

文章编号: 0258-7025(2010)07-1800-07

# 利用随机二元纯相位调制重构复杂光场波前

徐宁汉 谭峭峰 金国藩

(清华大学精密测试技术与仪器国家重点实验室, 北京 100084)

**摘要** 在非涅耳衍射区和夫琅禾费衍射区, 分别利用输入面上的多个随机二元纯相位调制, 获得多个输出面强度信息, 在不需要输入面强度先验信息的基础上, 基于迭代算法高精度重构了复杂光场的波前。讨论了非涅耳衍射区和夫琅禾费衍射区各自特点和适用范围。

**关键词** 物理光学; 波前重构; 相位调制; 复杂光场; 迭代算法

**中图分类号** O436.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL20103707.1800

## Reconstruction of Complex Wave-Front by Random Binary Phase Modulation

Xu Ninghan Tan Qiaofeng Jin Guofan

(State Key Laboratory of Precision Measurement Technology and Instruments, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract** Without prior intensity information in input plane, one method using random binary phase modulation and iterative algorithm is adopted to reconstruct complex wave-front in Fresnel and Fraunhofer diffraction domains, respectively. Three or more diffraction patterns in Fresnel or Fraunhofer domains with different random binary phase masks are used to successfully retrieve the complex wave-front. The differences of the methods used in Fresnel or Fraunhofer diffraction domains are finally discussed in detail.

**Key words** physical optics; wave-front reconstruction; phase modulation; complex wave-front; iterative algorithm

### 1 引 言

在自适应光学、激光光束质量检测 and X 射线成像及衍射光学等诸多领域中, 经常会涉及到光波波前重构问题<sup>[1~3]</sup>。波前重构有多种方法, 大致上可以归为以下几类: 1) 直接测量法, 如干涉仪测量法; 2) 剪切干涉法; 3) 通过测量波前的平均斜率或曲率, 重构出相位分布, 如 Hartman-Shack 波前探测法; (4) 基于若干个面上强度信息的多种数值算法, 如 Gerchberg-Saxton(GS)算法<sup>[4]</sup>、最速下降法<sup>[5]</sup>、输入输出算法<sup>[5]</sup>和采用分数傅里叶变换的 GS 算法<sup>[6]</sup>等。基于光场的强度信息, 采用迭代算法进行相位恢复, 已经成为主要的研究思路之一, 并被运用到实践中。

GS 算法只用到两个面上的光场强度信息, 常常存在收敛不稳定、收敛速度慢和抗噪性能差等缺点。另外, 在某些实际应用中, 输入面上的振幅分布往往无法直接测得, 甚至在某些特定场合, 入瞳形状只能粗略估计, 此时输入面上可用的信息很少, 进一步增加了相位恢复的难度。为此需要采用多个面上的强度信息对复杂光场加以恢复, 例如采用多个离焦面上的信息<sup>[7~11]</sup>、采用纯相位调制<sup>[12]</sup>或采用随机二元振幅调制<sup>[13]</sup>等, 这些方法均不需要输入面上的先验信息。

纯相位调制方法由 Fucai Zhang 等<sup>[12]</sup>在 2007 年提出, 其基本思想是平移一块具有随机分布的相

收稿日期: 2009-09-09; 收到修改稿日期: 2009-10-28

基金项目: 国家 863 计划(2008AA8040506C)资助课题。

作者简介: 徐宁汉(1989—), 男, 博士研究生, 主要从事光信息处理方面的研究。E-mail: xnh09@mails.tsinghua.edu.cn

导师简介: 金国藩(1929—), 男, 中国工程院院士, 博士生导师, 主要从事全息及二元光学等方面的研究。

E-mail: jgf-dpi@tsinghua.edu.cn

位板,实现不同的随机相位调制,从而多次(最少 3 次)测量单个输出面上的强度信息,利用迭代算法进行重构。本文将该方法推广到夫琅禾费衍射区,利用随机二元相位(0,  $\pi$ )调制,针对强激光系统的波前畸变,系统地研究了菲涅耳衍射区和夫琅禾费衍射区可重构的波前畸变幅度,通过数值模拟分析了各自特点和适用范围。

## 2 菲涅耳衍射区的波前重构

### 2.1 算法流程

光学系统如图 1 所示,输入输出面间距为  $z$ ,采样间隔分别为  $\Delta x_1 = \Delta y_1, \Delta x_2 = \Delta y_2$ ,每个面上的采样点数目均为  $N$ 。需要指出的是,对输入输出面上

