

文章编号: 0258-7025(2010)05-1218-04

一种快速高精度的相位恢复迭代法

黄利新^{1,2} 姚新¹ 蔡冬梅² 郭永康¹ 姚军² 高福华¹

(¹ 四川大学物理学院纳光子研究所, 四川 成都 610064; ² 中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209)

摘要 在传统 GS 算法的基础上, 根据角谱传播理论并引入一简单的梯度, 提出一种快速、高精度相位恢复迭代算法——加速角谱迭代法。该算法使用三个面(即一个输入面和两个输出面)的强度信息恢复输入面光场的相位分布。数值模拟结果表明, 该算法能在二维情况下快速准确地恢复各种输入面光场的相位分布, 并且大幅度地提高了复杂光场的相位恢复精度。在模拟实验中多次选取随机初始迭代值, 该算法的收敛结果唯一, 表明算法有良好的收敛性能。

关键词 光计算; 相位恢复; 迭代算法; 加速角谱传递函数; 复杂光场

中图分类号 O436 文献标识码 A doi: 10.3788/CJL20103705.1218

A High Accuracy and Fast Iterative Algorithm for Phase Retrieval

Huang Lixin^{1,2} Yao Xin¹ Cai Dongmei² Guo Yongkang¹ Yao Jun² Gao Fuhua¹

(¹ College of Physical Science and Technology, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China)
(² Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China)

Abstract Based on conventional GS algorithm, an accuracy and fast algorithm for phase retrieval is presented. This algorithm, which can be called the accelerated angular spectrum iterative approach, induces a gradient by using the angular transfer functions. The intensity distribution of three planes, e. g. an incident plane and two emergent planes, is employed to retrieve the phase distribution of incident optical field. The simulation result shows this algorithm can retrieve the phase distribution of an arbitrary two-dimensional incident optical field in high accuracy. The retrieval accuracy of complicated optical field is greatly enhanced. Robustness and sensibility of this algorithm are evaluated and the algorithm exhibits good convergence.

Key words optical computing; phase retrieval; iterative algorithm; accelerated angular spectrum transfer function; complex optical field

1 引言

从光强信息中恢复光场的相位是物理和工程中的一个基础性问题。相位恢复在很多方面都有所应用, 如 X 射线结晶学^[1]、电子显微镜^[2]、天文学^[3]、量子关联衍射成像^[4]、波前探测^[5]、近场天线诊断学以及反散射问题^[6,7]。早在 1971 年, Gerchberg 等^[8]提出由测量两个光强度信息来恢复输入和输出平面上光场相位分布的算法, 即 GS 算法。在此基础上又发展了多种改进算法, 例如杨-顾算法 (Y-

G)^[9]、误差减少算法 (RE)、输入输出算法 (IO)、混合输入输出算法 (HIO)^[10]等, 它们均可通过两个面(即输入面和输出面)的强度信息, 实现对输入面的相位进行恢复。不过, 以上算法均具有迭代不确定性、收敛速度慢等缺点。此后又提出采用三个垂轴面或更多垂轴面上的强度信息进行相位恢复^[11~13], 该类算法的收敛性有一定的改进, 但其收敛速度仍较慢。

本文在传统 GS 算法的基础上, 提出了一种可

收稿日期: 2009-06-19; 收到修改稿日期: 2009-07-24

基金项目: 国家 863-804(2008AA0920)资助课题。

作者简介: 黄利新(1986—), 男, 硕士研究生, 主要从事相位恢复方面的研究。E-mail: lixhuang@gmail.com

导师简介: 高福华(1975—), 男, 教授, 主要从事微纳光子学、强激光及光束质量控制等方面的研究。

E-mail: gaofuhua@scu.edu.cn

对复杂光场进行快速高精度相位恢复的加速角谱迭代算法——基于角谱传播理论构建输入面与输出面光场之间的正逆向衍射过程,并引入梯度方法利用三个面(即一个输入面和两个输出面)的强度信息恢复输入面光场的相位分布。由于衍射角谱传播理论严格满足亥姆霍兹方程,采用其处理迭代过程中输入面与输出面光场间的衍射计算问题可以得到更精确可靠的结果^[14]。而梯度法的引入既可确保对复杂光场相位恢复的良好收敛性,又使算法的收敛速度得到很大提高。

2 原 理

如图 1 所示,输入面及选取的各输出面均垂直于光路系统光轴方向 z ,分别与之相交于 $z = z_k$ 处, $k = 0, 1, 2$,输入面位于 $z = z_0$ 处。各面的强度、复振幅、振幅及相位分布分别简记为 $I_k, E_k, \rho_k, \varphi_k$ 。

