

涡旋光束经叉形光栅的衍射特性

刘永欣^{1,2} 陈子阳¹ 蒲继雄¹

(¹华侨大学信息科学与工程学院, 福建 泉州 362021)
(²四川大学激光物理与化学研究所, 四川 成都 610064)

摘要 利用惠更斯-菲涅耳衍射积分以及叉形光栅的透射率函数, 推导出了涡旋光束经叉形光栅衍射后的解析表达式。详细研究了涡旋光束通过携带拓扑电荷数 l 的叉形光栅后的光强分布和拓扑电荷数。结果表明, 中心零级光斑和入射涡旋光束的拓扑电荷数 m 相同; 随着衍射级数 n 的变化, 衍射光斑的拓扑电荷数变为 $nl + m$ 。当满足 $nl + m = 0$ 时, 该 n 级光斑中心为平面波形的亮斑, 在此光斑两侧随着衍射级数的改变, 衍射光斑的空心半径逐渐增大。根据平面波光斑所在位置的级数 n 以及叉形光栅携带的拓扑电荷数 l , 由 $nl + m = 0$ 可确定入射涡旋光束的拓扑电荷数 m 。将计算结果与实验结果做了比较, 发现两者基本吻合。

关键词 衍射; 涡旋光束; 叉形光栅; 拓扑电荷数

中图分类号 O436.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201138.0302012

Diffraction Characteristics of Vortex Beams by a Fork-Shaped Grating

Liu Yongxin^{1,2} Chen Ziyang¹ Pu Jixiong¹

(¹College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Quanzhou, Fujian 362021, China)
(²Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China)

Abstract Based on the Huygens-Fresnel integral and the transmittance function of the fork-shaped grating, analytical expression of a vortex beam passing through a fork-shaped grating is derived. The diffraction characteristics of vortex beams by a fork-shaped grating embedded with topological charge l are studied in great detail. It is shown that the topological charge of the center spot of the diffracted beam is the same as that of the incident vortex beam, and that the topological charge of the n th diffracted beam is $nl + m$ with different diffraction order n . The n th diffracted beam spot is plane wave when it satisfies $nl + m = 0$. While on both sides of the plane wave spot, the doughnut radius of the diffracted beam spot increases as the diffraction order n changes. According to $nl + m = 0$, the topological charge of the incident vortex beam can be detected through the order n of the plane wave spot and the topological charge l embedded in the fork-shaped grating. The results are compared with the experimental results and it is found that they are both in good agreement.

Key words diffraction; vortex beam; fork-shaped grating; topological charge

OCIS codes 260.0260; 050.1940; 050.4865; 350.2770

1 引 言

近年来, 由于涡旋光束在光学诱捕、操纵微小粒子、新型超分辨光学显微镜及天文学等方面的应用^[1~3], 人们对涡旋光束的研究越来越关注^[4~7]。产生涡旋光束的方法很多, 可通过激光器的谐振腔和抽运方式、螺旋相位板(Spiral Phase Plate)^[8,9]以及计算全息术(Computer-Generated Hologram)^[10,11]等方法

产生带有角向相位因子 $\exp(i\theta)$ 的光涡旋, 其中 l 为拓扑电荷数 θ 为角度。计算全息术是通过带有 $\exp(i\theta)$ 相位因子的涡旋光束与平面波干涉形成叉形干涉图样, 该叉形干涉图样内含有拓扑电荷数为 l 的相位奇点, 当用平面波照射该全息图时, 再现的一级衍射光波就是含有 $\exp(i\theta)$ 相位因子的光学涡旋。而叉形干涉图样和光栅一样属于衍射光学元

收稿日期: 2010-08-30; 收到修改稿日期: 2010-10-31

基金项目: 国家自然科学基金(60977068, 10874125)资助课题。

作者简介: 刘永欣(1979—), 女, 博士, 讲师, 主要从事激光传输方面的研究。E-mail: niceyongxin@tom.com

件,于是通过利用高斯光束经叉形光栅衍射也可得到涡旋光束。2008年,Janicijevic等^[12]研究了高斯光束通过叉形光栅的非涅耳衍射和夫琅禾费衍射,发现 m 级衍射光束是带有 $\pm ml$ 拓扑电荷数的空心光束。Bekshaev等^[13,14]研究了高斯光束经叉形全息图衍射产生涡旋光束的空间特性,并在小角度衍射近似下研究了拉盖尔高斯光束经携带相位奇点的叉形全息图衍射后的传输特性,发现衍射光束带有光学涡旋^[15]。