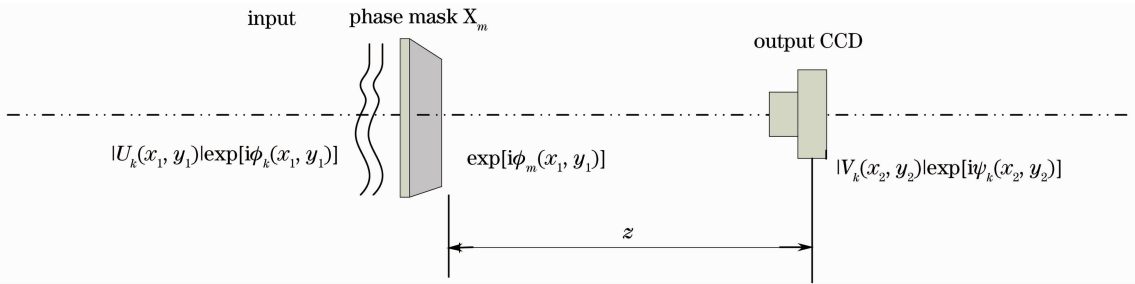


图 1 基于菲涅耳衍射的随机二元调制相位恢复光学系统示意图

Fig. 1 Optical setup for the phase retrieval by random binary phase modulation in Fresnel zone

3) 光场经菲涅耳衍射传播,得到输出面光场

$$V_k(x_2, y_2) = |V_k(x_2, y_2)| \exp[i\psi_k(x_2, y_2)];$$

4) 进行振幅替换,将振幅  $|V_k(x_2, y_2)|$  替换成

$\sqrt{I_m(x_2, y_2)}$ , 相位保持不变,得到输出面估计光场

$$V'_k(x_2, y_2) = \sqrt{I_m(x_2, y_2)} \exp[i\psi_k(x_2, y_2)];$$

5) 输出面估计光场通过求逆运算传播回相位板上,得到相位板上估计光场分布

$$U_k(x_1, y_1) = |U_k(x_1, y_1)| \exp[i\phi_k(x_1, y_1)];$$

6) 去除相位板,得到输入面光场

$$U_{k+1}(x_1, y_1) = U_k(x_1, y_1) \exp(-i\phi_m) = |U_{k+1}(x_1, y_1)| \exp[i\phi_{k+1}(x_1, y_1)];$$

7) 重复步骤 2)~6),直到满足最后的迭代终止条件。

在以上算法流程中,无需知道输入光场的信息,只需知道多个输出面上的光强信息,这在很多实际场合是非常有意义的。

### 2.2 数值模拟参数

在模拟分析中,可以选用输入面、任一次相位调制后的输出面或所有相位调制后的输出面上的振幅或强度来判断迭代是否收敛。为简单起见,定义输出面上的振幅相对误差

的光场信号进行离散采样时,必须满足采样定理,采样间隔和采样点应满足  $\Delta x_1 \Delta x_2 = \lambda_0 z N$ 。输入光场由输入面经过相位板  $X_1$  调制后向输出面传输,得到第 1 个输出面光强分布信息  $I_1$ 。然后将相位板  $X_1$  依次更换成相位板  $X_2, X_3, \dots, X_M$ ,依次得到第  $m(m=1, 2, \dots, M)$  个输出面光强分布信息  $I_m$ ,再经过如下迭代步骤:

1) 假设输入面光场分布为

$$U_k(x_1, y_1) = |U_k(x_1, y_1)| \exp[i\phi_k(x_1, y_1)],$$

式中  $k=1, 2, 3, \dots$ ,为迭代次数;

2) 经过相位板  $\phi_m(x_1, y_1)$  的调制,得到调制光场  $U_k(x_1, y_1) \exp(i\phi_m)$ ,其中  $m = f_{\text{mod}}(k, M)$ ,为相位板标号,  $f_{\text{mod}}$  为求模函数。

$$V_{\text{ER}} = \sum \|V_k - |\mathcal{F}\{U_k\}|\| / \sum V_k, \quad (1)$$

定义相位恢复均方根误差,即已恢复相位  $\phi_{\text{re}}$  和输入相位  $\phi_{\text{in}}$  之间差的均方根误差

$$\phi_{\text{RMS}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sum [f_{\text{mod}}(\phi_{\text{re}} - \phi_{\text{in}}, 2\pi)]^2}{N \times N - 1}}. \quad (2)$$

一般来说,  $V_{\text{ER}}$  达到一个非常小的值时,  $\phi_{\text{RMS}}$  值也会很小,从而可以用  $V_{\text{ER}}$  作为迭代判定条件。本文采用 Matlab 对上述算法编程进行数值模拟。波长  $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$ , 输入面、输出面的大小均为  $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ , 采样点数为  $256 \times 256$ , 输入输出面的距离  $z = 154.3 \text{ mm}$ 。

