \langle \tau(u) \rangle J_0(2\alpha u) u du, \quad (16)$$

式中 A' 为与归一化系数 A 及发射孔径尺寸 D 有关的常数; $\alpha = kDP/(2f)$ 为接收平面上的归一化半径; $J_0(x)$ 为第一类零阶贝塞尔函数。

远场焦平面上归一化后的平均光强分布为

$$\langle I(\alpha, f) \rangle_n = \frac{\int_0^1 \langle \tau(u) \rangle J_0(2\alpha u) u du}{\int_0^1 \langle \tau_0(u) \rangle u du}, \quad (17)$$

在激光通过湍流大气的传输应用中,为了衡量近场相位补偿对远场光束质量的改善效果,斯特雷尔比是使用较多的衡量指标^[10],其定义为远场接收面上实际峰值光强与理想无湍流扰动情况下远场接收面峰值光强的比值

$$S_R = \frac{\int_0^1 \langle \tau(u) \rangle u du}{\int_0^1 \langle \tau_0(u) \rangle u du}. \quad (18)$$

3 数值计算与讨论

根据第 2 节所给出的理论模型,对圆孔截断聚焦高斯光束在湍流大气中的远场传输及相位补偿效果进行数值计算和讨论,并给出了 J. Y. Wang 方法得到的相应计算曲线作对比。

在没有进行近场相位补偿时, J. Y. Wang 的

MTF 表达式(15)和本文所采用的表达式(13)相同,两种方法将给出相同的计算结果。图 1 为圆孔截断聚焦高斯光束在不同强度湍流大气中传播至远场焦面,传输系统 MTF 曲线[图 1(a)]以及焦平面上的光强分布曲线[图 1(b)],湍流强度由归一化后的发射直径 D/r_0 衡量。图中分别计算了在 $D/r_0=0$ (在真空传输), 1, 2, 3 和 5 五种不同湍流强度的情况。从空间频率域来看,当湍流逐渐增强时,光束远场传输的空间截止频率将逐渐减小,当湍流强度达到 $D/r_0=5$ 时,发射光场空间频率只有低于 0.3 的组分才可以到达远场接收面,其余高频分量全部被截止不能到达远场;从空域来看,远场接收面上各点归一化的平均光强的峰值会随着湍流强度的增大而迅速降低,远场光斑迅速弥散,能量集中度降低。

图 2 为聚焦高斯光束通过强度 $D/r_0=2$ 的湍流大气传播至远场焦平面上,自适应相位补偿对传输系统 MTF[图 2(a1)]和焦平面光强分布[图 2(b1)]的补偿效果,同时给出了 J. Y. Wang 相应的计算曲线[图 2(a2), (b2)]。图中给出了相位未补偿、相位完全被补偿以及相位补偿分别到倾斜像差模式 ($N=3$)、离焦像差模式 ($N=4$)、像散像差模式 ($N=6$) 5 种情况相应的计算曲线。可以看出,本文采用的计算方法得到的结果与 J. Y. Wang 的计算曲线是一致的。对聚焦高斯光束的远场传输,相位补偿可以取得很好的校正效果,当补偿前 6 阶泽尼克像差后,接收面上光强斯特雷尔比将由未补偿时的不足 0.2 增加至 0.8 左右,当发射激光的波前相位畸变完全被补偿后,接收面上的光强分布即为无湍流扰动情况时真空传输情况下远场焦平面上的光强分布,并且传输系统 MTF 即为真空传输所对应的 MTF。

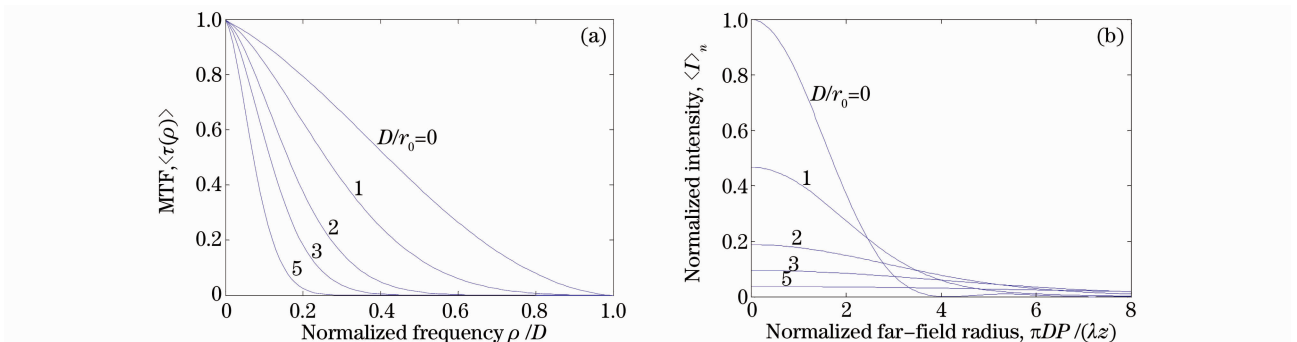


图 1 不同强度湍流大气中传输 MTF 及光强分布。(a) MTF 曲线, (b) 远场光强分布

Fig. 1 Modulation transfer functions and irradiance profiles for different turbulence strengths
(a) MTF curves, (b) far-field irradiance profiles