2009年,Moreno等^[16]利用涡旋光束经叉形光栅后的衍射图样测量入射光束的拓扑电荷数,但未进行理论计算与模拟。本文在此基础上,利用惠更斯-菲涅耳衍射积分以及叉形光栅的透射率函数,推导出了涡旋光束经叉形光栅衍射后的解析表达式,

详细研究了涡旋光束通过叉形光栅后的衍射特性,分析了衍射光斑的光强分布和拓扑电荷数,并与实验结果做了比较。

2 理论分析

假设在源平面 $z=0$ 入射的涡旋光束为

$$E(r, \varphi, z = 0) = \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) \left(\frac{r}{w_0}\right)^m \exp(im\varphi), \quad (1)$$

式中 r 为源平面上的点离中心点的距离, φ 为源平面上的平面角, w_0 为光束宽度, m 为拓扑电荷数,取 $m = +1$ 。在 $z = 0$ 平面放置空间调制器,让涡旋光束经叉形全息图(即叉形光栅,如图1所示)衍射,其透射率函数可表示为^[12,16]

$$T_l(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp[-in(\gamma r \cos \varphi - l\varphi)] = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(inl\varphi) \exp(-in\gamma r \cos \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-inl\varphi) \exp(in\gamma r \cos \varphi), \quad (2)$$

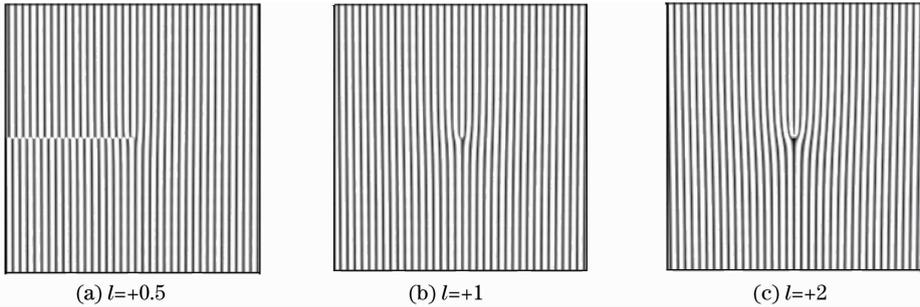


图1 带有相位因子 $\exp(il\theta)$ 的光涡旋与平面光波干涉形成的叉形全息图

Fig. 1 Fork-shaped hologram produced by the interference of the plane wave and the optical vortex with an azimuthal phase factor of $\exp(il\theta)$

式中 $C_0 = w/d, C_n = \frac{\sin(n\pi w/d)}{n\pi}, \gamma = \frac{2\pi}{d}, d$ 为光栅的周期常数, $w = 0.25d, l$ 是含在叉形全息图中的拓扑电荷数。

由惠更斯-菲涅耳衍射积分可得到涡旋光束通过叉形光栅衍射后的场为

$$E(\rho, \theta, z) = \frac{ik}{2\pi z} \exp\left[-ik\left(z + \frac{\rho^2}{2z}\right)\right] \iint E(r, \varphi, z = 0) T_l(r, \varphi) \exp\left\{-\frac{ik}{2z}[r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta)]\right\} r dr d\varphi, \quad (3)$$

