

文章编号: 0258-7025(2010)04-1012-06

# 基于倾斜多高斯光束叠加的均匀化照明整形方法

姜燕冰 严惠民 张秀达 姚金良

(浙江大学现代光学仪器国家重点实验室, 国家光学仪器工程技术研究中心, 浙江 杭州 310027)

**摘要** 为了实现大功率半导体激光器堆叠进行均匀化照明设计, 提出了基于倾斜多高斯光束(MTGB)叠加的均匀化照明方法。推导了倾斜多高斯光束模型的平均光强解析表达式, 发现该光束模型的光强分布具有角分布平顶特性且不随传播而改变。通过在角度域和傅里叶频域对该光束模型的均匀性分析, 得出影响其均匀性的因素, 给出了数值计算验证。最后在 ASAP 光学软件中, 实现了把半导体激光器堆叠整形形成倾斜多高斯光束模型的具体方法, 获得了  $12^\circ \times 10^\circ$  的均匀化照明效果。结果显示, 该方法在半导体激光器 Bar 条间距快轴方向装配误差有  $\pm 50 \mu\text{m}$  时, 仍然可以获得 75% 的均匀性和 80% 以上的效率。方案具有现实可行性, 适合作为主动激光成像的照明系统设计。

**关键词** 光学设计; 均匀化照明; 倾斜多高斯光束; 半导体激光器堆叠

中图分类号 O436 文献标识码 A doi: 10.3788/CJL20103704.1012

## Beam Shaping Method for Uniform Illumination by Superposition of Multi-Tilted Gaussian Beams

Jiang Yanbing Yan Huimin Zhang Xiuda Yao Jinliang

(National Engineering Research Center for Optical Instrument, National Key Laboratory of Modern Optical Instrument, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310027, China)

**Abstract** A beam shaping method for laser diodes stack by superposition of tilted fundamental mode Gaussian beams to form a nearly uniform illumination is proposed. The analytical formula for average intensity of the multi-tilted Gaussian beams (MTGB) propagating is derived and used to study the uniform properties of the beam profile by the Fourier analysis method. It is found that the MTGB maintain the flat-topped shape as it propagates. And the uniform properties of the MTGB are closely related to the parameters of fundamental beams and superposition. Both analytical formula derivation and the numerical examples are illustrated. The method is then used to reconfigure the beams of a high power laser diodes stack to form a multi-tilted Gaussian beam shape for a  $12^\circ \times 10^\circ$  field angle illumination, which is simulated in ASAP software. The shaping method with the proper uniformity and high efficiency is well suitable for laser illuminator in laser active imaging and detecting system.

**Key words** optical design; uniform illuminate; multi-tilted Gaussian beam; laser diode stack

### 1 引言

半导体激光器堆叠是为了获得集成大功率输出, 利用半导体激光器单元串并联形式组成的半导体激光输出模块, 具有输出功率高、光电转换效率高、激光强度调制方便、体积小、寿命长等特点, 非常适合作为主动成像激光测量系统的主动照明光源<sup>[1~5]</sup>。集成后的半导体激光器堆叠阵列的远场光

强呈现高斯分布, 且具有  $40^\circ$  快轴发散角和  $8^\circ$  慢轴发散角度。这种光束特征不能满足主动成像激光测量系统的照明需要。需要对半导体激光器堆叠出射光束进行均匀化照明设计。