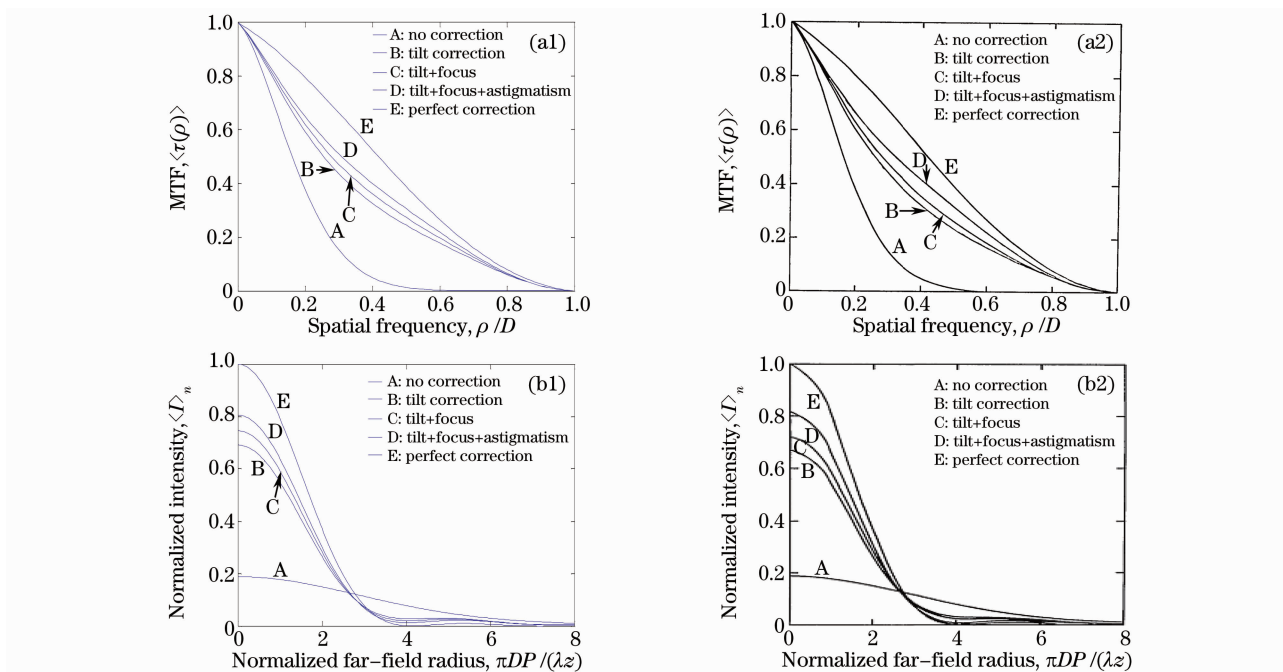

 图 2 相位补偿效果 ($D/r_0=2$)。(a)MTF 曲线,(b)远场焦平面光强分布

Fig. 2 Effects of phase compensation. (a) MTF curves, (b) far-field irradiance profiles

图 3 给出了圆孔截断聚焦高斯光束传播至远场焦平面,相位未补偿及相位补偿分别到倾斜像差模式($N=3$)、离焦像差模式($N=4$)、像散像差模式($N=6$)4 种情况下焦面上峰值斯特雷尔比随湍流强度 D/r_0 的变化曲线,图 3(a),(b)分别为本文所使用的新方法和 J. Y. Wang 方法的计算结果。不难看出,两种方法的计算结果吻合得较好。当湍流

较弱时,单独的倾斜校正就可以使近场接收面上峰值斯特雷尔比显著增加;随着湍流强度的进一步增加,仅补偿前若干低阶像差模式还无法显著改善近场接收面上峰值斯特雷尔比,要达到与弱湍流补偿相同的斯特雷尔比改善比,必须进行更高阶的像差校正。