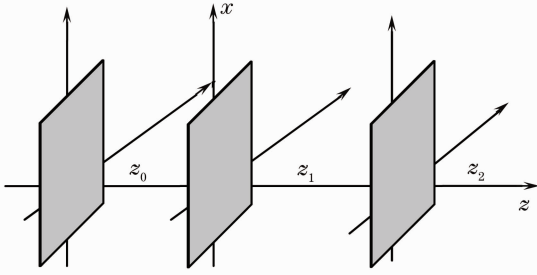


图 1 光路示意图

Fig. 1 Schematic of optical path

假设各面之间的光场变换关系服从标量衍射理论,根据角谱传播理论利用角谱传递函数可构建各面光场间的正向逆向衍射计算过程^[15]。任意两个面的光场 E_j 与 E_h 之间满足关系

$$E_j(x_j, y_j) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[E_h(x_h, y_h)]H_B(f_{x_j}, f_{y_j})\}, \quad (1)$$

式中

$$H_B(f_{x_j}, f_{y_j}) = \exp[ikd_{jh} \sqrt{1 - (\lambda f_{x_j})^2 - (\lambda f_{y_j})^2}], \quad (2)$$

$$f_{x_j} = \frac{m}{\Delta L_h}, f_{y_j} = \frac{n}{\Delta L_h}, (m, n = -N/2, -N/2 + 1, \dots, N/2 - 1) \quad (3)$$

$d_{jh} = z_j - z_h$,即等于第 j 面与第 h 输出面之间的距离(d_{jh} 为正时表示正向衍射过程,为负时表示逆向衍射过程); $k = 2\pi/\lambda$, λ 为激光波长, $\mathcal{F}\{\}$ 为傅里叶变换, $\mathcal{F}^{-1}\{\}$ 为傅里叶逆变换, ΔL_h 为计算宽度, m, n 均为采样点数, N 为采样总数。对其进行离散数值计算时,可借助快速傅里叶变换(FFT)完成。

传统迭代算法具有收敛速度较慢的缺点。为了

加快算法的收敛速度,在保证算法向目标最优解迭代时,通过加大每次迭代的步长实现。本文提出将一简单的梯度^[16]引入角谱迭代法中对其迭代过程进行加速,形成加速角谱迭代法。该算法可使相位恢复计算的收敛速度得到较大的提高,并且消除了文献[16]在普通 GS 算法中使用该梯度加速后不收敛的现象。梯度方法的主要思想是将当次的迭代值 φ_0^k 与上次的迭代值 φ_0^{k-1} 之差 h_k 作为梯度方向,将 $\alpha_k h_k$ 作为迭代的附加值,加大算法的梯度步长,从而达到加快算法收敛速度的目的。该梯度除了迭代值外不需要预先知道其他信息,并且计算过程非常简单。加速角谱迭代法算法流程如图 2 所示。

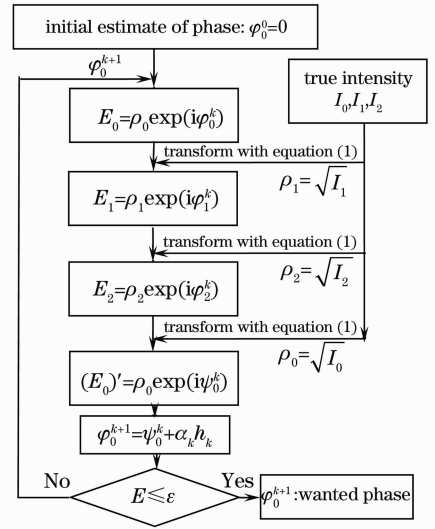


图 2 加速角谱迭代算法流程图

Fig. 2 Procedure of accelerated angular spectrum iterative method

在流程图中, h_k, g_k, α_k 的表达式为

$$h_k = \varphi_0^k - \varphi_0^{k-1}, \quad (4)$$

$$g_k = \psi_0^k - \varphi_0^k, \quad (5)$$

$$\alpha_k = \frac{\sum g_k g_{k-1}}{\sum g_{k-1} g_{k-1}}, (0 < \alpha_k < 1) \quad (6)$$

按照流程图的方式反复迭代,直到振幅的误差 E 达到设计精度或者达到设置的最大迭代次数为止,

$$E = \sum (\rho_0 - \rho_0^n)^2 / \sum \rho_0^2, \quad (7)$$

式中 ρ_0 为探测器接收到的真实振幅分布, ρ_0^n 为第 n 次迭代结束时输入面的振幅分布。

3 模拟实验及结果分析

实验 1,将由相位分布在 $[-0.45\pi, 0.9\pi]$ 球差作为待恢复相位。采样点数为 $512 \text{ pixel} \times$

512 pixel, 采样区域的宽度为 $20\text{ mm} \times 20\text{ mm}$, 波长为 $0.6328\text{ }\mu\text{m}$, 输出面 1, 2 与输入面的距离分别为 300 mm 和 1000 mm , 假定输入面的强度分布是均匀的, 即 $I_0(x_0, y_0) \equiv 1$, 如图 3 所示。

