

文章编号: 0258-7025(2010)04-0959-06

# 大气湍流自适应光学随机并行梯度下降算法的优化

陈 波<sup>1,2</sup> 李新阳<sup>1</sup> 姜文汉<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209; <sup>2</sup> 中国科学院研究生院, 北京 100049)

**摘要** 基于随机并行梯度下降(SPGD)算法的自适应光学(AO)无需波前传感器就可以实现对波前相位畸变的闭环补偿。但是算法的收敛速度较慢,制约着其在实时性要求高的系统中的应用。根据 SPGD 算法中随机扰动对收敛速度的影响,提出一种利用泽尼克(Zernike)模式优化算法随机扰动的方法。针对大气湍流,建立了一个基于 SPGD 算法的 61 单元自适应光学仿真模型,并对一组符合 Kolmogorov 特性的相位畸变进行了数值仿真,分析了该优化方法对系统收敛特性的影响。仿真结果表明,与优化前相比,优化随机扰动后,校正精度略微下降,但是收敛速度得到明显的改善。

**关键词** 自适应光学;随机并行梯度下降算法;收敛速度;随机扰动;泽尼克模式

**中图分类号** TP273.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL20103704.0959

## Optimization of Stochastic Parallel Gradient Descent Algorithm for Adaptive Optics in Atmospheric Turbulence

Chen Bo<sup>1,2</sup> Li Xinyang<sup>1</sup> Jiang Wenhan<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China)  
(<sup>2</sup> Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract** Adaptive optics (AO) based on stochastic parallel gradient descent (SPGD) algorithm can be used to correct the phase aberration without the wavefront sensor, but the low speed of convergence confines its application in real-time system. Considering the relationship between the stochastic perturbation and convergence speed of SPGD algorithm, a technique is proposed to optimize the proportion of stochastic perturbation with Zernike mode. Aiming at atmospheric turbulence, a 61-element AO model based on SPGD algorithm is set up, and a group of phase aberration with the Kolmogorov spectrum is simulated numerically to research the effect on convergence characteristic resulting from this method. Results show that, comparing with the AO before optimization, the convergence speed can be improved efficiently although it gives up a little correction precision.

**Key words** adaptive optics; stochastic parallel gradient descent algorithm; convergence speed; stochastic perturbation; Zernike model

### 1 引 言

随着自适应光学(AO)的发展,无波前传感器的自适应光学技术得到广泛关注。该类技术不需要探测波前信息,一般以远场光强信息作为优化的性能指标,通过优化控制算法实现相位畸变补偿。近年来,国内外的大量研究结果表明在自适应光学中随机并行梯度下降(SPGD)算法易于实现,是一种很有潜力的优化算法<sup>[1~3]</sup>。SPGD 算法在自由空间光通信<sup>[4~6]</sup>等领域中的研究也在积极地开展。

无波前传感器自适应光学的一个弱点就是优化算法的速度较慢。研究表明,在自适应光学中随着校正器单元数目的增加,SPGD 算法的收敛速度显著变慢<sup>[7,8]</sup>;另一方面,为了满足实际应用领域的高要求,必然会出现上千单元的高分辨率波前校正器,因此改善 SPGD 算法的收敛速度就变得非常迫切。研究表明,SPGD 算法中的随机相位扰动对收敛速度有很大的影响<sup>[9]</sup>,由随机扰动电压引起的随机相位扰动和波前畸变的相关性越好收敛速度越快。研

收稿日期: 2009-04-22; 收到修改稿日期: 2009-07-08

作者简介: 陈 波 (1984—),男,博士研究生,主要从事自适应光学技术方面的研究。E-mail: chenbo182001@163.com

导师简介: 李新阳(1971—),男,博士,研究员,主要从事自适应光学等方面的研究。E-mail: xyli@ioe.ac.cn

究表明,当用泽尼克(Zernike)模式描述大气湍流相位扰动时,其模式系数间的统计相关性与大气湍流特性有关<sup>[10,11]</sup>,所以利用大气湍流的泽尼克模式特性来优化算法中随机扰动电压,可以提高随机相位扰动和波前畸变的统计相关性,达到改善算法收敛特性的目的。本文建立了相应的自适应光学仿真模型,通过数值仿真的方法分析了利用泽尼克模式优化随机扰动的方法对系统收敛特性的影响。

