

基于解析图像的小波变换光学载频干涉 全息图相位重建方法

李思坤 苏显渝 陈文静

(四川大学光电科学技术系, 四川 成都, 610064)

摘要 将解析图像和实数小波变换(WT)相结合应用到光学载频全息图分析中。首先对载频全息图进行希尔伯特变换构造解析图像,然后对解析图像进行 WT,提取小波脊处对应的 WT 系数的相位信息即可得到载频全息图的相位信息。由于母小波优秀的空域局部化能力,使得因全息图边缘不连续引入的误差被限制在局部区域。同时,由于不需要人工滤波操作,所提方法一定程度上解决了载频全息图的频谱混叠问题。给出了严格的理论公式推导、计算机模拟和实验验证。

关键词 傅里叶光学;干涉计量;相位测量;小波变换

中图分类号 O438.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL201138.0209002

Analytic Image Based Wavelet Transform Method for Phase Reconstruction of Optical Interferogram with Linear-Carrier

Li Sikun Su Xianyu Chen Wenjing

(Department of Opto-Electronics, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China)

Abstract Analytic image technique and wavelet transform(WT) technique are applied to analysis of interferometry hologram with a linear carrier. In this method, Hilbert transform is firstly performed on the hologram to get the analytic signals. And then WT is calculated on the signal. Finally, the phase information of the hologram can be obtained from the WT coefficients at the wavelet ridge position. Because of the good spatial localization ability of the mother wavelet, the error caused by the boundary of the hologram is limited in local areas. Filtering process is avoided in this method, so it can resolve the frequency overlapping problem to a certain extent. Mathematical demonstration is given in detail. Computer simulation and experiments verify the validity of the proposed method.

Key words Fourier optics; interferometry; phase measurement; wavelet transform

OCIS codes 120.3180; 120.5050; 100.7410

1 引 言

干涉计量^[1]是一种常用的非接触相位测量方法,其中载频干涉只需要一幅干涉图就可进行相位重构,因而经常用于对瞬变场的测量。载频干涉计量通过物光和参考光之间大的倾斜在干涉图的某个方向上产生线性载频,然后利用相位重构方法从载频干涉图中重构出所求的相位。目前已有研究者提

出有多种相位重构方法。例如,王超等^[2]提出了一种相位梯度积分的方法;Womack^[3]提出了一种实时的方法,先把经过被测物体调制的全息图和参考全息图进行乘法运算,将待求相位成分转化为低频成分,然后进行低通滤波提取被测物体相位,由于需要滤波过程,该方法在图像边缘处有较大误差;为了减小这种方法的边缘误差,Mendiola 等^[4]提出了一

收稿日期: 2010-05-11; 收到修改稿日期: 2010-09-17

基金项目: 国家自然科学基金(60838002)资助课题。

作者简介: 李思坤(1982—),男,博士研究生,主要从事三维面形测量和光信息处理等方面的研究。

E-mail: lisk0409@126.com

导师简介: 苏显渝(1944—),男,教授,博士生导师,主要从事光学三维传感与机器视觉、光电信息技术及应用等方面的研究。E-mail: xysu@scu.edu.cn(中国光学学会会员号:6100105)

种迭代的实时方法;Ferrari 等^[5]提出了一种相移重构相位方法,但这种方法从一幅全息图中得到的子图分辨率比较低。Takeda 等^[6]提出了一种傅里叶变换方法,该方法首先对全息图进行傅里叶变换,通过人工设定一定的带通滤波器滤出包含了待求相位信息的基频部分,然后进行逆傅里叶变换、相位展开重建干涉图相位信息。该方法有较好的噪声抑制能力,可靠性高,实时性强,是一种常用的方法。但是,由于数据处理过程中需要人工设定滤波器进行滤波,会在全息图边缘处存在较大的误差,另一方面当全息图的零频成分、高次频成分和有用基频成分存在混叠时,人工很难设定合适的滤波器进行滤波获得完整的基频成分^[7],这种情况下恢复相位结果常存在较大误差甚至错误。为了解决边界和频谱混叠问题,本文将解析图像和小波变换(WT)^[8]结合起来应用到相位提取中。由于 WT 具有良好的空域局部化特性,使得边界误差被限制在局部区域,同时该方法无需人工滤波操作,一定程度上解决了频谱混叠问题。给出了这种方法在载频全息干涉图中应用的详细理论论证,计算机模拟和实验验证了所提方法的有效性。