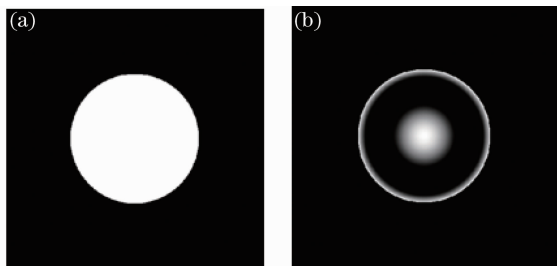


图 3 实验 1 中输入面的复振幅。(a) 振幅; (b) 相位

Fig. 3 Complex amplitude in the input plane in experiment 1. (a) amplitude; (b) phase

相位恢复精度可用相对均方根 (RMS) 误差 E_{RMS} 来评估,

$$E_{\text{RMS}} = \left(\frac{\sum_{i,j} |\varphi_{ij}^{\text{ret}} - \varphi_{ij}^{\text{true}}|^2}{\sum_{i,j} |\varphi_{ij}^{\text{true}}|^2} \right)^{1/2} \times 100\%, \quad (8)$$

式中 $\varphi_{ij}^{\text{true}}$ 为相位某个像元 (i, j) 的实际相位值, $\varphi_{ij}^{\text{ret}}$ 为使用算法恢复的相位同一个像元 (i, j) 的相位值。

迭代初始值取为零相位分布, 用加速角谱迭代算法迭代 75 次, 结果如图 4 所示。可以看出真实相位得到了非常好的复原。图 5 展示了 E 和迭代次数的关系。可以明显看出加速算法 E 的下降速度比传统算法 E 的下降速度快得多。在图 5 中, 当加速角谱迭代法的迭代次数为 75 时, $E_{\text{RMS}} = 0.936\%$ 。然而, 当角谱迭代法的迭代次数为 800 时, $E_{\text{RMS}} = 1.393\%$ 。由此可见加速角谱迭代法的收敛速度提高了 10 倍以上。

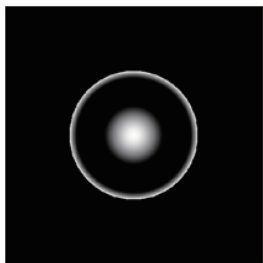


图 4 实验 1 中相位恢复

Fig. 4 Retrieval phase in experiment 1

实验 2, 将相位值在 $[0, 1.2\pi]$ 的图像“Lena”作为待恢复相位, 因为此图像含有丰富的不同分辨率的图像细节, 对于从视觉层面上评估图像重建精度是非常有益的。其他条件同实验 1, 如图 6 所示。

迭代初始值取为零相位分布, 后用加速角谱迭代算法迭代 45 次, 结果如图 7 所示。可以看出真实

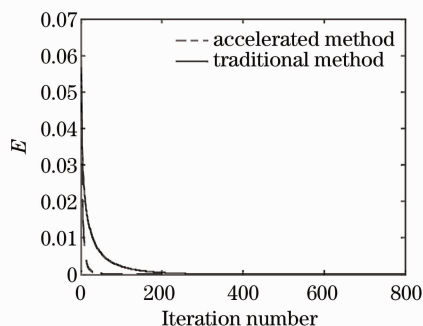


图 5 实验 1 中 E 与迭代次数的关系

Fig. 5 E versus iteration number in experiment 1

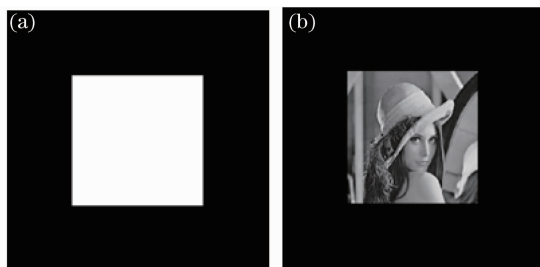


图 6 实验 2 中输入面的复振幅。(a) 振幅; (b) 相位

Fig. 6 Complex amplitude in the input plane in experiment 2. (a) amplitude; (b) phase

相位得到了非常好的复原。图 8 展示了 E 和迭代次数的关系。可以明显看出加速算法 E 的下降速度比传统算法的下降速度快得多。在图 8 中, 当加速角谱迭代法的迭代次数为 45 时, $E_{\text{RMS}} = 0.880\%$ 。然而, 当角谱迭代法的迭代次数为 200 时, $E_{\text{RMS}} = 1.297\%$ 。由此可见加速角谱迭代法的收敛速度提高了 4 倍以上。