## 2 SPGD 算法及其收敛速度

在自适应光学中,SPGD算法的基本思想为:第  $m$  次迭代后  $N$  单元校正器的电压为  $\mathbf{u}^{(m)} = \{u_1, \dots, u_j, \dots, u_N\}$ ,系统的性能指标值为  $J[\mathbf{u}^{(m)}]$ ;第  $m+1$  次迭代时,首先产生一组随机扰动电压向量  $\delta\mathbf{u} = \{\delta u_1, \dots, \delta u_j, \dots, \delta u_N\}$ ,然后向波前校正器并行施加电压向量  $\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^{(m)} + \delta\mathbf{u}$ ,系统性能指标记作  $J(\mathbf{u}^+)$ ,接着向波前校正器并行施加电压向量  $\mathbf{u}^- = \mathbf{u}^{(m)} - \delta\mathbf{u}$ ,系统性能指标记作  $J(\mathbf{u}^-)$ , $\delta J$  可计算为

$$\delta J = J(\mathbf{u}^+) - J(\mathbf{u}^-). \quad (1)$$

使用  $\delta J \delta\mathbf{u}$  作为第  $m+1$  次迭代的梯度估计,第  $m+1$  次迭代后波前校正器上的校正电压  $\mathbf{u}^{(m+1)}$  为

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = \mathbf{u}^{(m)} + k\delta J \delta\mathbf{u}, \quad (2)$$

最终使系统性能指标趋于最优,实现闭环校正相位畸变。式中  $k$  为调整迭代步长的增益常数,当性能指标向极大值优化时取正数,反之为负数。一般情况下,随机扰动  $\delta\mathbf{u}$  中各分量  $\delta u_j$  相互独立且同为伯努利分布<sup>[1,3,4]</sup>,即幅值相等  $|\delta u_j| = \sigma$ ,概率分布为  $Pr(\delta u_j = \pm\sigma) = 0.5$ 。

根据(2)式,当增益常数  $k$  和电压扰动幅度  $\sigma$  固定时, $\delta J$  的绝对值大小决定了迭代的步长,  $|\delta J|$  越大算法收敛越快。因此可以通过使  $|\delta J|$  最大而加速收敛。设  $\phi(r)$  为波前相位畸变, $\delta m(r)$  是由随机扰动电压引起的随机相位扰动。研究表明<sup>[9]</sup>,若要使  $|\delta J|$  最大,必须使  $\delta m(r)$  和  $\phi(r)$  具有最大的相关性。

事实上,与传统的有波前探测自适应光学相比,如果每次迭代  $\delta m(r)$  和  $\phi(r)$  完全相关,那么施加在校正器上的随机扰动电压几乎等同于通过波前探测计算得到的残差电压。对于基于 SPGD 算法的自适应光学,由于没有波前传感器,所以无法使  $\delta m(r)$  和  $\phi(r)$  每次迭代都完全相关。然而,通过提高  $\delta m(r)$  和  $\phi(r)$  统计意义上的相关性,可以改善算法的收敛特性。

## 3 利用泽尼克模式优化随机扰动的原理

所采用的波前校正器为 61 单元压电式反射变形镜,根据其工作原理,由随机扰动电压引起的波前相位扰动  $\delta m(r)$  为

$$\delta m(r) = \sum_{j=1}^N \delta u_j V_j(r), \quad (3)$$

式中  $\delta u_j$  是变形镜第  $j$  单元上的扰动电压, $V_j(r)$  是变形镜第  $j$  个驱动器的影响函数, $N$  为变形镜的单元数。