2 原 理

光学条纹图通常具有以下形式^[6]

$$f(x) = A(x) + B(x) \cos \varphi(x), \quad (1)$$

式中 $\varphi(x)$ 是全息图的相位函数, $A(x)$ 表示背景光强分布, $B(x)$ 代表调制度分布, $A(x)$ 和 $B(x)$ 相对于载频信息通常是缓慢变化的,可以分别看作常数 A 和 B 。

对信号 $I(x)$ 的 WT 可以表示为

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(x) \psi_{a,b}^*(x) dx, \quad (2)$$

式中 $W(a, b)$ 为 WT 系数, $a > 0$ 是和频率有关的伸缩因子, b 代表和位置 x 有关的位移因子,“*”表示共轭。设 $\psi(x)$ 代表母小波,则母小波经过伸缩和平移可以得子小波 $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{a} \psi\left[\frac{(x-b)}{a}\right]$ 。这里选择空域局部化能力较好的墨西哥草帽小波作为母小波。墨西哥草帽小波是一个实数小波,其定义式为

$$\psi(x) = c_0 (1 - x^2) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad (3)$$

式中 $c_0 = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}$ 为一个常数。当母小波是实值小波时,信号的 WT 系数仍然是一个实数信号,不能

直接从系数之中得到所需的相位信息。因此首先通过希尔伯特变换构造被分析信号的解析信号。

对全息图信号 $f(x)$ 的希尔伯特变换可以表示为

$$H[f(x)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{x - \tau} d\tau, \quad (4)$$

然后构造全息图信号 $f(x)$ 对应的解析信号,表示为

$$I(x) = f(x) + jH[f(x)] = A + B \cos \varphi(x) + jB \sin \varphi(x) = A + B \exp[j\varphi(x)], \quad (5)$$

式中“ j ”代表虚数单位。在位置 b 处对相位函数 $\varphi(x)$ 进行泰勒级数展开得到

$$\varphi(x) = \varphi(b) + \varphi'(b)(x-b) + \frac{\varphi''(b)}{2!}(x-b)^2 + \dots, \quad (6)$$

对大多数的载频条纹图而言 $\varphi'(b)$ 是缓慢变化的,可以认为 $\varphi''(b) \approx \varphi'''(b) \approx \dots \approx 0$,所以可以忽略(6)式中 $(x-b)$ 的高阶项。对解析信号 $I(x)$ 进行 WT,得到

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(x) \psi_{a,b}^*(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \{A + B \exp[j\varphi(x)]\} \psi_{a,b}^*(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} A \psi_{a,b}^*(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} B \exp[j\varphi(x)] \psi_{a,b}^*(x) dx, \quad (7)$$

采用墨西哥草帽小波作为母小波,根据小波的容许条件知(7)式中第一项等于零,所以(7)式可以进一步表示为

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} B \exp[j\varphi(x)] \psi_{a,b}^*(x) dx = \sqrt{2\pi} B c_0 a^2 \varphi'(b)^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}[a\varphi'(b)]^2\right\} \exp[j\varphi(b)], \quad (8)$$

因此,WT 系数模值 $|W(a, b)|$ 对伸缩因子 a 的一阶导数可以表示为

$$\frac{d|W(a, b)|}{da} = \sqrt{2\pi} B c_0 a \varphi'(b)^2 \times \exp\left\{-\frac{1}{2}[a\varphi'(b)]^2\right\} [2 - a^2 \varphi'(b)^2], \quad (9)$$

当 $\frac{d|W(a, b)|}{da} = 0$ 时 $|W(a, b)|$ 具有最大值,这时得到

$$a_r(b) = \left| \frac{\sqrt{2}}{\varphi'(b)} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left| \frac{1}{f_b} \right|, \quad (10)$$

