

文章编号: 0258-7025(2010)07-1717-04

变形分数傅里叶变换系统的结构参数分析

张军勇 卢兴强 林尊琪

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘要 和对称式光学系统比较, 含有非球面透镜的光学系统能够实现一些特殊要求的变换。采用傍轴近似, 用几何光学的方法分析了锥形透镜, 得到了椭圆锥透镜透射函数的解析表达式。在此基础上进一步推广, 得出了圆锥透镜和柱透镜的透射函数。利用以上结论构建了双柱透镜系统, 用于实现变形分数变换。分数变换的可加性使得这一光学系统成为构建变形分数系统的基本单元, 利用标量衍射理论, 得到了该结构输出函数的解析式, 并详细分析了结构参数对实现各种分数变换所需要满足的条件。

关键词 几何光学; 锥形透镜; 透射函数; 衍射理论; 变形分数傅里叶变换

中图分类号 O436 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/CJL20103707.1717

Analysis of Structure Parameters for Anamorphic Fractional Fourier Transforms System

Zhang Junyong Lu Xingqiang Lin Zunqi

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, China)

Abstract Compared with symmetrical optical system, the optical system which consists of non-spherical lens can implement some special mathematical transforms. Based on the paraxial approximation, the tapered lens are investigated by geometrical optics, and the transmission function is derived. Furthermore, the transmission functions of cone and cylinder lens are also derived. With the help of these conclusions, the optical system consisting of double cylinder lens is constructed. This setup is the basic unit to implement anamorphic fractional Fourier transform. Finally, on the basis of scalar diffraction theory, the analytical solution is obtained. Furthermore, the system parameters are studied in detail in order to satisfy the requirements for various fractional Fourier transforms.

Key words geometric optics; tapered lens; transmission function; diffraction theory; anamorphic fractional Fourier transform

1 引 言

在光学信息处理中, 分数傅里叶变换是一个强有力的数学工具。1980 年 V. Namias^[1] 在量子力学研究中提出分数傅里叶变换, 1993 年光学专家 A. W. Lohmann^[2] 将其引入到光学领域, 并利用傅里叶变换相当于在 Wigner 分布函数相空间中旋转 90° 这一性质, 阐释了分数变换的物理意义。之后, 出现了各式各样的光学结构用于实现分数傅里叶变换、复数阶分数傅里叶变换、变尺度分数傅里叶变换、变形分数傅里叶变换等几种变换^[3~6]。目前这

类光学系统已被应用于信息加密、透镜设计、相位匹配、相关检测及小波变换等领域^[7~10]。

和传统对称的球面透镜系统不同, 随着特殊光学成像的要求, 越来越多的非对称元件用于光学系统, 这使得有必要对特殊透镜进行研究^[11~15]。本文基于傍轴近似, 首先对锥形透镜作了分析, 得到了椭圆锥透镜光程函数的解析表达式, 随后把椭圆锥结论推广到圆锥透镜和柱透镜。并基于以上光学元件分析, 构建了双柱透镜系统, 用于实现分数傅里叶变换。分数系统的可加性使得这一光学系统成为构成

收稿日期: 2009-09-23; 收到修改稿日期: 2009-11-12

作者简介: 张军勇(1982—), 男, 博士研究生, 主要从事激光束整形和纳米光学成像等方面的研究。

E-mail: zhangjin829@163.com

导师简介: 林尊琪(1942—), 男, 中国科学院院士, 博士生导师, 主要从事激光惯性约束核聚变各单元技术方面的研究。

E-mail: zqlin@mail.shenc.ac.cn

各种复杂的分数变换系统的基本单元。通过标量衍射理论,详细分析了结构参数对实现各种分数变换的条件。最后,给出了一个具体的实例,说明分数变换系统的灵活性和实用性。

2 锥形透镜的光程函数

锥形透镜的主视图及高度在 y 处的横截面图如图 1 所示,实线表示锥形透镜的一部分,虚线部分表示完整的锥体。已知锥体底面为椭圆,半短轴和半长轴分别记作 a 和 b ,锥形透镜的高度为 h 。透镜沿 z 方向的最大厚度为 d ,在高度 y 处的横截面上沿 z 方向的厚度记作 s 。

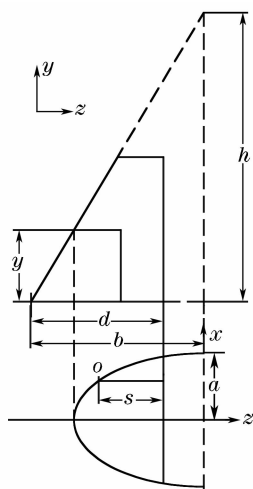


图 1 锥形透镜示意图

Fig. 1 Schematic of the tapered lens

由空间解析几何知识可知,椭圆锥方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 - \frac{y}{h}, \quad (1)$$