$\delta m(r)$  可以用在圆域内正交的泽尼克模式

$$\delta m(r) = a_0 + \sum_{k=1}^p a_k Z_k(r, \theta) \quad (4)$$

表示,式中  $a_0$  是波前整体平移项, $a_k$  是第  $k$  项泽尼克模式系数, $p$  是采用的模式总数, $Z_k(r, \theta)$  是第  $k$  项泽尼克模式的二维极坐标表达式。

不考虑波前平移和倾斜,根据(3),(4)式,随机扰动电压  $\delta u_j$  和泽尼克系数  $a_k$  的关系为

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{U}\mathbf{a}, \quad (5)$$

式中  $\mathbf{U}$  是一个线性矩阵,可以利用变形镜的影响函数和泽尼克模式表达式计算得到, $\mathbf{a}$  为泽尼克系数向量。

同样,大气湍流引起的相位畸变  $\phi(r)$  也可以用泽尼克模式描述,模式系数向量记作  $\mathbf{b}$ 。研究表明<sup>[8,9]</sup>,用泽尼克模式描述符合 Kolmogorov 特性的大气湍流相位畸变  $\phi(r)$  时, $\mathbf{b}$  具有一定的统计特性。因此,根据泽尼克模式系数  $\mathbf{b}$  的统计特性优化模式系数  $\mathbf{a}$ ,然后利用(5)式将  $\mathbf{a}$  转化为相应的扰动电压  $\delta\mathbf{u}$ ,由此产生的  $\delta m(r)$  和  $\phi(r)$  在统计意义上有很好的相关性,可以改善算法的收敛速度。

## 4 仿真模型

基于 SPGD 算法的自适应光学仿真模型如图 1 所示。根据 Roddier 提出的方法<sup>[11]</sup>,利用前 104 阶泽尼克模式生成统计特性符合 Kolmogorov 谱的入射波前相位畸变。61 单元变形镜(DM)的驱动器分

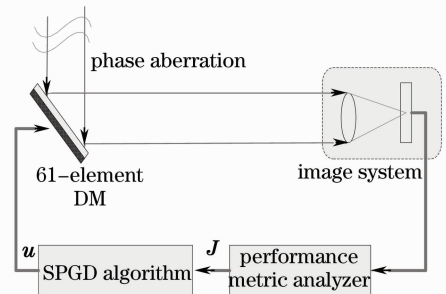


图 1 自适应光学仿真模型

Fig. 1 Numerical simulated AO mode

布如图 2 所示,有效口径为 120 mm,驱动器影响函数采用高斯函数。成像系统的远场光斑由快速傅里叶变换得到,采用峰值斯特列尔比(SR)作为系统的性能指标,即远场光斑峰值与衍射极限时远场峰值之比。SPGD 算法如前所述。

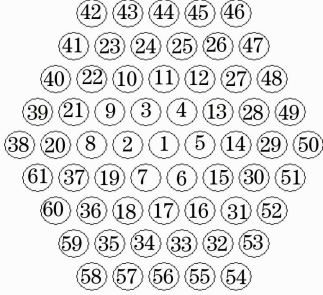


图 2 61 单元变形镜驱动器排布

Fig. 2 Actuator arrangement of 61-element DM

## 5 仿真分析

### 5.1 $\phi(r)$ 与 $\delta m(r)$ 的统计特性

采用 Roddier 提出的方法<sup>[11]</sup>,令  $D/r_0 = 10$ ,不考虑波前相位平移和倾斜,利用前 3 ~ 104 阶泽尼克模式随机产生 100 帧入射波前相位畸变  $\phi(r)$ ,  $\phi(r)$  的泽尼克系数向量记作  $\mathbf{b}$ 。

由于泽尼克系数存在正、负号,因此利用  $|\mathbf{b}|$  衡量相位畸变  $\phi(r)$  中各阶模式的大小。定义  $|\mathbf{b}|$  的统计均值为  $E(|\mathbf{b}|)$ 。图 3 为入射波前相位畸变  $\phi(r)$  的  $E(|\mathbf{b}|)$ ,可以看出,泽尼克模式阶数越高,其系数的绝对值越小。