输入面相位用强激光输出光束模拟,其中低频噪声可表示为<sup>[14]</sup>

$$\phi_{\text{L}}(m_x \Delta_x, m_y \Delta_y) = a f_{\text{rand}}(-0.5, 0.5) \otimes \exp\{-[(m_x \Delta_x / S_x)^2 + (m_y \Delta_y / S_y)^2]\}, \quad (3)$$

式中  $f_{\text{rand}}(p, q)$  表示取值范围在  $p \sim q$  之间的均匀分布的随机数序列,如  $f_{\text{rand}}(0, 1)$  表示取值范围在  $0 \sim 1$  之间的均匀分布的随机数序列;  $S_x, S_y$  是决定相位空间起伏的参数,在下面低频模拟中  $S_x = S_y = 25.6$ ; “ $\otimes$ ”表示卷积;调整系数  $a$ ,可获得不同均方根梯度的相位分布。

高频噪声设为

$$\varphi_H(m_x\Delta_x, m_y\Delta_y) = bf_{\text{rand}}(0,1), \quad (4)$$

输入面振幅为平面波加上低频噪声。相位板每一个像素点为  $0, \pi$  二值随机分布, 迭代开始时初始相位值为  $0$ , 初始振幅为  $0 \sim 1$  之间均匀分布的随机振幅。

### 2.3 数值模拟结果

为验证上述算法的有效性, 利用(3), (4)式随机产生了 30 个低频和高频的波前畸变模型, 通过增大  $M$ , 均得到了高精度的恢复结果, 其中低频相位恢复幅度达到  $11\lambda$  ( $\lambda$  表示大小为  $2\pi$  的相位), 高频相位恢复幅度达到  $0.6\lambda$ , 恢复精度均优于  $0.001\lambda$ 。

对于低频信号, 使用 4 个输出面强度信息, 即  $M=4$ 。此时波前重构情况如图 2 所示。图 2(a), (b) 分别为输入振幅和恢复振幅; (c) ~ (e) 分别为输入相

位、输入相位模  $2\pi$  和恢复相位; (f), (g) 分别为振幅恢复偏差和相位恢复偏差。  $V_{\text{ER}}$  值收敛至  $0.0048$ , 迭代次数  $k=339$ 。输入相位的幅度为  $-40 \sim 30$  rad, 约为  $11\lambda$ ; 恢复相位的幅度为  $0 \sim 2\pi$  rad, 即  $\lambda$ ; 输入相位模  $2\pi$  后, 如图 2(d) 所示, 恢复相位与输入相位之间的均方根误差  $\phi_{\text{RMS}}=9.7 \times 10^{-4}\lambda$ 。

对于高频信号, 使用 3 个输出面强度信息, 即  $M=3$ 。此时波前重构情况如图 3 所示。图 3(a), (b) 分别为输入振幅和恢复振幅; (c), (d) 分别为输入相位和恢复相位; (e), (f) 分别为振幅恢复偏差和相位恢复偏差。  $V_{\text{ER}}$  值收敛至  $0.0049$ , 迭代次数  $k=48$ 。待恢复相位的幅度为  $0 \sim 2$  rad, 约为  $0.3\lambda$ , 恢复相位幅度为  $0 \sim 2\pi$  rad, 即  $\lambda$ , 两者相位差接近常数, 均方根误差  $\phi_{\text{RMS}}=1.0 \times 10^{-3}\lambda$ 。