式中 ρ 为观察面上点距中心点的距离, θ 为观察面上的平面角, $k = 2\pi/\lambda$ 为波数。将(1),(2)式代入(3)式,利用参量变换及积分公式^[17]

$$\int_0^{2\pi} \exp[ia\cos(\varphi - \theta)] \exp(\pm in\varphi) d\varphi = 2\pi J_n(a) \exp\left[in\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right)\right], \quad (4)$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-ar^2) J_n(br) r^{n+1} d\varphi = \frac{b^n}{(2a)^{n+1}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right), \quad (\text{Re } a > 0, \text{Re } n > -1) \quad (5)$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-ar^2) J_n(br) r^{n+1} d\varphi = \frac{b^n \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right)}{2^{n+1} a^{(m+n+1)/2} \Gamma(n+1)} {}_1F_1\left(\frac{m+n+1}{2}, n+1, -\frac{b^2}{4a}\right).$$

(Re $a > 0$, Re $(m+n) > -1$)

(6)

计算可得到涡旋光束 ($m = +1$) 经叉形光栅衍射后观察平面 z 处的场分布

$$E(\rho, \theta, z) = \frac{ik}{z\omega_0} \exp\left[-ik\left(z + \frac{\rho^2}{2z}\right)\right] \left\{ iC_0 \exp(i\theta) \frac{k\rho}{4z^2 a} \exp\left(-\frac{k^2 \rho^2}{4z^2 a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left[i(nl+1)\left(\frac{\pi}{2} + \theta_{-n}\right)\right] \frac{(k\rho_{-n})^{nl+1} \Gamma\left(\frac{nl+4}{2}\right)}{2(2z)^{nl+1} a^{(nl+4)/2} \Gamma(nl+2)} {}_1F_1\left(\frac{nl+4}{2}, nl+2, -\frac{k^2 \rho_{-n}^2}{4z^2 a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left[i(nl-1)\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{+n}\right)\right] \frac{(k\rho_{+n})^{nl-1} \Gamma\left(\frac{nl+2}{2}\right)}{2(2z)^{nl+1} a^{(nl+2)/2} \Gamma(nl)} {}_1F_1\left(\frac{nl+2}{2}, nl, -\frac{k^2 \rho_{+n}^2}{4z^2 a}\right) \right\},$$

(7)

式中 $J_n(\cdot)$ 为 n 阶贝塞尔函数, $\Gamma(\cdot)$ 为伽玛函数, ${}_1F_1$ 表示合流超几何函数,

$$a = \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{ik}{2z},$$

$$\theta_{\pm n} = \arctan\left[\frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta \pm (n\lambda z)/d}\right],$$

$$\rho_{\pm n} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{n\lambda z}{d}\right)^2} \pm 2 \frac{n\lambda z}{d} \cos \theta.$$

由(7)式可以看出观察平面的光场是由各级衍射场叠加形成的。零级对应的场含有 $\exp(i\theta)$ 项, 可见零级光斑的拓扑电荷数为 +1, 与入射涡旋光束的拓扑电荷数相同; 而负 n 级对应的场含有 $\exp[i(-nl+1)\theta_{+n}]$ 项, 正 n 级对应的场含有 $\exp[i(nl+1)\theta_{-n}]$ 项, 可见各级光斑的拓扑电荷数随着 n 级的不同而改变。

3 数值计算与模拟

利用 Mathematica 软件以及(7)式可计算模拟出观察平面上的衍射光斑光强分布, 若无特殊说明, 计算参数取 $\omega_0 = 1 \times 10^{-3}$ m, $\lambda = 632.8 \times 10^{-9}$ m, $d = 1.4 \times 10^{-4}$ m。图 2 是涡旋光束 ($m = +1$) 经叉形光栅 ($l = +1$) 衍射后观察平面 $z = 1.0$ m 的衍射光斑光强及对应光斑相位分布。由图 2(a) 可知, 涡旋光束 ($m = +1$) 经叉形光栅 ($l = +1$) 衍射后, -1 级衍射光斑中心为亮斑, 在此光斑两侧随着衍射级数的改变, 衍射光斑的空心半径逐渐增大。由图 2(c) $n = 0$ 对应光斑的相位图可看出, 中心零级光斑是拓扑电荷数为 +1 的空心光斑, 与入射涡旋光束的拓扑电荷数相同。而在中心光斑两侧, 例如 $n = -1$ 时, 该级衍射光斑中心为亮斑, 由图 2(b) 对应的相位图可看出其为平面波; $n = +1$ 时, 该级衍射光