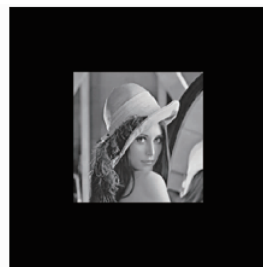


图 7 实验 2 中相位恢复

Fig. 7 Retrieval phase in experiment 2

4 结 论

在传统 GS 算法的基础上, 根据角谱传播理论, 使用三个面 (一个输入面和两个输出面) 的强度信息, 通过梯度法加快收敛速度, 提出一种改进型相位恢复迭代算法——加速角谱迭代法。该梯度的计算除了迭代值外不需要预先知道其他信息, 且计算负担小。数值模拟实验表明, 加速角谱迭代法能恢复复杂的相

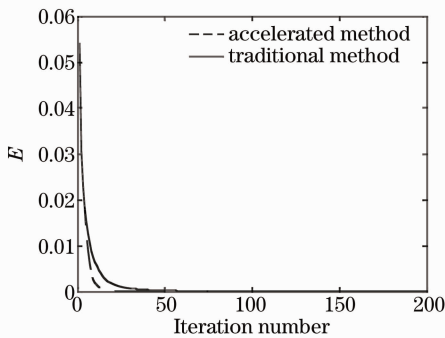


图 8 实验 2 中 E 与迭代次数的关系

Fig. 8 E versus iteration number in experiment 2

位分布,消除了一般相位恢复算法迭代不确定和容易陷入停滞的问题,并具有较快的收敛速度。

参 考 文 献

- 1 R. P. Millane, Phase retrieval in crystallography and optics[J]. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 1990, **7**(3): 394~411
- 2 D. L. Misell. A method for the solution of the phase retrieval problem in electronic microscopy[J]. *J. Phys. D:Appl. Phys.*, 1973, **6**: L6~L9
- 3 B. H. Dean, D. L. Aronstein, J. S. Smith *et al.*. Phase retrieval algorithm for JWST flight and test-bed telescope, in Space Telescopes and Instrumentation I: Optical Infrared and Millimeter[C]. *SPIE*, 2006, **6265**: 626511
- 4 Liu Yongfeng, Zhang Minghui, Shen Xia *et al.*. Application of phase retrieval algorithm to quantum correlated diffraction imaging[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(11): 2075~2081
刘永峰,张明辉,沈夏等. 相位恢复算法在量子关联衍射成像中的应用研究[J]. *光学学报*, 2007, **27**(11): 2075~2081
- 5 Heng Mao, Xiao Wang, Dazun Zhao. Application of phase-diverse phase retrieval to wavefront sensing in non-connected complicated pupil optics[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2007, **5**(7): 397~399
- 6 R. Pierri, G. D'Elia, F. Soldovieri. A two probes scanning phaseless near-field far-field transformation technique[J]. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 1999, **47**: 792~802
- 7 G. Hislop, G. C. James, A. Hellicar. Phase retrieval of scattered fields[J]. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2007, **55**: 2332~2341
- 8 R. W. Gerehberg, W. O. Saxton. A practical algorithm for the determination of phase form image and diffraction phase pictures [J]. *Optik*, 1972, **35**(2): 237~246
- 9 G. Z. Yang, B. Y. Gu, B. Z. Dong. Theory of the amplitude-phase retrieval in an any linear transform system and its applications[J]. *Inter. J. Modern Phys.*, 1993, **B7**: 3153~3224
- 10 J. R. Fienup. Phase retrieval algorithms: a comparison[J]. *Appl. Opt.*, 1982, **21**(15): 2758~2769
- 11 Laurent Bruel. Numerical phase retrieval from beam intensity measurements in three planes[C]. *SPIE*, 2003, **4932**: 590~598
- 12 Zeng Fa, Tan Qiaofeng, Wei Xiaofeng *et al.*. A phase retrieval algorithm for complex optical field[J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(3): 339~342
曾发,谭峭峰,魏晓峰等. 一种可对复杂光场进行相位恢复的算法[J]. *中国激光*, 2006, **33**(3): 339~342
- 13 Zeng Fa, Tan Qiaofeng, Wei Xiaofeng *et al.*. Complex optical field retrieved from intensity distributions on several fractional Fourier transform planes[J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(12): 1621~1625
曾发,谭峭峰,魏晓峰等. 基于多个分数阶次的复杂光场相位恢复算法[J]. *中国激光*, 2006, **33**(12): 1621~1625
- 14 Joseph W. Goodman. Introduction to Fourier Optics[M]. 2nd edition. McGraw-Hill, 1996, Chap. 3
- 15 Li Junchang. Diffraction of Laser and Calculation on Thermal Acting[M]. Beijing: Science Press, 2008. 113~134
李俊昌. 激光的衍射及热作用计算[M]. 北京: 科学出版社, 2008. 113~134
- 16 David S. C. Biggs, Mark Andrews. Acceleration of iterative image restoration algorithms [J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**: 1766~1775