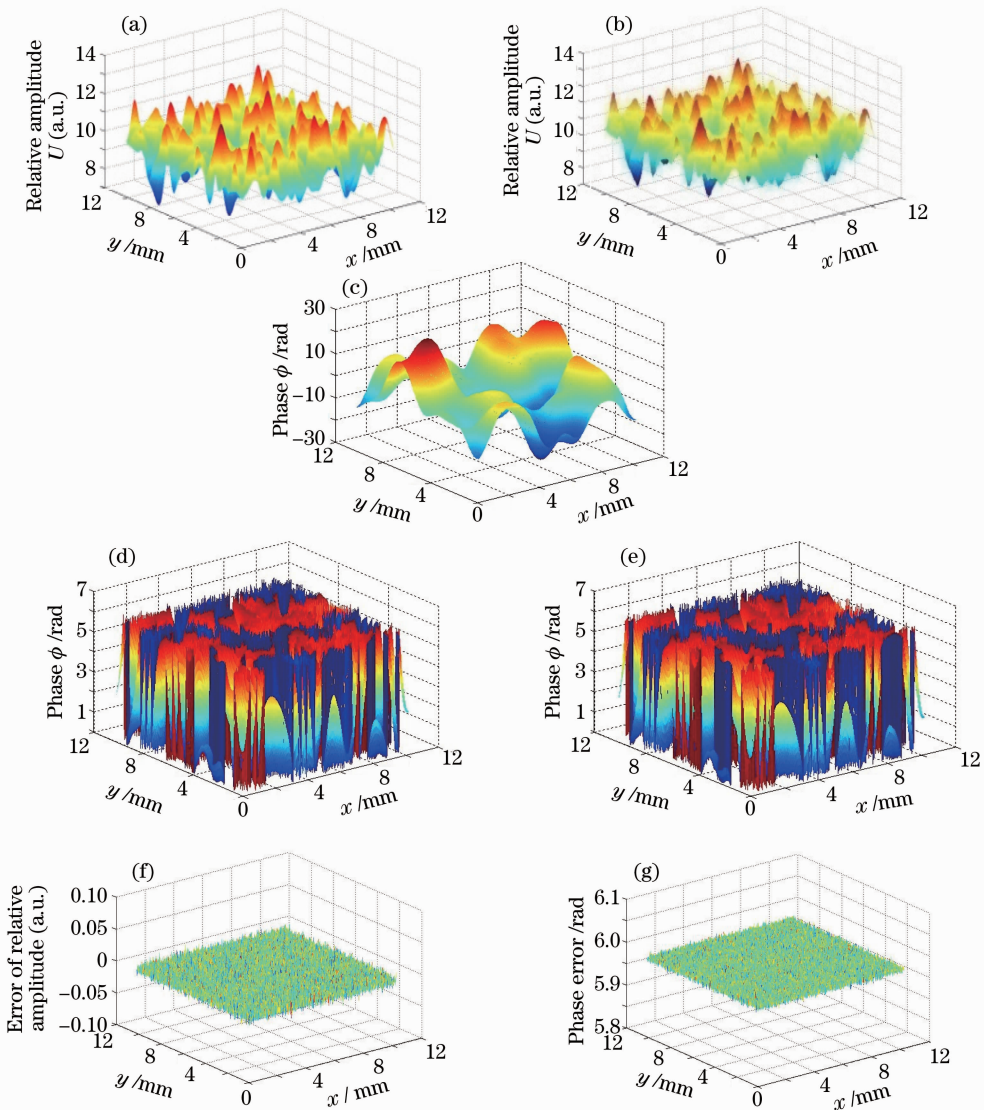


图 2 菲涅耳衍射区低频光波重构情况

Fig. 2 Wave-front reconstruction for low frequency phase in Fresnel zone

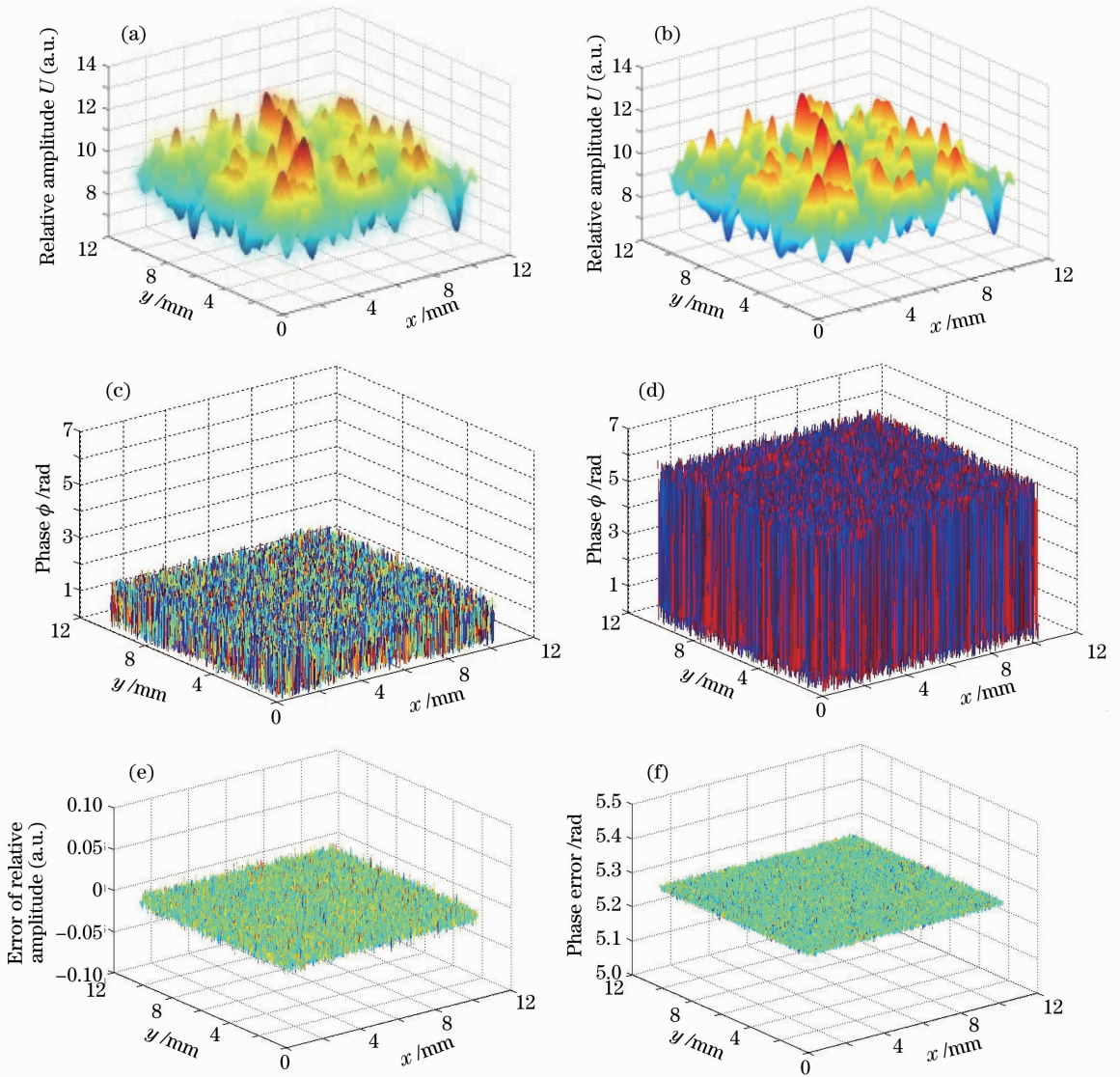


图 3 菲涅耳衍射区高频光波重构情况

Fig. 3 Wave-front reconstruction for high frequency phase in Fresnel zone

## 2.4 分析与讨论

图 2,3 的重构结果表明算法能够很好地恢复复杂光场,为了研究该算法能够恢复的波前畸变幅度,对某一固定的  $S_x = S_y = 25.6$ ,用(3)式构造出低频

相位畸变,通过改变  $a$  的大小来控制幅度,此时固定  $M=4$ 。重构波前对应的  $\phi_{\text{RMS}}$  如图 4(a)所示,当  $a \leq 1.5$  时,低频相位畸变的幅度小于等于  $11\lambda$ ,基本上波前都能正确重构,但也出现了不能正确重构的特

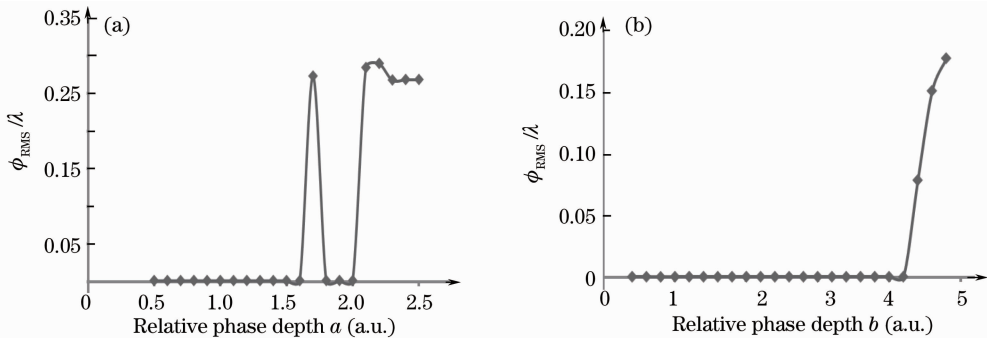


图 4 相位幅度对重构结果的影响(菲涅耳衍射区)。(a) 低频;(b) 高频

Fig. 4 Influence of phase depth in Fresnel zone, low (a) and high (b) frequency phase

例(连续 30 次实验中成功 27 次);当  $1.8 > a > 1.5$  时,即相位幅度为  $11\lambda \sim 15\lambda$  时,失败率增高,连续 30 次实验中成功了 15 次,图中则表现为上下波动;当  $a > 1.8$  时,即相位幅度大于  $15\lambda$  时,收敛基本停滞,  $V_{ER}$  徘徊在 0.1 附近难以进一步减小收敛,  $\phi_{RMS}$  值也上升明显。类似地,改变(4)式中参数  $b$  的大小以测试算法对高频相位畸变的重构能力,此时固定  $M=3$ 。某一组模拟实验中,重构波前对应的  $\phi_{RMS}$  如图 4(b) 所示,相位幅度小于等于  $0.6\lambda$ ,即  $b \leq 4$  时均能重构,重构精度优于  $0.001\lambda$ 。  $b > 4$  时,  $\phi_{RMS}$  值逐渐上升,精度下降,恢复成功率下降。