斑也为空心光斑, 由图 2(d) 对应的相位图可看出内嵌的拓扑电荷数为 +2, 是由两个独立的拓扑电荷数为 +1 的奇点组成的。同理, $n = -2$, +2 对应的衍射光斑的拓扑电荷数分别为 -1, +3。可见, 随着衍射级数 n 的变化, 光斑的拓扑电荷数变为 $nl + m$ 。而且随着拓扑电荷数的增加, 衍射光斑的空心半径逐渐增大。

图 3, 4 分别是涡旋光束 ($m = +1$) 经叉形光栅 ($l = +1$) 衍射后观察平面 $z = 1.4$ m, 0.7 m 的衍射光斑光强及对应光斑相位分布。比较图 4(a), 图 2(a) 和图 3(a) 可以看出, 随着传输距离的增大, 相邻衍射光斑间的距离变大, 但各级光斑的拓扑电荷数保持不变。当 $z = 0.7$ m 时, 由于相邻光斑的距离较小, 光斑边缘之间发生干涉, 从而中心光斑的相位边缘出现波纹, 如图 4(c) 所示。

图 5 是涡旋光束 ($m = +1$) 经叉形光栅 ($l = +1$) 衍射后不同距离观察平面处 x 轴上的光强分布。由图 5(a) 可看出, 由于相邻光斑的边缘干涉, 光斑之间出现振荡的干涉条纹。随着传输距离增大, 相邻光斑之间的距离也变大, 相邻光斑的边缘干涉现象消失, 光强趋于平滑分布。比较图 5(a), (d) 中的 -1 级平面波光斑的光强分布发现, 随着传输距离变大, 光强的分布趋于中心集中分布, 当传输到一定距离后, 该中心光斑的强度大于零级光斑的最大强度。