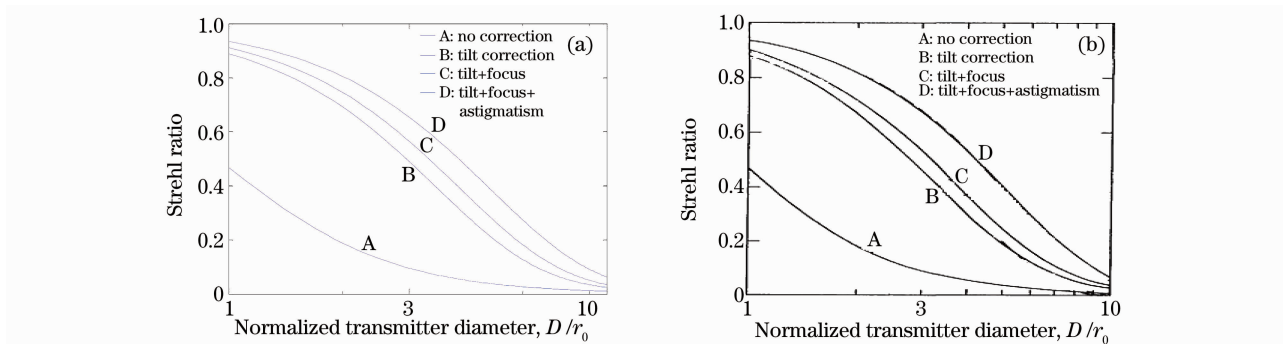


图 3 不同湍流强度下的自适应相位补偿效果

Fig. 3 Effects of adaptive phase compensation for different strengths of atmospheric turbulence

4 结 论

从广义惠更斯-菲涅耳原理出发,将残留相位结构函数方法引入到计算部分相位补偿光束通过大气湍流的传播问题中,计算了圆孔截断聚焦高斯光束通过不同强度湍流大气传播至远场焦平面,传输系统的调制传递函数以及远场光强的分布,采用峰值斯特雷尔比作为衡量远场光斑质量的参数,考察了

前若干低阶泽尼克像差校正对接收面光斑质量的改善效果,并与 J. Y. Wang 方法得到的相应计算曲线做了对比。从理论上讲,利用该方法可以计算任意阶泽尼克像差模式补偿后激光远场传输的 MTF 及远场光强分布,而且更重要的是,与 J. Y. Wang 的方法相比,该方法避免了计算十分复杂的数值积分,极大地减少了数值计算量。计算结果表

明,对圆孔截断聚焦高斯光束的远场传播情况,由于光波的振幅受大气湍流的扰动可以忽略,此时,在激光发射前引入自适应相位补偿能够取到理想的校正效果,当 $D/r_0=2$ 时,在前 6 阶像差模式校正后,远场焦面上峰值斯特雷尔比可达到 0.8 以上,对较强湍流,要达到相同的斯特雷尔比的改善,需要引入更高阶的像差校正才可以取得同样的校正效果;在湍流较弱时,倾斜补偿对远场光斑质量的改善贡献最大,当湍流逐渐增强时,倾斜像差的补偿效果没有较高阶像差的补偿效果明显。

参 考 文 献

- 1 John W. Hardy. Adaptive Optics for Astronomical Telescopes [M]. New York: Oxford University Press, 1998
- 2 Zhou Renzhong. Adaptive Optics[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1996
周仁忠. 自适应光学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1996
- 3 D. L. Fried. Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1966, **56**(10): 1372~1379
- 4 J. Y. Wang. Optical resolution through a turbulent medium with adaptive phase compensations[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**(3): 383~390
- 5 J. Y. Wang, J. K. Markey. Modal compensation of atmospheric turbulence phase distortion [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1978, **68**(1): 78~87
- 6 Guangming Dai. Modal compensation of atmospheric turbulence with the use of Zernike polynomials and Karhunen-Loève functions[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, **12**(10): 2182~2193
- 7 J. Y. Wang. Phase-compensated optical beam propagation through atmospheric turbulence[J]. *Appl. Opt.*, 1978, **17**(16): 2580~2590
- 8 R. F. Lutomirski, H. T. Yura. Propagation of a finite optical beam in an inhomogeneous medium [J]. *Appl. Opt.*, 1971, **10**(7): 1652~1658
- 9 Guangming Dai, Virendra N. Mahajan. Zernike annular polynomials and atmospheric turbulence[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2007, **24**(1): 139~155
- 10 Feng Guoying, Zhou Shouhuan. Discussion of comprehensive evaluation on laser beam quality[J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(7): 1643~1653
冯国英, 周寿桓. 激光光束质量综合评价的探讨[J]. *中国激光*, 2009, **36**(7): 1643~1653