模拟分析结果表明,不管是低频畸变还是高频畸变,当  $M$  增大时,收敛速度会加快,恢复精度进一步提高。  $M$  对某一低频波前畸变恢复的收敛速度的影响如图 5 所示,  $M \leq 3$  时,无法恢复;而  $M=6$  时只需 38 次迭代就使  $V_{ER}$  收敛至小于 0.02。  $M$  增大时,可恢复的振幅幅度和相位幅度将变大。在现实应用中,需要根据系统复杂性和时间紧迫性等综合因素考量  $M$  的选取。

### 3 夫琅禾费衍射区的波前重构

在非涅耳衍射区时,采样间隔和采样点满足

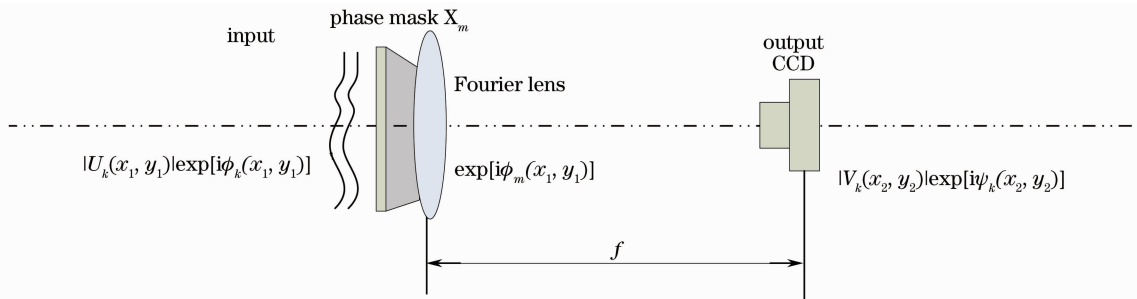


图 6 基于夫琅禾费衍射的光学系统示意图

Fig. 6 Optical setup for phase retrieval by random binary phase modulation in Fraunhofer zone

### 3.2 数值模拟实验结果

模拟参数与非涅耳衍射区一样,同样针对光波波前为低频信号和高频信号两种情况,进行了 30 次重复性数值模拟,均得到了精确的恢复结果,其中低频相位幅度达到  $11\lambda$ ,高频相位幅度为  $0.4\lambda$ ,恢复精度优于  $0.001\lambda$ 。同样,若  $M$  增大,算法收敛速度将加快,可恢复的振幅、相位幅度变大,恢复精度变高。

### 3.3 与非涅耳衍射区进行对比分析

一组相同的输入光场,采用同样的相位板分布,同样的  $M$  值(均为 3),分别在非涅耳衍射区和夫琅禾费衍射区进行重构。当输入为低频信号(相位幅

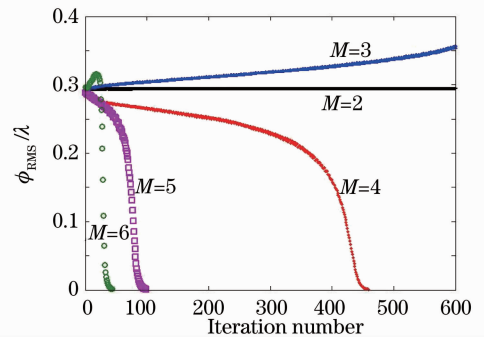


图 5 输出面强度测量次数  $M$  对收敛速度的影响

Fig. 5 Influence on iteration speed of different  $M$  in Fresnel zone

$\Delta x_1 \Delta x_2 = \lambda_0 z N$ 。受探测器面积的限制,输入面的尺寸一般和输出面,即探测器的面积相当。在探测器面积不变的情形下,为增大可重构的波前尺寸,将上述方法推广到夫琅禾费衍射区。

### 3.1 算法流程

夫琅禾费衍射区的恢复算法原理及流程与非涅耳衍射区的基本一致,光学系统如图 6 所示,相位板后是傅里叶透镜,输入、输出面的距离为透镜焦距  $f$ ,其余各项参数与非涅耳衍射区相同。