4 实验分析

实验装置如图 6 所示, 氩氦激光器发出波长为 632.8 nm 的激光束, 经过扩束系统后变成准平面波。准平面光波照射到螺旋相位板 (SPP) 上, 形成

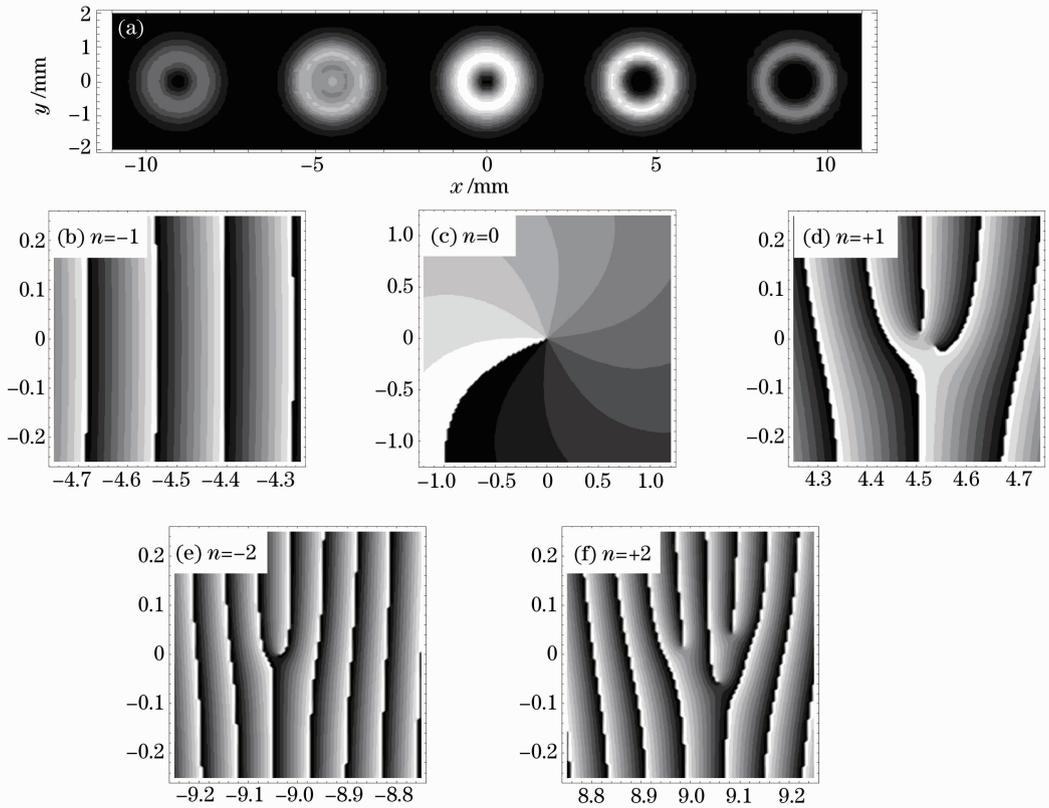


图 2 涡旋光束($m=+1$)经叉形光栅($l=+1$)衍射后观察平面 $z=1.0$ m 的衍射光斑光强分布(a)及对应光斑相位分布(b)~(f)

Fig. 2 Diffraction pattern of the vortex beam ($m=+1$) diffracted by a fork-shaped grating ($l=+1$) at the plane of $z=1.0$ m (a) and the corresponding phase distributions for the diffracted beam spots (b)~(f)

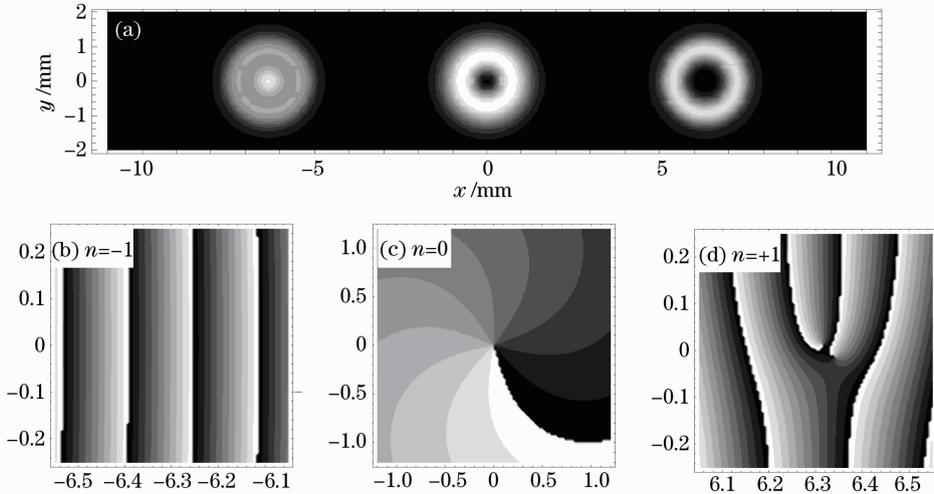


图 3 涡旋光束($m=+1$)经叉形光栅($l=+1$)衍射后观察平面 $z=1.4$ m 的衍射光斑光强分布(a)及对应光斑相位分布(b)~(d)

Fig. 3 Diffraction pattern of the vortex beam ($m=+1$) diffracted by a fork-shaped grating ($l=+1$) at the plane of $z=1.4$ m (a) and the corresponding phase distributions for the diffracted beam spots (b)~(d)

拓扑电荷数为 m 的涡旋光束,再照射到加载了全息片[例如图 1(b),(c)]的空间光调制器(SLM)上,即涡旋光束经叉形光栅衍射,在观察平面观察衍射光斑分布。图 7 是用照相机采集下的信息,图 7(a),

(b)分别是拓扑电荷数为 ± 1 的涡旋光束经叉形光栅($l=+1$)衍射后观察平面的衍射光斑分布。由图 7(a)可知,平面波亮斑的衍射级 $n=-1$,而叉形光栅携带的拓扑电荷数 $l=+1$,根据 $nl+m=0$ 可