式中 $a_r(b)$ 表示位置 b 处 WT 脊处的伸缩因子, $f_b =$

$\varphi'(b)/(2\pi)$ 是所谓的瞬时频率。在位置 b 处 WT 系数 $W(a, b)$ 的模值最大处定义为小波脊, 所以 $I(x)$ 的小波脊处的变换系数可以表示为

$$W(a_r, b) = 2 \sqrt{2\pi} B c_0 \exp(-1) \exp[j\varphi(b)], \quad (11)$$

由于 b 是和 x 对应的位置因子, 可知小波脊处的 WT 系数的相位和光学载频全息图的相位相等。所以可以通过这种解析信号和 WT 结合的方法提取全息图的相位信息。

$$\varphi(b) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}[W(a_r, b)]}{\text{Re}[W(a_r, b)]} \right\}, \quad (12)$$

这里得到的相位截断在 $(-\pi, \pi)$ 之间, 以一定的方法对截断相位进行展开^[9~11] 就可以得到连续的相位信息。

在光学载频全息图中, 以 ω_0 表示线性载频。移走被测相位物体, 拍摄一幅参考全息图, 用同样的方法可以提取出连续相位 $\omega_0 x$, 或者对 $\varphi(x, y)$ 进行最

小二乘拟合^[12], 得到其中等效线性相位 $\omega_0 x$, 然后把变形全息图相位和线性载频相位相减就可以解得物体调制相位。

3 计算机模拟

通过计算机模拟验证理论分析的正确性。模拟的物光相位函数和全息图调制度[分别如图 1(a)和(b)所示]的数学表达式分别为

$$\varphi(x, y) = -\frac{3}{2} \left[\frac{(x-300)}{100} \right]^2 - \frac{1}{2} \pi \left[\frac{(y-300)}{100} \right]^3, \quad (13)$$

$$B(x, y) = 0.72 - 0.032 \left[\frac{(x-300)}{100} \right]^2 + \left[\frac{(y-300)}{100} \right]^2, \quad (14)$$

模拟全息图背景光强 $A=0.24$, 线性载频 $\omega_0 = \pi/3$, 则模拟干涉载频全息图可以表示为

$$f(x, y) = 0.24 + B \cos[\omega_0 x + \varphi(x, y)]. \quad (15)$$

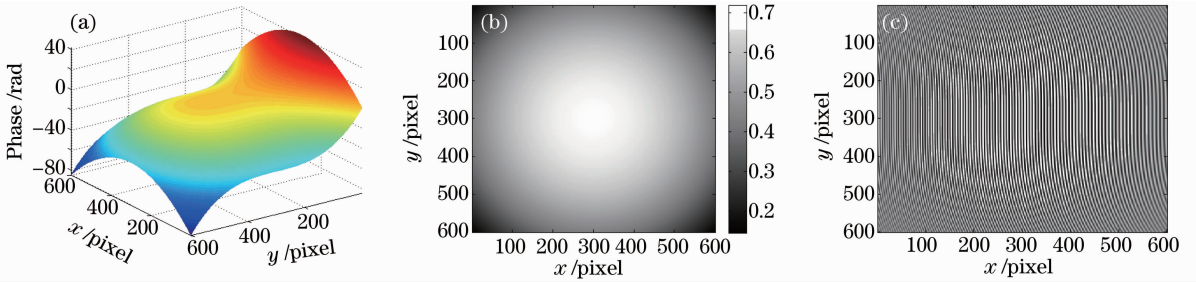


图 1 (a) 模拟调制相位, (b) 调制度, (c) 载频干涉全息图

Fig. 1 (a) Simulated phase, (b) modulation, (c) hologram

全息图像大小为 $600 \text{ pixel} \times 600 \text{ pixel}$, 如图 1(c) 所示。线性载频成分受到被测物体调制而发生变形。首先对全息图逐行进行希尔伯特变换构造对应的解析图像, 然后对得到的解析图像逐行进行 WT, 这里选择墨西哥草帽小波作为母小波。图 2(a) 为对解析图像第 150 行进行 WT 后的系数模值图像, 在每个位置处沿着尺度因子方向模值最大处为小波脊, 即图 2(a) 中所示每个位置的最亮处。图 2(b) 为对应 WT 系数的截断相位分布。图 2(c) 为得到整幅图像的小波脊处 WT 系数的模值后根据 (11) 式计算得到的调制度信息。对比图 2(c) 和图 1(b) 可见文中所述方法可以重构干涉图调制度成分。提取小波脊位置处的截断相位, 以一定的相位展开方法进行相位展开, 得到的连续相位分布如图 2(d) 所示, 图 2(e) 所示为点对点误差分布, 可见采用本文提到的方法可以高精度地解调全息图相位。同时, 模拟中对全息图调制度信息和调制相位信息的精确重构验证了理论推导部分的正