目前针对半导体激光器面阵列的光束整形照明技术主要有两大类方法。在小视场照明用途中, 直接在快轴方向和慢轴方向加微透镜阵列, 对发散角

收稿日期: 2009-06-25; 收到修改稿日期: 2009-09-02

基金项目: 国家 973 计划(2009CB72400404)和国家 863 计划(2009AA12Z142)资助课题。

作者简介: 姜燕冰(1981—), 男, 博士研究生, 主要从事激光雷达、非成像光学方面的研究。E-mail: zjujyb@163.com

导师简介: 严惠民(1961—), 男, 博士, 教授, 主要从事激光雷达、光电检测方面的研究。E-mail: yhm@zju.edu.cn

度都进行准直压缩以获得小的发散角。如 1998 年加拿大的 INO 公司报道的利用平凸微透镜阵列和梯度折射率微透镜阵列对半导体激光器阵列的慢轴和快轴分别进行准直后,直接照射到 1 km 的远场获得  $2^\circ \times 2^\circ$  的光束形状,但是其照明视场分布仍然是高斯型分布<sup>[6]</sup>。在大视场照明系统中,先将半导体激光器堆叠的光耦合到多模光纤中,利用光纤多次反射的混光效果,在光纤输出端获得光强均匀化和模式对称化,再经光学系统投影到照明区域。该方法需要把阵列的光耦合到光纤,这个过程技术难度高、耦合效率低,且耦合成本高。2003 年 Y. Lutz 等<sup>[7]</sup>采用此类方法获得  $12^\circ \times 10^\circ$  的视场,总效率较低,只有 55%。

采用多光束叠加方法是实现激光均匀化照明的一种重要途径,其中最为著名的是平顶多高斯光束模型方法(FMGB),该方法的理论依据是一个平顶函数可以分解成多个相同的平行高斯光束的平移叠加,但是这种叠加只能在特定位置处保持平顶特性,当光束继续传播时高斯光束光斑半径不断增加,而重叠的区域逐渐增多,最终远场光强分布会出现和单个高斯光束同样的分布函数,不再具有平顶特性<sup>[8~11]</sup>。因而这类方法很适合于已知工作距离的光束整形照明,对于未知距离目标的主动探测,仅适合极小视场的均匀化照明应用,因为准直后的每个高斯光束发散角极小,能在较宽区域内保持平顶特性,如 1998 年 C. Higgs 等<sup>[12,13]</sup>在主动探测中把准直后的大功率激光分束成 9 个非相干光束充满照明区域以达到均匀化照明的目的,总视场角只有 0.11 mrad。

而基于高斯光束角分布的不变性,可利用多个倾斜的高斯光束对所需视场角进行叠加重构,获得光强角分布平顶特性不随传播改变的照明光束,从而满足大视场主动探测的均匀化照明需要。本文提出利用半导体激光器堆叠的出射光束构建多倾斜高斯光束(MTGB)模型来构建均匀化照明光束的方法,从理论上推导出该模型解析式,分析出影响其均匀性的因素。最后在 ASAP 光学软件中把该方法具体实现,发现该方法对半导体激光器堆叠结构精度要求低,光能利用率达到 80% 以上,均匀化效果在目前结构误差下可以达到 75%。

## 2 倾斜多高斯光束模型

### 2.1 解析表达式

通过坐标轴的变换来从普通基模高斯光束获得

倾斜基模高斯光束。如图 1 所示,在  $(t_x, t_y, t_z)$  直角坐标系下,沿着  $t_z$  轴方向传播的基模高斯光束,可以写为

$$E_t(t_x, t_y, t_z) = C_0 \frac{\omega_0}{\omega(t_z)} \exp\left\{-i[kt_z - F(t_z)] - (t_x^2 + t_y^2) \left[ \frac{1}{\omega^2(t_z)} + \frac{ik}{2R(t_z)} \right]\right\}, \quad (1)$$

式中  $\omega(t_z) = \omega_0 \sqrt{1 + (t_z/t_{z0})^2}$  为场振幅减少至中心值的  $1/e$  所定义的光斑半径,  $R(t_z) = t_z \left[ 1 + \left( \frac{t_{z0}}{t_z} \right)^2 \right]$  为等相面的曲率半径,  $t_{z0} = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}$  为瑞利距离,  $F(t_z)$  为高斯光束附加的相位。