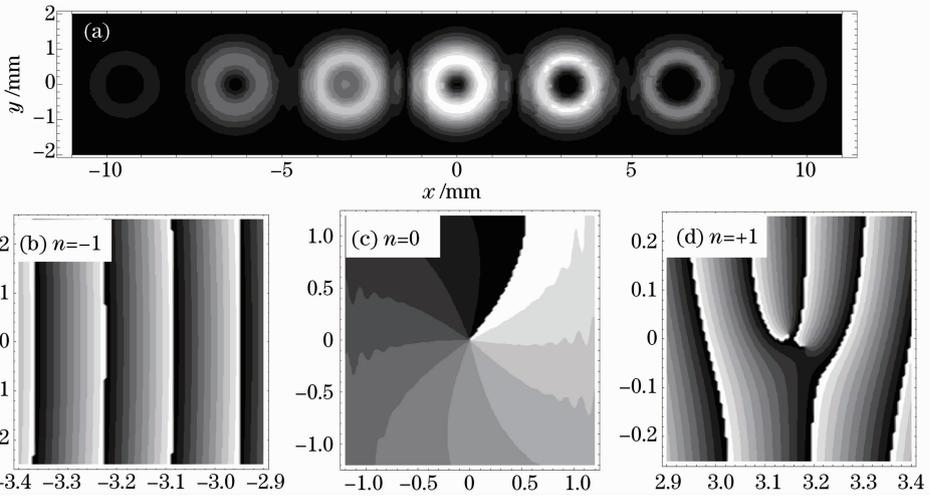


图 4 涡旋光束($m=+1$)经叉形光栅($l=+1$)衍射后观察平面 $z=0.7$ m 的衍射光斑光强分布(a)及对应光斑相位分布(b)~(d)

Fig. 4 Diffraction pattern of the vortex beam ($m=+1$) diffracted by a fork-shaped grating ($l=+1$) at the plane of $z=0.7$ m (a) and the corresponding phase distributions for the diffracted beam spots (b)~(d)

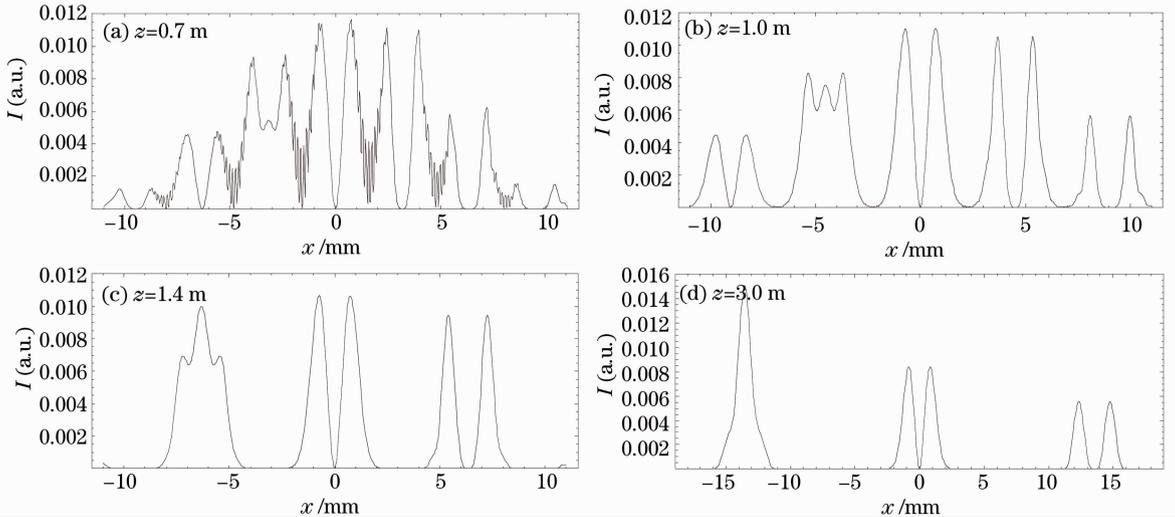


图 5 涡旋光束($m=+1$)经叉形光栅($l=+1$)衍射后不同距离观察平面处 x 轴上的光强分布

Fig. 5 Intensity distributions in the x axis of the vortex beam ($m=+1$) diffracted by a fork-shaped grating ($l=+1$) at different planes