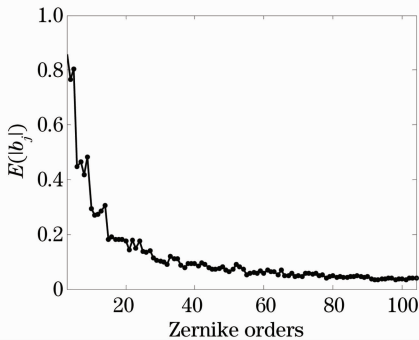


图 3 向量  $\mathbf{b}$  的统计均值  $E(|\mathbf{b}|)$

Fig. 3 Average value  $E(|\mathbf{b}|)$  of  $\mathbf{b}$  vector

向量  $\mathbf{b}$  的方差记作  $D(\mathbf{b})$ 。根据文献<sup>[10,11]</sup>,在 Kolmogorov 湍流下,第  $j$  阶泽尼克系数的方差理论值为

$$\langle b_j^2 \rangle = \frac{2.246(n+1)\Gamma(n-5/6)}{[\Gamma(17/6)]^2 \Gamma(n+23/6)} (D/r_0)^{5/3}, \quad (6)$$

式中  $n$  为泽尼克多项式在极坐标下的径向频率数,  $\Gamma(\cdot)$  为伽马函数。图 4 为仿真产生的 100 帧波前相

位畸变的统计方差  $D(\mathbf{b})$  和根据(6)式计算得到的理论值的比较,可以看出仿真产生的相位畸变  $\phi(r)$  的统计方差与理论值符合得很好。

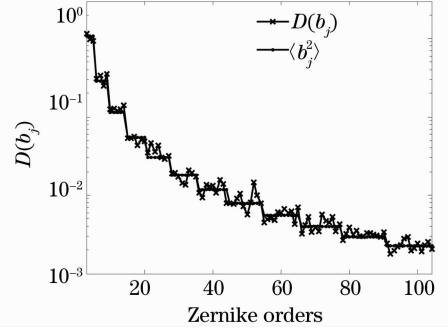


图 4 向量  $\mathbf{b}$  的统计方差  $D(\mathbf{b})$  和理论值对比  
Fig. 4 Variances  $D(\mathbf{b})$  of  $\mathbf{b}$  vector and its theory value

扰动电压施加到变形镜上产生波前相位扰动  $\delta m(r)$ ,  $\delta m(r)$  的泽尼克模式系数向量记作  $\mathbf{a}$ ,  $|\mathbf{a}|$  的统计均值记作  $E(|\mathbf{a}|)$ ,统计方差记作  $D(\mathbf{a})$ 。

为了便于比较,利用各阶泽尼克模式所占的比例进行分析。均值  $E(|\cdot|)$  中各阶所占的比例记作  $p[E(|\cdot|)]$ ,方差  $D(\cdot)$  的比例记作  $p[D(\cdot)]$ 。以向量  $\mathbf{b}$  为例,第  $j$  阶泽尼克模式在  $E(|\mathbf{b}|)$  和  $D(\mathbf{b})$  中的比例分别为

$$p[E(|b_j|)] = \frac{E(|b_j|)}{\sum_{i=3}^{104} E(|b_i|)},$$

$$p[D(b_j)] = \frac{D(b_j)}{\sum_{i=3}^{104} D(b_i)}.$$

定义  $p[E(|\mathbf{b}|)]$  和  $p[E(|\mathbf{a}|)]$  的相关系数为  $\eta_E$ ,  $p[D(\mathbf{b})]$  和  $p[D(\mathbf{a})]$  的相关系数为  $\eta_D$ 。以  $\eta_E$  为例,  $\eta_E$  为

$$\eta_E = \frac{\sum_{i=3}^{104} \{p[E(|b_i|)]p[E(|a_i|)]\}}{\sqrt{\sum_{i=3}^{104} \{p[E(|b_i|)]\}^2} \sqrt{\sum_{i=3}^{104} \{p[E(|a_i|)]\}^2}}. \quad (7)$$