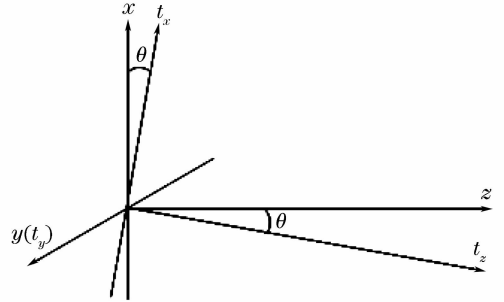


图 1  $(x, y, z)$  坐标系和  $(t_x, t_y, t_z)$  坐标系的相互位置示意图

Fig. 1 Diagram of the coordinate system  $(x, y, z)$  and system  $(t_x, t_y, t_z)$

现设另一个坐标系  $(x, y, z)$  是通过在  $(t_x, t_y, t_z)$  坐标系中  $t_z$  轴倾斜旋转  $\theta$  角而成,两个坐标系的原点相同,  $y$  轴和  $t_y$  轴相互平行。设定  $\theta$  在  $15^\circ$  以内,在近轴近似下两个坐标系之间的转换关系为

$$\begin{cases} t_x \approx x + z\theta, \\ t_y = y, \\ t_z \approx z - x\theta, \end{cases} \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式中,得到倾斜高斯光束的表达式<sup>[14]</sup>

$$E(x, y, z) = \frac{C_0}{\sqrt{1 + H_1^2}} \exp\left[-\frac{H_2}{\omega_0^2(1 + H_1^2)}\right] \times \exp(i\Phi), \quad (3)$$

式中  $\Phi = -kz + 2k\theta x + \arctan H_1 - \frac{kH_2}{2z_R(H_1 + H_1^2)}$ ,  $H_1 = \frac{1}{z_R}(z - x\theta)$ ,  $H_2 = (x + \theta z)^2 + y^2$ 。

光强度  $I$  定义为单位时间内垂直于能流方向单位面积上通过的能量的时间平均值。利用光强计算公式  $\langle I(x, y, z) \rangle = \langle E(x, y, z) \cdot E^*(x, y, z) \rangle$ , 可得倾斜高斯模型的平均光强表达式为

$$I(x, y, z) = \frac{1}{1 + H_1^2} \exp\left[-\frac{2H_2}{\omega_0^2(1 + H_1^2)}\right]. \quad (4)$$

利用多个不同倾斜角度的不相干高斯光束在角度域的叠加分布,构成一种新的光束形式:倾斜多高斯光束。设定其中的倾斜角度数组合是一个关于零对称的等差数列,公差为 $\theta_d$ ,且为不相干光束的叠加。取沿着 $y$ 轴方向的切面分布,光强分布表达式为

$$I(\Theta, z) = \left(\frac{z_R}{z}\right)^2 \sum_{n=-K}^K \frac{1}{(1 - n\theta_d\Theta)^2} \frac{4}{\sqrt{2\pi}\theta_G} \times \exp\left[-\frac{\pi(\Theta + n\theta_d)^2}{\alpha^2\theta_d^2(1 - n\theta_d\Theta)^2}\right], \quad (5)$$

式中 $\Theta = \frac{x}{z}$ ,  $\theta_G = \frac{2\lambda}{\pi\omega_0}$ 为高斯光束的发散全角,  $\alpha = \sqrt{2\pi}\theta_G/(4\theta_d)$ 为一个与均匀相关的参数,定义为均匀化系数。

当 $x, z$ 的相对大小使得 $\Theta$ 满足近轴近似条件,即 $n \cdot \theta_d < 0.27 \text{ rad}(15^\circ)$ ,  $\Theta = \frac{x}{z} < 0.27 \text{ rad}(15^\circ)$ , 有 $(1 \pm \theta_d \cdot n \cdot \Theta)^2 \approx 1 \pm 2 \cdot \theta_d \cdot \Theta \cdot n \approx 1$ 。可以把(5)式约化为

$$I(\Theta, z) = \left(\frac{z_R}{z}\right)^2 \sum_{n=-K}^K \frac{4}{\sqrt{2\pi}\theta_G} \times \exp\left[-\frac{\pi(\Theta + n \cdot \theta_d)^2}{\alpha^2\theta_d^2}\right]. \quad (6)$$