在高度 y 处的截面内任意 o 点处沿 z 方向的长度 s 为

$$s = b \sqrt{\left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{x^2}{a^2}} - (b - d), \quad (2)$$

依据光程的定义,得到光束通过椭圆锥透镜的光程函数的解析式,即

$$\begin{aligned} \Delta &= (d - s) + ns = \\ &nd + (n - 1)b \left[\sqrt{\left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{x^2}{a^2}} - 1 \right], \quad (3) \end{aligned}$$

式中 n 为锥透镜折射率。

假定在使用锥形透镜时只考虑近轴光束,则可以采用傍轴近似(在薄透镜假定下),即 y 远小于 h , x 远小于 a , y/h 和 x/a 为同阶小量。对(3)式进行二项式级数展开,并保留前两项,此时的光程函数为

$$\Delta = nd - (n - 1) \frac{b}{h} y - \frac{x^2}{2f(y)}, \quad (4)$$

式中 $f(y) = a^2(1 - y/h)/[b(n - 1)]$ 。

当 $a = b = R$ 时,椭圆锥过渡到圆锥,其光程函数为

$$\Delta = nd - (n - 1) \frac{R}{h} y - \frac{x^2}{2f(y)}, \quad (5)$$

式中 $f(y) = R(1 - y/h)/(n - 1)$ 。

当 h 趋于无穷大时,圆锥过渡到圆柱,其光程函数为

$$\Delta = nd - \{x^2/[2f(y)]\}, \quad (6)$$

式中 $f(y) = R/(n - 1)$ 。

(4) ~ (6) 式分别表示了光束在傍轴条件下通过椭圆锥、圆锥、圆柱薄透镜的光程函数。(4) 式的光程函数中第一项是常数项,第二项引起的相位变换相当于一个棱镜,第三项引起的相位变换类似会聚透镜,更准确地,它表示一个锥面波相位变换。所以,锥形透镜可以使一个平面波变换成一个偏折角为 $\arcsin[-(n - 1)b/h]$ 方向上的锥面波,其焦线为一条倾斜直线。过渡到柱体时,形成一条无偏折的焦线,可以用来校正透镜的像差。

3 双柱透镜构成的变形分数傅里叶变换系统

如图 2 所示,输入平面为 xy , 分数傅里叶变换平面为 uv 。两个柱透镜的焦距分别为 f_1 和 f_2 , 两者之间的距离为 z_2 , 输入平面 xy 到第一个柱透镜的距离为 z_1 , 后一个柱透镜到分数平面 uv 的距离为 z_3 。显然,当两个柱透镜正交放置,且 $z_2 = 0$ 时,图 2 的光学结构等价于第一类罗曼(Lohmann)光学结构,能够实现标准分数变换。

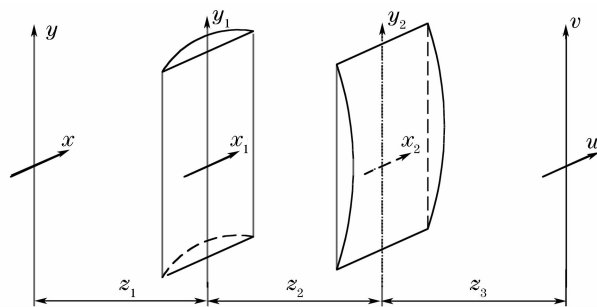


图 2 实现变形分数傅里叶变换的装置

Fig. 2 Setup for performing anamorphic fractional Fourier transforms

需要指出的是,该光学结构在其他文献中多有应用^[5, 6],但是没有给出此类结构输出函数的解析式。这里将进行近场条件下的传输特性研究,在傍轴条件下,基于菲涅耳衍射积分公式得到分数平面

uv 上的场分布

$$F(u, v) = \int_{\Sigma_2} \int_{\Sigma_1} \int_{\Sigma} f(x, y) \exp\left\{i\pi \frac{1}{\lambda z_1} [(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]\right\} dx dy \exp\left(-i\pi \frac{1}{\lambda f_1} x_1^2\right) \times \\ \exp\left\{i\pi \frac{1}{\lambda z_2} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]\right\} dx_1 dy_1 \exp\left(-i\pi \frac{1}{\lambda f_2} y_2^2\right) \times \\ \exp\left\{i\pi \frac{1}{\lambda z_3} [(u - x_2)^2 + (v - y_2)^2]\right\} dx_2 dy_2, \quad (7)$$