$\eta_E$  和  $\eta_D$  越大表示  $\phi(r)$  与  $\delta m(r)$  相关性越好,  $\eta_E$  和  $\eta_D$  最大值为 1。

### 5.2 利用泽尼克模式优化随机扰动电压

随机扰动电压  $\delta u$  施加到变形镜上,产生相应的相位扰动记作  $\delta m(r)$ ,其泽尼克模式的统计特性  $p[E(|\mathbf{a}|)]$  和  $p[D(\mathbf{a})]$  如图 5,6 所示,其中  $p[E(|\mathbf{b}|)]$  和  $p[D(\mathbf{b})]$  是入射相位畸变  $\phi(r)$  的统计特性。可以看出,前 3 ~ 14 阶  $p[E(|\mathbf{a}|)]$  明显小

于  $p[E(|b|)]$ ,  $p[D(a)]$  明显小于  $p[D(b)]$ ; 14 阶后  $p[E(|a|)]$  略大于  $p[E(|b|)]$ ,  $p[D(a)]$  略大于  $p[D(b)]$ 。计算得到:  $\eta_E = 0.57$ ,  $\eta_D = 0.6037$ 。为了提高  $\eta_E$  和  $\eta_D$ , 应当提高相位扰动  $\delta m(r)$  中低阶所占的比例。

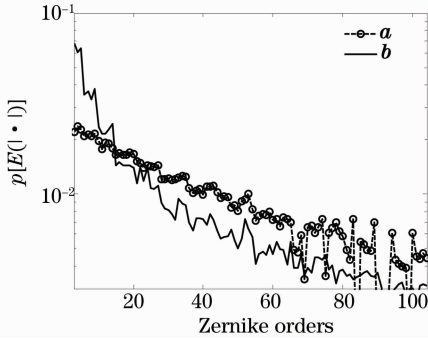


图5 优化前  $p[E(|a|)]$  和  $p[E(|b|)]$  对比

Fig. 5 Comparing  $p[E(|a|)]$  with  $p[E(|b|)]$  before optimization

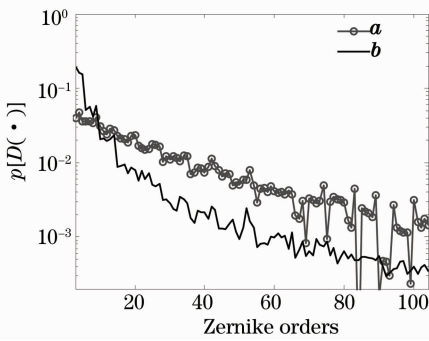


图6 优化前  $p[D(a)]$  和  $p[D(b)]$  对比

Fig. 6 Comparing  $p[D(a)]$  with  $p[D(b)]$  before optimization

下面提出一种利用泽尼克模式优化扰动电压  $\delta u$  的方法: 令  $|a_j|$  为

$$|a_j| = \sigma \times j^{-\gamma}, \quad (8)$$

概率分布为  $Pr(a_j = \pm \delta \times j^{-\gamma}) = 0.5$ ,  $\delta$  为常数,  $\gamma$  为衰减系数。  $\gamma$  越大,  $\delta m(r)$  中低阶模式所占的比例越大, 高阶所占的比例越小, 然后利用(5)式计算得到相应的扰动电压  $\delta u$ 。

利用泽尼克模式产生随机扰动电压时, 首先需要选择模式数量。根据(5)式可知, 所用模式数量越多, 矩阵  $U$  越大, 运算量也就越大。在此, 以 61 单元变形镜对均方根(RMS)为 1 rad 的单阶泽尼克相差的校正能力为依据来选取合适的模式数量。图 7 为校正后的残余波前 RMS。可以看出, 泽尼克模式阶数越高, 变形镜的校正能力越差。考虑到实际大气扰动中低阶相差占绝大多数, 在此选取 3~35 阶