(6)式为所述倾斜多高斯光束模型的表达式,其中定义 $K$ 为MTGB的多高斯级数。根据(6)式进行数值分析,取 $K=4$ ,  $\theta_G=0.06 \text{ rad}$ ,  $\theta_d=0.02 \text{ rad}$ ,得到的波形分布如图2所示。

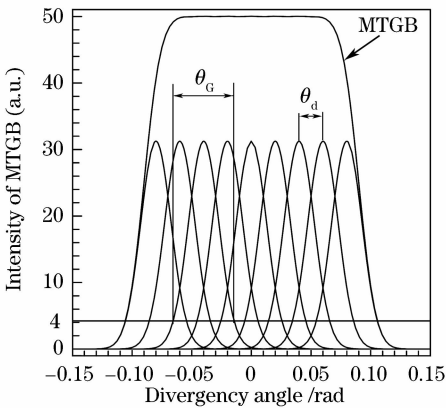


图2 倾斜多高斯模光束的外形轮廓

Fig. 2 MTGB profile

将 $m = \Theta/\theta_d$ 代入(6)式并保持每个单元高斯光束能量归一化,可以得到

$$I(m, z) = \left(\frac{z_R}{z}\right)^2 \sum_{n=-K}^K \frac{1}{\alpha} \exp\left[-\frac{\pi(m+n)^2}{\alpha^2}\right]. \quad (7)$$

(7)式与Tovar的平顶多高斯光束模型公式相似<sup>[8]</sup>, 但有一个重要区别:MTGB是在角度域进行偏移叠加构成平顶函数,而平顶多高斯光束则是平行的(非倾斜)高斯光束在束腰位置上偏移叠加构成平顶函数<sup>[8-11]</sup>。因此,MTGB光束光强分布函数在角度域形成平顶分布,而平顶多高斯光束则最终会在远场形成与组元(组成单元)高斯分布一样的光强分布。根据该光束模型可以获得一种角分布均匀光强分布,这对于远场均匀照明是非常适合的。并且根据(6)式可以看出 $z$ 的改变并不改变整个光束轮廓的形状,仅以平方的倒数形式进行了幅度衰减。

## 2.2 MTGB的均匀性分析

在角度域和其傅里叶频域上分析MTGB的均匀性特性。在频率域进行分析的原因是由于一个函数,波形波动频繁的部分出现在频率域中高频部分,波形变化不多的部分则更多地出现在低频部分,因此通过频率域分析来考察MTGB的轮廓波动情况<sup>[15]</sup>。

为了方便求傅里叶变换,对(7)式进行重新组合得

$$I(m, z) = \left(\frac{z_R}{z}\right)^2 \left[ \text{comb}(m) \cdot \text{rect}\left(\frac{m}{K}\right) \right] * \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{\pi m^2}{\alpha^2}\right), \quad (8)$$

式中“ $*$ ”表示卷积运算,  $\text{comb}(m) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(m-i)$ ,

$$\text{rect}\left(\frac{m}{K}\right) = \begin{cases} 1, & -K \leq m \leq K \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

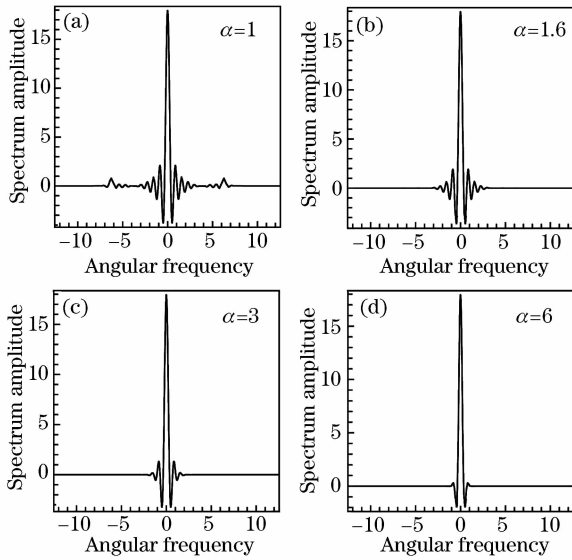
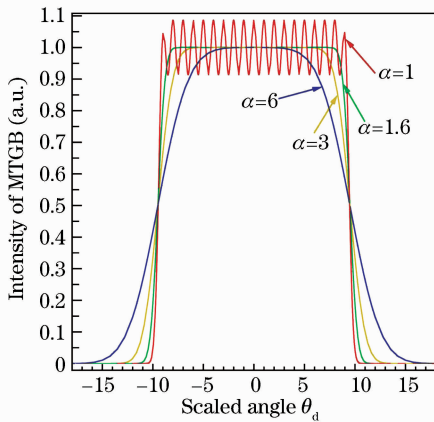
从(8)式易获得其傅里叶变换式为