度为  $11\lambda$ )时,重构结果对比如图 7 所示,(a),(d)分别为输入振幅和输入相位;(b),(e)分别为基于非涅耳衍射的恢复振幅和恢复相位;(c),(f)分别为基于夫琅禾费衍射的恢复振幅和恢复相位。可以看到夫琅禾费衍射区较之非涅耳衍射区更容易恢复低频信号,此时只需迭代 63 次就可以收敛到较高的恢复精度 ( $V_{ER} < 0.02$ ),  $\phi_{RMS} = 0.0037\lambda$ ;而在非涅耳衍射区时,循环陷入停滞,  $V_{ER}$  在 0.48 附近徘徊难以下降,最终经历 1200 次循环后,  $\phi_{RMS} = 0.21\lambda$ ,此时需要增加  $M$  值至 4 才能精确重构波前。

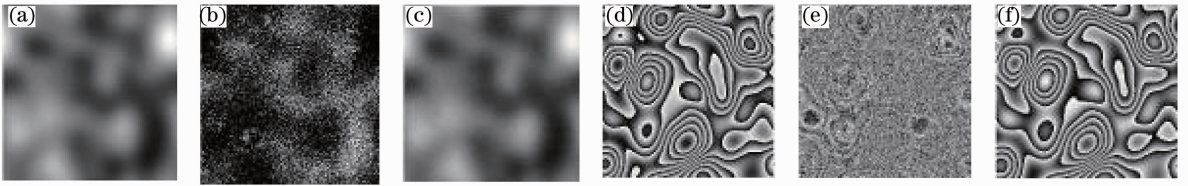


图 7 菲涅耳衍射区与夫琅禾费衍射区低频光波重构情况对比

Fig. 7 Contrast of low frequency phase reconstruction between Fresnel zone and Fraunhofer zone

当输入为某高频信号(相位幅度为  $0.6\lambda$ )时,重构对比结果如图 8 所示。可以看到菲涅耳衍射区较之夫琅禾费衍射区更容易恢复高频信号,此时迭代 180 次就可收敛至  $V_{ER}=0.0049$ ;  $\phi_{RMS}=9.8\times 10^{-4}\lambda$

( $M=3$ ); 而夫琅禾费衍射区收敛停滞,  $V_{ER}$  在 0.39 附近徘徊难以下降, 最终经历 600 次循环后,  $\phi_{RMS}=0.22\lambda$ , 此时同样需要增加  $M$  值至 4 才能精确重构波前。

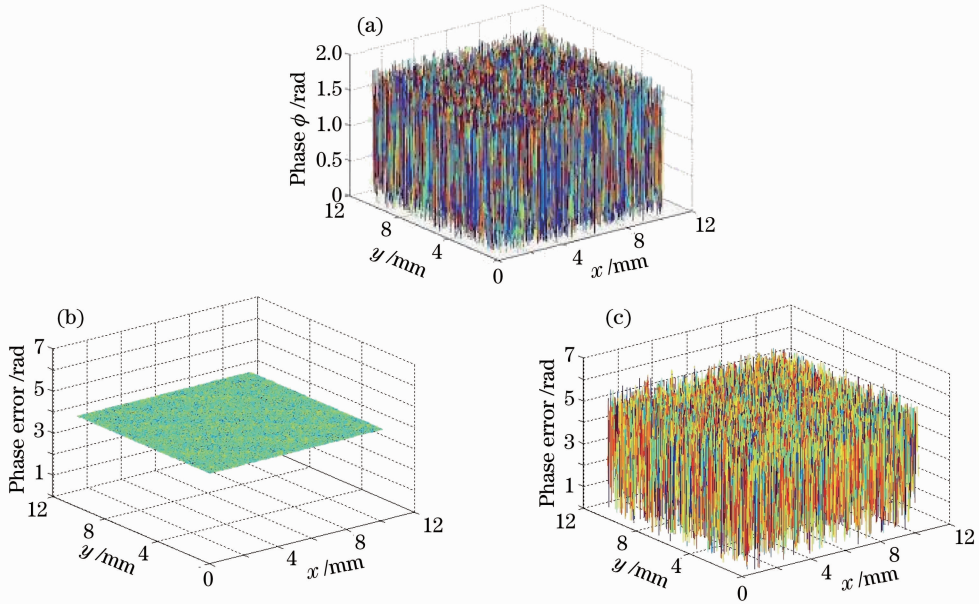


图 8 高频光波重构情况对比。(a)输入相位;(b)基于菲涅耳衍射的相位恢复偏差;(c)基于夫琅禾费衍射的相位恢复偏差

Fig. 8 Contrast of high frequency wave reconstruction between Fresnel zone and Fraunhofer zone. (a) input phase;

(b) retrieved phase error in Fresnel zone; (c) retrieved phase error in Fraunhofer zone