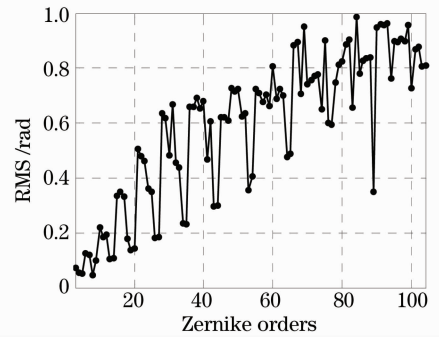


图7 残余波前的均方根

Fig. 7 RMS of error wavefront

泽尼克模式去生成随机扰动电压。

$\gamma$  等于 0, 0.2, 0.5, 0.75 和 1.0 时,  $\eta_E$  和  $\eta_D$  如图 8 所示。当  $\gamma = 0.5$  时, 相关系数  $\eta_E$  和  $\eta_D$  最大, 分别为 0.9747 和 0.9423, 对应的  $p[E(a)]$  和  $p[D(a)]$  如图 9, 10 所示。可以看出, 优化扰动电压后,  $p[E(a)]$  和  $p[D(a)]$  在 3~35 阶的数值明显提高, 与  $p[E(b)]$  和  $p[D(b)]$  较为一致; 35 阶以后  $p[E(a)]$  和  $p[D(a)]$  略低于  $p[E(b)]$  和  $p[D(b)]$ 。与优化之前相比,  $\eta_E$  和  $\eta_D$  分别提高了 42% 和 36%,  $\delta m(r)$  和  $\phi(r)$  的相关性得到明显改善。