$$\mathcal{F}[I(m, z)] = \left(\frac{z_R}{z}\right)^2 \exp\left(-\frac{\alpha^2 \omega^2}{4\pi}\right) \times \sum_{i=0}^{\infty} 2K \text{sinc}\left[\frac{(\omega \pm 2\pi i)K}{\pi}\right]. \quad (9)$$

(6)式的特性是很难精确表述的,而从(9)式可知MTGB的傅里叶变换是角频率 $\omega$ 的方程,是对一个高斯函数 $\exp\left(-\frac{\alpha^2 \omega^2}{4\pi}\right)$ 进行间隔为 $2\pi$ 的sinc函数的采样叠加。由于高斯函数随着 $\omega$ 的增加快速衰减,所以 $\omega = \pm 2\pi$ 或者更高的频率时其频谱的幅度值与 $\omega = 0$ 的频谱幅度值的比值小于 $\exp(-\pi\alpha^2)$ ,且随着 $\alpha$ 的变大衰减得更快。

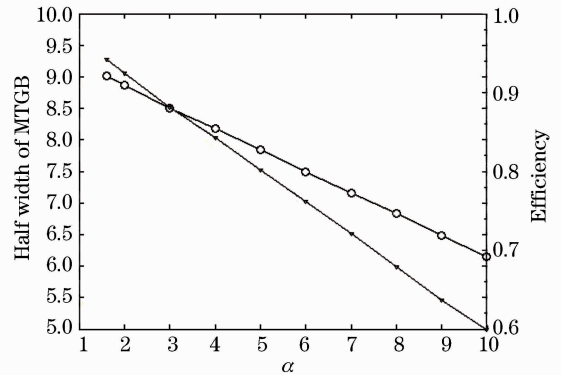
为了更直观地了解其频域特性,取 $K=9$ ,  $\alpha=1, 1.6, 3, 6$ ,对(9)式进行数值模拟计算,得到的频谱特性如图3所示,图4是与之对应的角度分布特性。

均匀化系数 $\alpha$ 的大小决定着MTGB平顶部

图3 MTGB的傅里叶频谱随 $\alpha$ 的变化Fig. 3 Evolution of the Fourier spectrum amplitude of a MTGB profile at several uniform coefficients  $\alpha$ 图4 不同 $\alpha$ 下MTGB的波形轮廓Fig. 4 Evolution of the average intensity of a MTGB profile at several uniform coefficients  $\alpha$ 

分的均匀特性,越大越均匀。从有毛刺到均匀的阈值,根据经验是1.6左右。但随着 $\alpha$ 逐渐增大到与 $K$ 接近,MTGB的函数轮廓又会趋向于高斯型。这是容易理解的:因为根据定义 $\alpha$ 是发散角度 $\theta_c$ 与 $\theta_d$ 的倍数系数,而 $m$ 取值的单位就是 $\theta_d$ , $\alpha$ 越大每个高斯光束的发散角度就越大,则重叠的部分越多,最后光束趋向于高斯分布。图5是 $K=9$ 时不同 $\alpha$ 取值的时候,对应的波形下降到最大幅度值80%时对应的半峰全宽(FWHM)以及其包含的区域对总波形的效率。可以看出 $\alpha$ 越大半峰全宽越小,且 $\alpha$ 越大效率越低。