确定入射涡旋光束的拓扑电荷数 $m=+1$ 。同理,可由图 7(b)确定入射涡旋光束的拓扑电荷数 $m=-1$ 。比较图 7(a)与图 4(a)发现理论计算和实验结果相吻合,在平面波光斑两侧随着衍射级数的改变,衍射光斑的空心半径逐渐增大。

图 8 是照相机采集的涡旋光束经叉形光栅衍射后观察平面的衍射光斑分布。根据平面波光斑所在位置的级数 n 以及叉形光栅携带的拓扑电荷数 l ,由 $nl+m=0$ 可确定入射涡旋光束的拓扑电荷数 $m=-2$ 。

5 结 论

利用惠更斯-菲涅耳衍射积分以及叉形光栅的透射率函数,推导出了涡旋光束经叉形光栅衍射后的解析表达式。对该表达式进行数值模拟发现,中心零级光斑和入射涡旋光束的拓扑电荷数 m 相同;随着衍射级数 n 的变化,衍射光斑的拓扑电荷数变为 $nl+m$ 。当满足 $nl+m=0$ 时,该 n 级光斑中心为平面波形的亮斑,在此光斑两侧随着衍射级数的改变,衍射光斑的空心半径逐渐增大。根据平面波光斑所在位置的级数 n 以及叉形光栅携带的拓扑电荷数

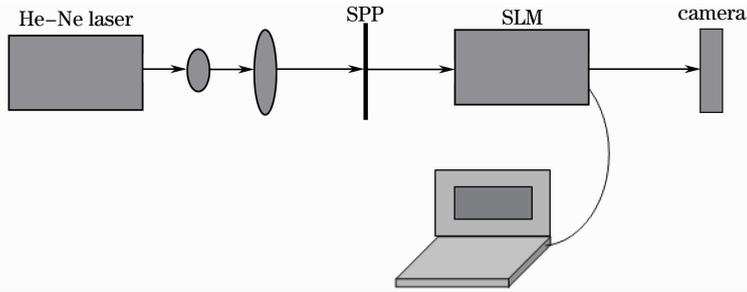


图 6 实验装置示意图

Fig. 6 Schematic of the experimental setup

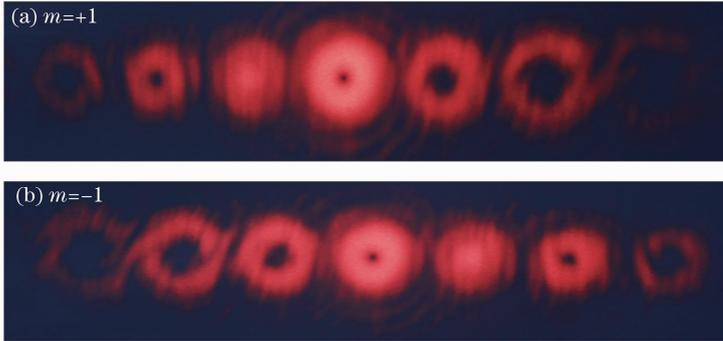


图 7 涡旋光束经叉形光栅($l=+1$)衍射后观察平面的衍射光斑分布(实验结果)

Fig. 7 Diffraction patterns of the vortex beams diffracted by a fork-shaped grating ($l=+1$) (experimental results)

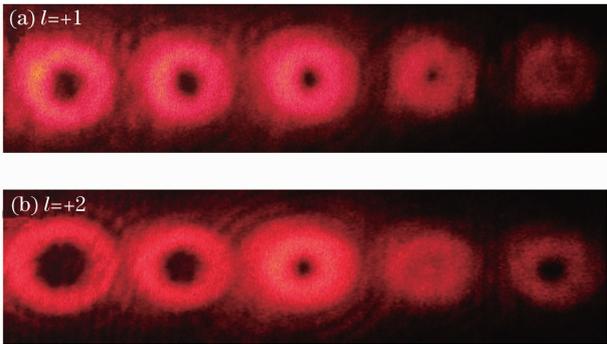


图 8 涡旋光束经叉形光栅衍射后观察平面的衍射光斑分布(实验结果)