式中已略去与光强无关的因子。 $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ 分别表示坐标平面 xy, x_1y_1, x_2y_2 上的积分区域。

另外, 高斯函数的傅里叶变换是自身, 即

$$\mathcal{F}[\exp(-\pi x^2)] = \exp(-\pi f_x^2), \quad (8)$$

式中 \mathcal{F} 表示傅里叶变换, f_x 表示 x 方向上的空间频率。

利用(8)式对(7)式进行积分运算, 化简后得到

$$F(u, v) = \sqrt{\frac{i\lambda}{\xi_1}} \sqrt{\frac{i\lambda}{\xi_2}} \sqrt{\frac{i\lambda}{\xi_3}} \sqrt{\frac{i\lambda}{\xi_4}} \int_{\Sigma} f(x, y) \exp\left\{i \frac{\pi}{\lambda} \left[d_3 - \frac{d_3^2}{\xi_1} - \left(\frac{d_2 d_3}{\xi_1}\right)^2 \frac{1}{\xi_3}\right] u^2\right\} \times \\ \exp\left\{i \frac{\pi}{\lambda} \left[d_3 - \frac{d_3^2}{\xi_2} - \left(\frac{d_2 d_3}{\xi_2}\right)^2 \frac{1}{\xi_4}\right] v^2\right\} \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda} \left(d_1 - \frac{d_1^2}{\xi_3}\right) x^2\right] \times \\ \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda} \left(d_1 - \frac{d_1^2}{\xi_4}\right) y^2\right] \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d_1 d_2 d_3}{\xi_1} \frac{1}{\xi_3} ux\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d_1 d_2 d_3}{\xi_2} \frac{1}{\xi_4} vy\right) dx dy, \quad (9)$$

式中 $d_1 = 1/z_1, d_2 = 1/z_2, d_3 = 1/z_3, \xi_1 = d_2 + d_3, \xi_2 = d_2 - k_2 + d_3, \xi_3 = d_1 - k_1 + d_2 - d_2^2/\xi_1, \xi_4 = d_1 + d_2 - d_2^2/\xi_2, k_1 = 1/f_1, k_2 = 1/f_2$ 。

根据(9)式可以很容易得到以下几点结论:

- 1) 若 $z_1 = f_1, z_2 = f_1 + f_2, z_3 = f_2$, 系统实现在 x 方向分数傅里叶变换, 在 y 方向傅里叶变换;
- 2) 若 $z_1 = f_2, z_2 = f_1 + f_2, z_3 = f_1$, 系统实现在 x 方向分数傅里叶变换, 在 y 方向变尺度分数傅里叶变换;
- 3) 若 $d_1 = 1/z_1, z_2 = 0, d_3 = 1/z_3, f_1 > f_2, k_2 = d_1 + d_3$, 系统实现在 x 方向分数傅里叶变换, 在 y 方向自成像。

像场分布满足

$$F(u, v) = \int f\left(x, -\frac{d_3}{d_1} v\right) \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda} \left(d_1 - \frac{d_1^2}{M}\right) x^2\right] \times \\ \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d_1 d_3}{M} ux\right) dx, \quad (10)$$

式中已略去与光强无关的因子, $M = k_2 - k_1$ 。分数变换系统的标准焦距 $f_s = z_1(f_1/f_2 - 1)\tan(\Phi/2)$, 变换阶次 $p = 2\Phi/\pi, \cos \Phi = 1 - z_3/f_1$ 。

针对第三个特例, 通过光学设计软件 ZEMAX 进行了模拟分析。系统参数为: $f_1 = 240 \text{ mm}, f_2 = 60 \text{ mm}, z_1 = 150 \text{ mm}$, 由(10)式所要求的条件求出, $z_3 = 100 \text{ mm}, \cos \Phi = 7/12, \Phi = 54.315^\circ, f_s =$

626.587 mm, 分数傅里叶变换的阶次 $p = 0.6035$ 。材料为 BK7, 针对波长 $0.5876 \mu\text{m}$ 时的折射率 $n = 1.5168$ 。根据(6)式可以知道, 柱透镜的曲率半径 $R_1 = f_1 * (n - 1) = 124.032 \text{ mm}, R_2 = f_2 * (n - 1) = 31.008 \text{ mm}$, 假定 R_1 沿 x 方向, R_2 沿 y 方向。入射光为高斯光束, 束腰半径为 0.3 mm , 系统孔径 4 mm , 此时像场强度分布如图 3 所示。