通过以上分析,从理论上推导出了一种可以在远场获得强度均匀分布的光束模型——倾斜多高斯光束模型,并分析了其均匀特性及效率的影响因素。

图5 MTGB波形的半峰全宽及所含区域的效率随 $\alpha$ 的变化关系Fig. 5 Efficiency and full-width at half-maximum (FWHM) of MTGB versus  $\alpha$  increases

按照此方法进行光学设计的时候,需要兼顾平顶部分的均匀性以及整形的效率选取合适的 $\alpha$ 值。

### 3 半导体激光器堆叠的MTGB均匀化照明设计

ASAP软件是能够对波动光学进行模拟的光学设计软件之一,它有两种波动光学的模拟机制,一种是Gaussian Beam Propagation(GBP),它的原理是把高斯光束描述为一条“base ray”以及四条额外的“Parabasal Rays”再用非序列的光线追迹内核进行计算<sup>[16,17]</sup>;另一种是Beam Propagation Method(BPM),更适用于微结构的计算。本文采用GBP方式进行模拟计算。

在光束整形系统中,先建立半导体激光器堆叠模型,以45个激光单元组成10 mm长的bar,14根bar以1.5 mm的间距排成半导体激光器堆叠。取804~812 nm的随机波长表示其部分相干特性。每根bar的正前方沿着bar的方向放置柱面微透镜( $F=1.11$  mm,材料K9),快轴大整形透镜焦距为90 mm,慢轴整形透镜焦距为57.1 mm,系统如图6所示,A为盖玻片,B为微型柱面透镜,C为快轴整形柱面透镜,D为慢轴整形柱面透镜, $y$ 方向为快轴方向, $x$ 方向为慢轴方向。快轴发散角度先经过柱面微透镜整成 $8^\circ$ ,再经过快轴整形透镜压缩到 $3^\circ$ 左右,则快轴方向多高斯级数 $K=7$ ,均匀化系数 $\alpha=2.06$ 。

快轴整形透镜同时具有场镜的作用,能把每个bar出射的光线进行偏转,根据每个光束的离轴距离 $d_i$ 不同,获得不同的偏转角 $\Delta\theta_i$ 。其关系可以通过矩阵光学方法计算为

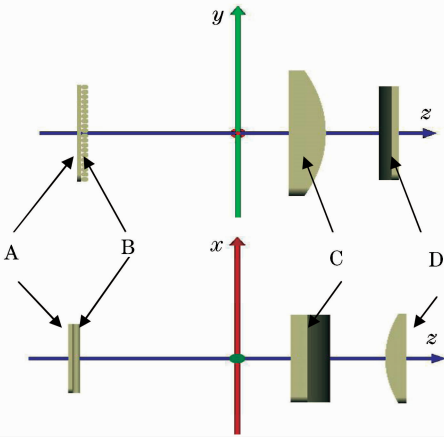


图 6 利用半导体激光器堆叠构成的 MTGB 整形系统  
Fig. 6 Shaping system for laser diodes stack by MTGB method

$$\begin{bmatrix} d'_i \\ \theta'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ \theta_i \end{bmatrix}, \quad (10)$$

则有  $d'_i = d_i, \theta'_i = \theta_i - (d_i/f)$ , 如果  $d_i$  是等差数列, 则  $\theta'_i$  也是等差数列, 合理设计可以获得构成 MTGB 的倾斜角度要求, 形成倾斜多高斯光束模型。慢轴

方向只需要通过一个柱面透镜把沿 bar 方向的各个半导体激光器单元出射的光束从  $8^\circ$  压缩到  $3^\circ$  左右, 同样进行偏转, 形成 MTGB 模型, 慢轴方向上半导体激光器颗粒为 50 颗, 总设计视场为  $10^\circ$ , 则慢轴方向上 MTGB 的级数  $K$  为 25, 均匀化系数  $\alpha$  为 10 左右。