## 4 结 论

分别在菲涅耳衍射区和夫琅禾费衍射区,利用随机二元纯相位调制的方法,获得多个输出面强度信息,利用迭代算法成功重构了复杂光场的波前。夫琅禾费衍射较之菲涅耳衍射,在探测器面积不变的情形下,能够重构的波前面积增大。模拟计算结果表明,恢复较高频率波前时,基于菲涅耳衍射的重构算法更为合适;而恢复较低频率波前时,基于夫琅禾费衍射的重构算法更加有效。根据角谱理论定性分析可知,光场的低频成分和高频成分随着光场的传播重新排布。当探测器(中心在光轴上)面积一定时,高频成分在菲涅耳衍射区具有大的对比度;而在夫琅禾费衍射区,低频成分具有大的对比度,因此菲涅耳衍射区适合于重构高频波前畸变,而夫琅禾费

衍射区适合于重构低频波前畸变。

在数值模拟中,相位板的相位分布对算法收敛性也有一定的影响。优化相位板的二值分布以得到最佳的恢复效果,还有待进一步的研究。基于相位恢复算法的复杂波前重构,影响重构结果的因素有很多,有些情况下出现不能重构的特例,在何处能够重构的波前畸变突变至不能重构等问题,尚缺乏分析方法,同样有待进一步研究。

## 参 考 文 献

- Xie Wenke, Jiang Zongfu. Real-time wavefront construction approach based on proper orthogonal decomposition basis function [J]. *Chinese J. Lasers*, 2007, **34**(3): 327~330
- 谢文科, 姜宗福. 基于本征正交分解基的实时波前重构方法[J]. *中国激光*, 2007, **34**(3): 327~330
- Li Min, Li Xinyang, Jiang Wenhan. Experimental comparison

- between linear phase retrieval sensor and Hartman wavefront sensor[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(4): 619~625
- 李 敏, 李新阳, 姜文汉. 线性相位反演传感器与哈特曼传感器的实验研究对比[J]. *光学学报*, 2008, **28**(4): 619~625
- 3 Deng Zewei, Ma Xiuhua, Shi Xiangchun. Wavefront sensing technology of high repetition rate heat capacity master oscillator power amplifier system[J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(7): 1055~1058
- 邓泽微, 马秀华, 施翔春. 用于高重复频率热容主振荡功率放大器激光系统的波前检测技术[J]. *中国激光*, 2008, **35**(7): 1055~1058
- 4 R. W. Gerchberg, W. O. Saxon. Practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures [J]. *Optik*, 1972, **35**(2): 237~250
- 5 J. R. Fienup. Phase retrieval algorithms: a comparison [J]. *Appl. Opt.*, 1982, **21**(15): 2758~2769
- 6 Dong Bizhen, Zhang Yan, Gu Benyuan *et al.*. Numerical investigation of phase retrieval in a fractional Fourier transform [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1997, **14**(10): 2709~2714
- 7 Laurent Bruel. Numerical phase retrieval from beam intensity measurements in three planes [C]. *SPIE*, 2003, **4932**: 590~598
- 8 V. Yu. Ivanov, V. P. Sivokon, M. A. Vorontsov. Phase retrieval from a set of intensity measurements: theory and experiment [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1992, **9**(9): 1515~1524
- 9 Zeng Fa, Tan Qiaofeng, Wei Xiaofeng *et al.*. A phase retrieval algorithm for complex optical field[J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(3): 339~342
- 曾 发, 谭峭峰, 魏晓峰等. 一种可对复杂光场进行相位恢复的算法[J]. *中国激光*, 2006, **33**(3): 339~342
- 10 G. R. Brady, J. R. Fienup. Nonlinear optimization algorithm for retrieving the full complex pupil function [J]. *Opt. Express*, 2006, **14**: 474~486
- 11 Fa Zeng, Qiaofeng Tan, Yingbai Yan *et al.*. Hybrid iterative phase retrieval algorithm based on fusion of intensity information in three defocused planes [J]. *Appl. Opt.*, 2007, **46**(28): 6872~6878
- 12 Fucai Zhang, Giancarlo Pedrini, Wolfgang Osten. Phase retrieval of arbitrary complex-valued fields through aperture-plane modulation [J]. *Phys. Rev. A*, 2007, **75**: 043805
- 13 Qiaofeng Tan, Giancarlo Pedrini, Wolfgang Osten. Phase retrieval of complex optical fields by binary amplitude modulation [J]. *Appl. Opt.*, 2008, **47**(22): 4077~4084
- 14 Deng Qinghua, Zhang Xiaomin, Jing Feng *et al.*. Research on the rule of laser beam's low-frequency phase aberration superimposition [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2002, **14**(1): 81~84
- 邓清华, 张小民, 景 峰等. 激光束低频位相误差叠加规律研究 [J]. *强激光与粒子束*, 2002, **14**(1): 81~84