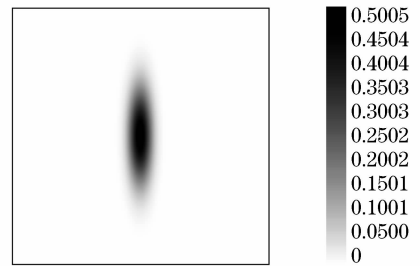


图 3 分数平面上的光强度分布图

Fig. 3 Intensity distribution on the fractional Fourier transform plane

由图 3 明显可以看到, 初始光强度是圆对称的高斯光束, 而经过分数系统后, 光束失去了圆对称性成为像散高斯光束, 中心强度在 x 和 y 方向上出现了不同的宽度。相反, 对比标准透镜系统, 高斯光束经过透镜系统成像仍然为高斯光束, 而分数系统下高斯光束成像不再保持变换的各向同性, 这正体现了分数变换系统的灵活性。

4 结 论

对称系统可以实现各向同性的数学操作,而非对称系统可以实现各向异性的数学操作。采用傍轴近似,用几何光学方法分析了椭圆锥、圆锥、圆柱的光程函数。详细分析了实现变形分数系统的基本单元双柱透镜的结构参数,以及实现各种不同分数变换所满足的条件,对这一基本光学结构的分析研究有助于更好地理解激光束在分数系统中的传输特性。

参 考 文 献

- 1 V. Namias. The fractional Fourier transform and its application in quantum mechanics [J]. *J. Inst. Math. Appl.*, 1980, **25**(3):241~265
- 2 A. W. Lohmann. Image rotation, Wigner rotation and the fractional Fourier transforms [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(11):2181~2186
- 3 Chun-Ching Shih. Optical interpretation of a complex-order Fourier transform [J]. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(10):1178~1180
- 4 Jiang Zhiping. Scaling law and simultaneous optical implementation of various orders fractional Fourier transforms [J]. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(23):2408~2410
- 5 P. Andres, C. Ferreira, E. Bonet. Fraunhofer diffraction patterns from apertures illuminated with nonparallel light in nonsymmetrical Fourier transforms [J]. *Appl. Opt.*, 1985, **24**(10):1549~1552
- 6 D. Mendlovic, Y. Bitran, R. G. Dorsch *et al.*. Anamorphic fractional Fourier transform: optical implementation and applications [J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(32):7451~7456
- 7 G. Unnikrishnan, J. Joseph, K. Singh. Optical encryption by double-random phase encoding in the fractional Fourier domain [J]. *Opt. Lett.*, 2000, **25**(12):887~889
- 8 Weimin Jin, Yupei Zhang. Color pattern recognition based on the joint fractional Fourier transform correlator [J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2007, **5**(11):628~631
- 9 Huadong Zheng, Yingjie Yu, Tao Wang *et al.*. High-quality three-dimensional holographic display with use of multiple fractional Fourier transform [J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2009, **7**(12):1151~1154
- 10 Zhang Haiying, Ran Qiwen, Zhang Jin. Optical image encryption and multiple parameter weighted fractional Fourier transform [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(s2):117~120
张海莹,冉启文,张 晋. 光学图像加密与多参数加权类分数傅里叶变换[J]. *光学学报*, 2008, **28**(s2):117~120
- 11 G. A. Massey, A. E. Siegman. Reflection and refraction of Gaussian light beams at tilted ellipsoidal surfaces [J]. *Appl. Opt.*, 1969, **8**(5):975~978
- 12 S. Gangopadhyay, S. Sarkar. Laser diode to single mode-fiber excitation via hyperbolic lens on the fiber tip: formulation of ABCD matrix and efficiency computation [J]. *Opt. Commun.*, 1996, **132**(1):55~60
- 13 S. Gangopadhyay, S. Sarkar. ABCD matrix for reflection and refraction of Gaussian light beams at surfaces of hyperboloid of revolution and efficiency computation for laser diode to single-mode fiber coupling by way of a hyperbolic lens on the fiber tip [J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(33):8582~8586
- 14 F. A. Rahman, K. Takahashi, C. H. Teik. Theoretical analysis of coupling between laser diodes and concially lensed single-mode fibers utilizing ABCD matrix method [J]. *Opt. Commun.*, 2003, **215**(1):61~67
- 15 Yang Qingguo, Li Zeren, Peng Qixian *et al.*. Theoretical calculation and design for cylindrical and conical bent crystal spectrograph [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(2):382~387
阳庆国,李泽仁,彭其先等. 圆柱面和圆锥面弯晶谱仪的理论计算及设计[J]. *光学学报*, 2009, **29**(2):382~387