图 7 是系统整形后的效果图, 图 7(a) 考虑的是理想的半导体激光器堆叠, 不含装配等配合误差。可以看到其具有很好的均匀性及边沿快速下降特性, 均匀性几乎在 90% 以上。图 7(b) 则考虑了目前国内获得的半导体激光器的 bar 在装配上沿着快轴有  $\pm 50 \mu\text{m}$  误差的情况, 发现其均匀性有所下降, 但仍然有 75% 以上。

图 8(a), (b) 分别展示了接收屏在 50 m 和 500 m 处的接收情况, 屏的大小是根据  $12^\circ \times 10^\circ$  的视场确定的, 在屏内接收到的能量占半导体激光器堆叠发射总能量的 80% 以上。因为两次模拟误差随机数的关系, 强度的具体分布是有细微差别的。但基本符合 MTGB 远场沿轴传播时光强分布和照明视场不改变的特性。

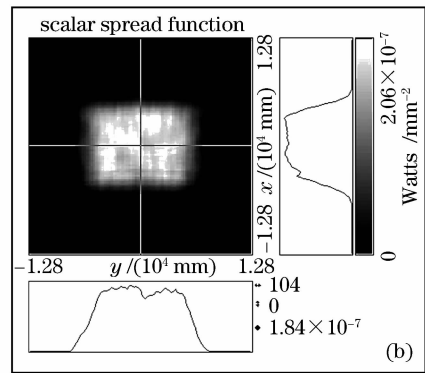
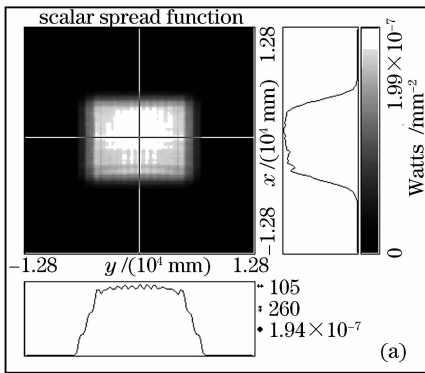


图 7 整形后在 50 m 的接收屏上获得的强度分布图  
Fig. 7 Intensity distribution at the receiver 50 m away

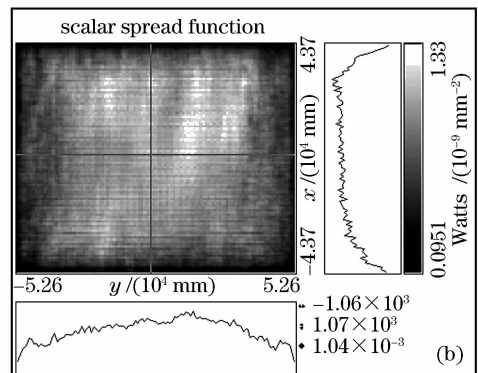
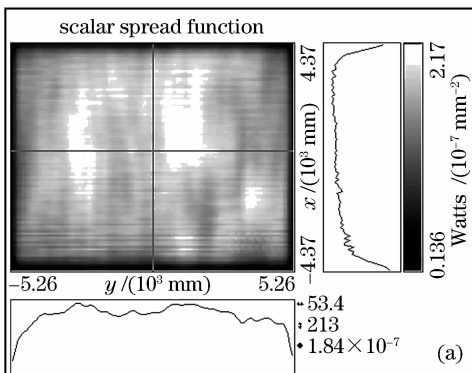


图 8 整形后  $12^\circ \times 10^\circ$  视场的强度分布图  
Fig. 8 Intensity distribution at the receiver with a view angle of  $12^\circ \times 10^\circ$