确性。

4 实 验

用马赫-曾德尔干涉光路, 并有意使干涉仪的两个臂发生倾斜, 以便在水平方向上产生线性载频。使用 He-Ne 激光器产生波长为 $\lambda=633 \text{ nm}$ 的激光作为光源。在干涉仪的其中一个臂上放置一个薄透镜作为待测相位物体。CCD 摄像机分辨率为 $800 \text{ pixel} \times 600 \text{ pixel}$, 拍摄的载频干涉全息图经过剪切后如图 3(a) 所示, 全息图的强度分布很不均匀。干涉图第 150 行的傅里叶频谱如图 3(b) 所示, 零频成分和有用基频成分严重混叠在一起, 这使得用傅里叶变换法对全息图进行相位提取的时候, 很难设定合适的滤波器滤出完整的基频成分。全息图边缘不连续对傅里叶分析法的影响很大, 通常会造成边缘部分存在较大误差。为了减小边缘误差通常选择汉宁滤波窗进行滤波。这里相应选择汉宁滤波窗。对全息图的频谱滤波后进行逆傅里叶变换, 得

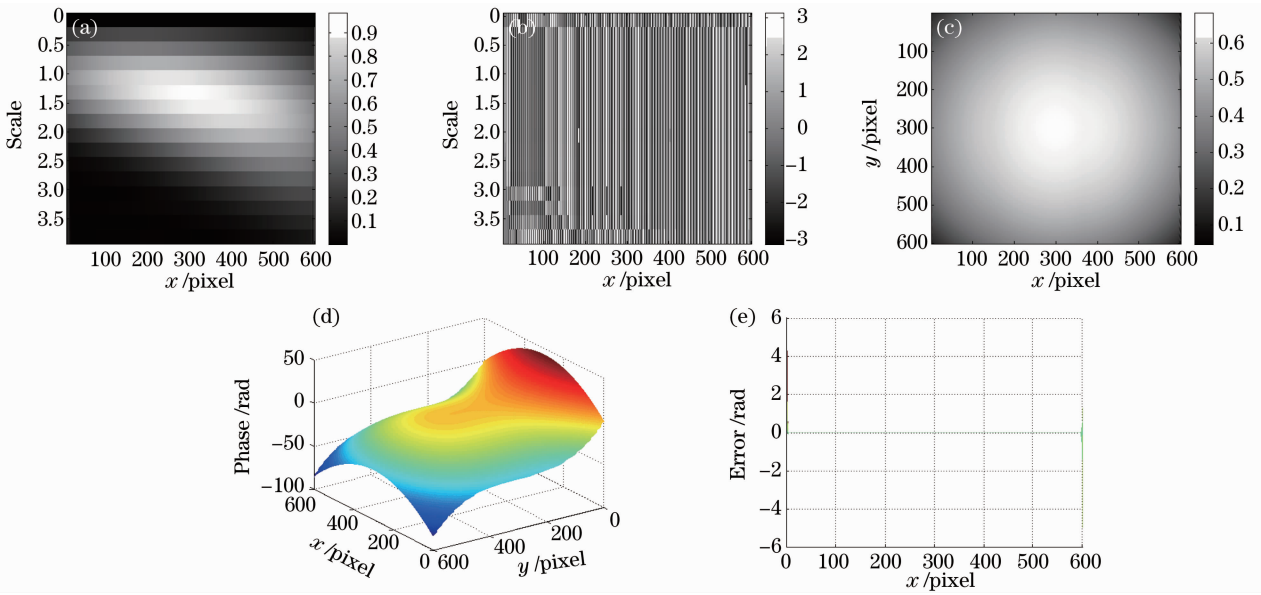


图2 (a) WT 系数模值, (b) WT 系数相位, (c) 重建调制分布, (d) 重建调制相位, (e) 相位误差
 Fig.2 (a) Modulus of wavelet transform (WT) coefficients, (b) phase of WT coefficients, (c) reconstructed modulation, (d) retrieved phase, (e) error of phase