Fig. 8 Diffraction patterns of the vortex beams diffracted by a fork-shaped grating (experimental results)

l , 由 $nl + m = 0$ 可确定入射涡旋光束的拓扑电荷数 m 。将数值模拟结果与实验结果做了比较,发现两者基本吻合。

参 考 文 献

- 1 Gregory Foo, David M. Palacios, Grover A. Swartzlander, Jr. . Optical vortex coronagraph[J]. *Opt. Lett.*, 2005, **30** (24): 3308~3310
- 2 Jae Hoon Lee, Gregory Foo, Ehe G. Johnson *et al.*. Experimental verification of an optical vortex coronagraph[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, **97**(5): 053901
- 3 V. Westphal, S. W. Hell. Nanoscale resolution in the focal plane of an optical microscope[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, **94**(14): 143903
- 4 C. S. Guo, X. Liu, J. L. He *et al.*. Optimal annulus structures

- of optical vortices[J]. *Opt. Express*, 2004, **12**(19): 4625~4634
- 5 Y. D. Liu, C. Q. Gao, X. Q. Qi *et al.*. Orbital angular momentum spectrum correction in free space optical communication[J]. *Opt. Express*, 2008, **16**(10): 7091~7101
- 6 He De, Yan Hongwei, Lü Baida. Evolution and composite optical vortices of Hermite-Gaussian vortex beams[J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(8): 2023~2029
- 何 德, 闫红卫, 吕百达. 厄米-高斯涡旋光束形成的合成光涡旋及演化[J]. *中国激光*, 2009, **36**(8): 2023~2029
- 7 Wang Hao, Yang Dexing, Gan Xuetao *et al.*. Analysis of interference of planar vortex beams[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(2): 517~522
- 王 浩, 杨德兴, 甘雪涛 等. 平面涡旋光干涉的分析[J]. *光学学报*, 2009, **29**(2): 517~522
- 8 M. W. Beijersbergen, R. P. C. Coerwinkel, M. Kristensen *et al.*. Helical-wave-front laser-beams produced with a spiral phase plate[J]. *Opt. Commun.*, 1994, **112**(5-6): 321~327
- 9 R. Carmel, Z. Shachaf, M. Shulamit *et al.*. Adjustable spiral phase plate[J]. *Appl. Opt.*, 2004, **43**(12): 2397~2399
- 10 N. R. Heckenberg, R. McDuff, C. P. Smith *et al.*. Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms [J]. *Opt. Lett.*, 1992, **17**(3): 221~223
- 11 J. A. Arlt, K. Dholakia, L. Allen *et al.*. The production of multiringed Laguerre-Gaussian modes by computer-generated holograms[J]. *J. Mod. Opt.*, 1998, **45**(6): 1231~1237
- 12 L. Janicijevic, S. Topuzoski. Fresnel and Fraunhofer diffraction of a Gaussian laser beam by fork-shaped gratings[J]. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 2008, **25**(11): 2659~2669
- 13 A. Ya. Bekshaev, A. I. Karamoch. Spatial characteristics of vortex light beams produced by diffraction gratings with embedded phase singularity[J]. *Opt. Commun.*, 2008, **281**(6): 1366~1374
- 14 A. Bekshaev, O. Orlinska, M. Vasnetsov. Optical vortex generation with a fork hologram under conditions of high-angle diffraction[J]. *Opt. Commun.*, 2010, **283**(10): 2006~2016

15 A. Ya. Bekshaev, O. V. Orlinska. Transformation of optical-vortex beams by holograms with embedded phase singularity[J]. *Opt. Commun.*, 2010, **283**(7): 1244~1250

16 Ignacio Moreno, Jeffrey A. Davis, B. Melvin L. Pascoguin *et al.*. Vortex sensing diffraction gratings[J]. *Opt. Lett.*, 2009,

34(19): 2927~2929

17 I. N. Bronshtein, K. A. Semendyayev. Handbook of Mathematics[M]. Thun and Frankfurt: Verlag Harri Deutsch Press, 1979