## 4 结 论

为了实现半导体激光器堆叠的均匀化照明设计,提出了倾斜多高斯光束模型方法,从理论上推导出其平均光强的解析表达式。并从时域和傅里叶频域分析了决定该光束模型均匀性和效率的参数,发现了均匀化系数  $\alpha$ , 多高斯级数  $K$  对均匀性和效率的控制规律。在 ASAP 软件中,成功利用半导体激光器堆叠出射的非相干光束构建 MTGB 模型来实现  $12^\circ \times 10^\circ$  的均匀照明光束。给出了系统设计方案,随后展示了均匀化照明的效果。在考虑了半导体激光器堆叠中 bar 在快轴方向上的  $\pm 50 \mu\text{m}$  装配误差后,该整形系统仍然可以获得 80% 以上的效率和 75% 的均匀性,该方案具有实现可行性,且效率较一般整形方案提高 1.5 倍左右。

## 参 考 文 献

- Zhang Xiuda, Yan Huimin, Jiang Yanbing. Pulse-shape-free method for long-range three-dimensional active imaging with high linear accuracy [J]. *Opt. Lett.*, 2008, **33**(11):1219~1221
- Martin Laurenzis, Frank Christnacher, David Monnin. Long-range three-dimensional active imaging with superresolution depth mapping [J]. *Opt. Lett.*, 2007, **32**(21):3146~3148
- Kawakita Masahiro, Iizuka Keigo, Nakamura Haruhito *et al.*. High-definition real-time depth-mapping TV camera: HDTV axi-vision camera [J]. *Opt. Express*, 2004, **12**(12):2781~2794
- Liping Liu, Ye Tian, Xiudong Sun *et al.*. Influence of laser mode on splitting beam illumination effect of Dammann grating [J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2009, **7**(6):458~461
- Frederic C. Way, Thomas A. Crow. Beam shaping laser diode array output for optical pumping and illumination [C]. *Aerospace Conference Proceedings, IEEE*, 2000, **63**:61~65
- Andre Parent, Kevin J. Snell, Ghislain Lafrance *et al.*. Laser-diode array collimation for scene illumination purposes [C]. *SPIE*, 1998, **3267**:84~90
- Y. Lutz, F. Christnacher. Laser diode illuminator for night vision on-board of a 155 mm artillery shell [C]. *SPIE*, 2003, **5087**:185~194
- Anthony A. Tovar. Propagation of flat-topped multi-Gaussian laser beams [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2001, **18**(8):1897~1904
- Wu Ping, Zhuang Jian, Lü Baida. A new method for producing flat-topped beams; Hermite-Gaussian beam combination [J]. *Chinese J. Lasers*, 2004, **31**(1):48~52  
吴平,庄建,吕百达.一种产生平顶光束的新方法:厄米-高斯光束的合成[J]. *中国激光*, 2004, **31**(1):48~52
- Qianjin Tang, Yongai Yu, Qiquan Hu. A new method to generate flattened Gaussian beam by incoherent combination of cosh Gaussian beams [J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2007, **5**(Suppl.):S46~S48
- Chen Yuan, Pu Jixiong, Liu Xiaoyun. Focusing properties of the partially coherent beams [J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(10):1375~1378  
陈媛,蒲继雄,刘晓云.部分相干光束的聚焦特性[J]. *中国激光*, 2006, **33**(10):1375~1378
- C. Higgs, H. T. Barclay, K. W. Billman. Multibeam laser illuminator approach [C]. *SPIE*, 1999, **3706**:206~215
- Kenneth W. Billman, John A. Breakwell, Richard B. Holmes *et al.*. ABL beam control laboratory demonstrator [C]. *SPIE*, 1999, **3706**:172~179
- Li Yajun. Beam shaping by superposition of fundamental mode Gaussian beam [C]. *SPIE*, 2004, **5525**:128~137
- Chen Tianlu, Wu Ping. Fractional Fourier transforms for cosh-Gaussian beams [J]. *Chinese J. Lasers*, 2005, **32**(7):908~912  
陈天禄,吴平.双曲余弦-高斯光束的分数傅里叶变换特性研究[J]. *中国激光*, 2005, **32**(7):908~912
- Arnaud Jacques. Representation of Gaussian beams by complex rays [J]. *Appl. Opt.*, 1985, **24**(4):538~543
- Wave Optics in ASAP [M]. Breault Research Organization Inc, Tucson, 2004. 9~11