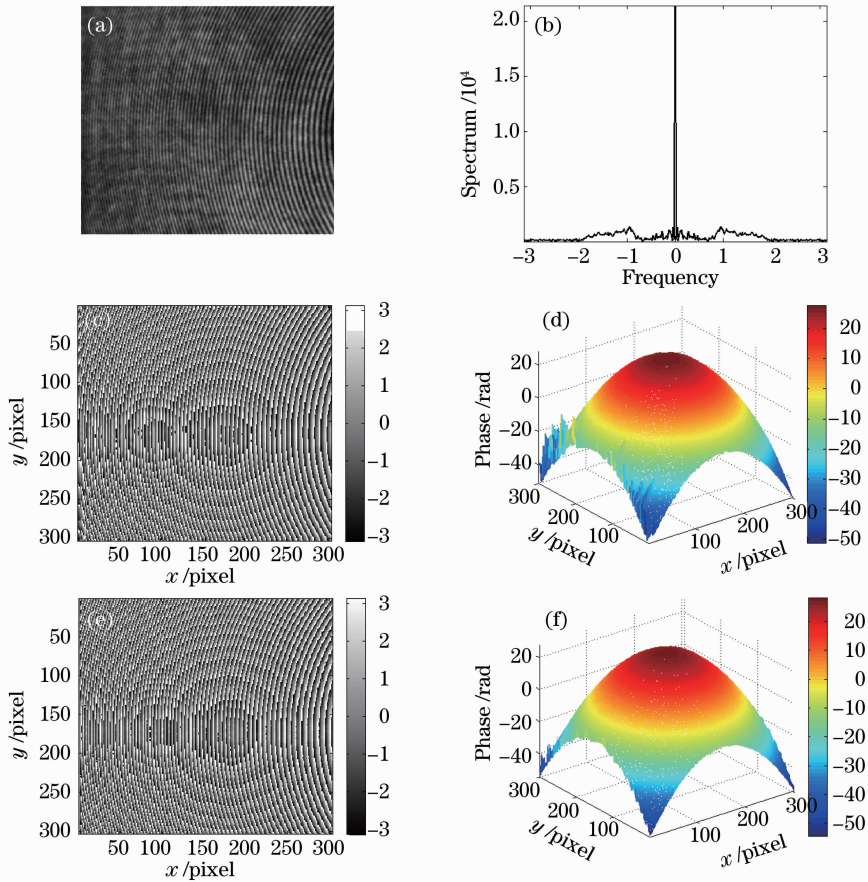


图3 (a) 实拍的全息图, (b) 第 150 行的频谱, (c) 傅里叶变换方法得到的截断相位和 (d) 重建的相位,
 (e) 本文所提方法解得的截断相位和 (f) 重建的相位

Fig.3 (a) A real hologram, (b) spectrum of the 150th row, (c) wrapped phase and (d) reconstructed phase by using FFT method, (e) wrapped phase and (f) reconstructed phase by using the proposed method

到的截断相位如图 3(c)所示。在边缘部位仍然存在较大的误差。以菱形相位展开算法^[9]进行相位展开后重建的连续相位如图 3(d)所示,边缘误差很大。然后以本文所提方法进行相位提取,得到的截断相位如图 3(e)所示。对比图 3(c)和(e)可见,本文所提方法具有明显的优势。以同样的相位展开算法进行相位展开,重建的连续相位如图 3(f)所示。由于 WT 母小波优秀的空域局部化能力,使得边缘不连续引入的误差被限制在边缘局部区域内。同时本文所提方法不需要人工滤波过程,在一定程度上解决了频谱混叠问题。

5 结 论

将解析信号和实数 WT 相结合可以对光学载频全息干涉图进行高精度解调分析。通过严格的理论分析论证了解析图像小波脊处的 WT 系数的相位信息和全息图的相位信息相等的关系,并通过对模拟的和实际拍摄的全息图进行相位提取验证了所提方法的有效性和可靠性。由于 WT 母小波优秀的空域局部化能力,使得由于全息图边缘不连续引入的误差被限制在边缘的局部区域,提高了这些区域相位重建精度;同时由于不需要人工滤波操作,此方法一定程度上解决了载频全息图的频谱混叠问题。本文所述方法无需已知物光和参考光的振幅分布,对条纹图强度变化不敏感,只需一幅或者两幅全息图就可解得到物体调制相位,适用于瞬变场的测量。另外,该方法还可以同时分析全息图的强度分布信息。边缘误差可以采用已有的图像延拓方法处理(例如零延拓或者 Gerchberg 迭代延拓),将边缘误差外推解决。

致谢 感谢四川大学电子信息学院冯国英教授和王超硕士在研究过程中的交流。

参 考 文 献

1 Jin Guofan, Li Jingzhen. Laser Metrology[M]. Beijing: Science

- Press, 1998. 396~429
 金国藩, 李景镇 主编. 激光测量学[M]. 北京: 科学出版社, 1998. 396~429
- 2 Wang Chao, Feng Guoying. A new algorithm for phase reconstruction from a single carrier-frequency interferogram[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(7): 1269~1273
 王 超, 冯国英. 从一幅载频全息图中实现相位重构的新算法[J]. *光学学报*, 2008, **28**(7): 1269~1273
- 3 K. H. Womack. Interferometric phase measurement using spatial synchronous detection[J]. *Opt. Eng.*, 1984, **23**(4): 391~395
- 4 J. Yañez-Mendiola, M. Servín, D. Malacara-Hernández. Iterative method to obtain the wrapped phase in an interferogram with a linear carrier[J]. *Opt. Commun.*, 2000, **178**(4-6): 291~296
- 5 J. A. Ferrari, E. M. Frins. Multiple phase-shifted interferograms obtained from a single interferogram with linear carrier[J]. *Opt. Commun.*, 2007, **271**(1): 59~64
- 6 M. Takeda, H. Ina, S. Kobayashi. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry[J]. *J. Opt. Soc. Am*, 1982, **72**(1): 156~160
- 7 Yang Hu, Chen Wenjing, Lu Chengqiang *et al.*. Influence of sampling on Fourier-transform profilometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 1999, **19**(7): 929~934
 杨 虎, 陈文静, 陆成强 等. 抽样对傅里叶变换轮廓术的影响[J]. *光学学报*, 1999, **19**(7): 929~934
- 8 Zhou Xiang, Zhao Hong. Three-dimensional profilometry based on Mexican hat wavelet transform[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(1): 197~202
 周 翔, 赵 宏. 基于 Mexican hat 小波变换的三维轮廓术[J]. *光学学报*, 2009, **29**(1): 197~202
- 9 Zhang Qican. Technical Study of Three-Dimensional Shape Measurement for Dynamic Process [D]. Chengdu: Sichuan University, 2005. 20~25
 张启灿. 动态过程三维面形测量技术研究[D]. 成都: 四川大学, 2005. 20~25
- 10 Li Sikun, Chen Wenjing, Su Xianyu. Phase unwrapping guided by amplitude of wavelet ridge coefficients in wavelet transform profilometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(4): 715~721
 李思坤, 陈文静, 苏显渝. 小波变换轮廓术中用小波脊系数幅值引导相位展开的研究[J]. *光学学报*, 2008, **28**(4): 715~721
- 11 Li Yong, Su Xianyu. Fast algorithm for reliability-guided phase unwrapping[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2005, **32**(11): 76~79
 李 勇, 苏显渝. 用于可靠性导向的相位展开的快速算法[J]. *光电工程*, 2005, **32**(11): 76~79
- 12 Liu Yuankun, Su Xianyu, Wu Qingyang. Multi-camera calibration by FTP technique[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2007, **36**(9): 1734~1737
 刘元坤, 苏显渝, 吴庆阳. 基于傅里叶条纹分析的多摄像机标定方法[J]. *光子学报*. 2007, **36**(9): 1734~1737