对 100 组入射畸变波前进行闭环仿真, 使用统

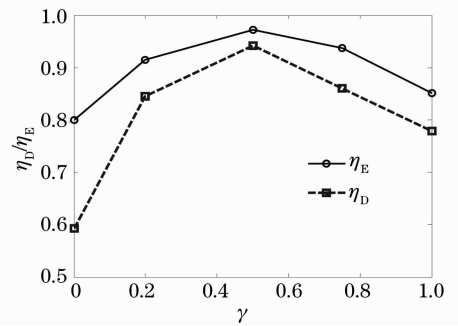


图8  $\gamma$  等于 0, 0.2, 0.5, 0.75 和 1.0 时的  $\eta_E$  和  $\eta_D$

Fig. 8  $\eta_E$  and  $\eta_D$  when  $\gamma = 0, 0.2, 0.5, 0.75, 1.0$

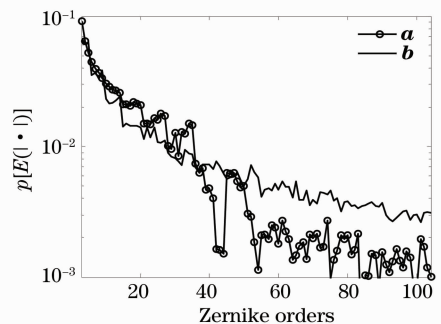


图9 优化后  $p[E(|a|)]$  和  $p[E(|b|)]$  对比

Fig. 9 Comparing  $p[E(|a|)]$  with  $p[E(|b|)]$  after optimization



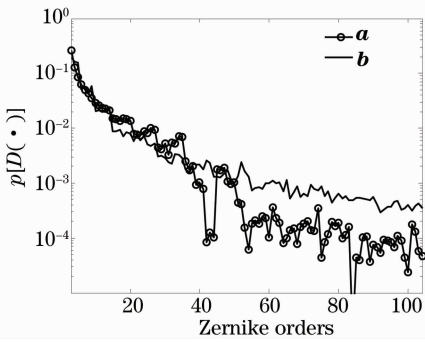


图 10 优化后  $p[D(a)]$ 和  $p[D(b)]$ 对比

Fig. 10 Comparing  $p[D(a)]$  with  $p[D(b)]$  after optimization

计结果分析 SPGD 算法的收敛特性。与通常使用单帧数据分析相比,结果更加合理。相位畸变经  $m$  次闭环迭代后的性能指标记作  $SR_m$ ,其中  $SR_0$  表示校正前的性能指标。100 帧相位畸变经过  $m$  次迭代后,性能指标值等于  $SR_m$  的帧数与总帧数(100)之比记作  $p(SR_m)$ 。 $p(SR_m)$  反映出  $m$  次迭代后性能指标的统计分布。此外,由于  $SR_0$  不一样,所以使用  $m$  次迭代后  $SR$  提高倍数  $SR_m/SR_0$  去衡量收敛速度比直接使用  $SR_m$  更为合理。

优化扰动电压前和使用泽尼克模式优化后,100 帧相位畸变经过  $m$  次迭代后性能指标  $SR_m$  的统计分布  $p(SR_m)$  分别如图 11 和图 12 所示。100 帧相位畸变经  $m$  次迭代后  $SR$  提高倍数的均值  $[SR_m/SR_0]$  如图 13 所示。对比图 11 和 12 可以看出,优化扰动电压以后,在前 100 次迭代过程中  $SR$  提高的速度显著加快;400 次迭代后  $SR$  提高的倍数(即校正精度)有所降低。从图 13 可以看出,优化扰动电压后,性能指标提高 4, 6, 8 倍所用的迭代次数分别是优化前的 0.50, 0.53, 0.63 倍,即收敛时间缩短近 1 倍,收敛速度提高近 2 倍。

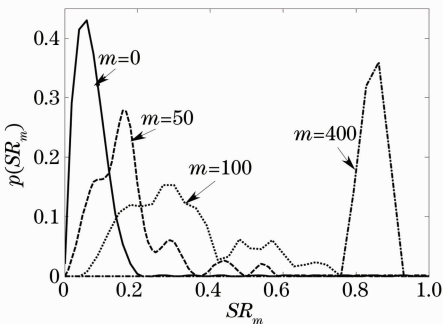


图 11 优化前  $m$  次迭代后  $SR$  的分布

Fig. 11  $p(SR_m)$  of  $SR_m$  after  $m$  iterations before optimization

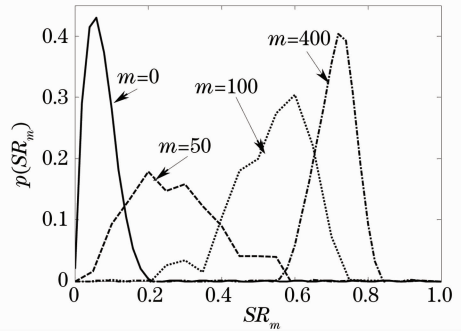


图 12 优化后经过  $m$  次迭代后  $SR$  的分布

Fig. 12  $p(SR_m)$  of  $SR_m$  after  $m$  iterations after optimization

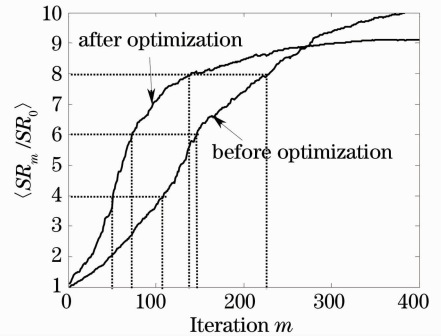


图 13  $m$  次迭代后  $SR$  提高倍数的均值

Fig. 13 Averaged ratio of  $SR_m$  to  $SR_0$  after  $m$  iterations

以上分析进一步说明,SPGD 算法的收敛特性与随机扰动电压有很大的关系,由扰动电压引起的相位扰动和待校正的波前相位畸变相关性越好,算法的收敛速度越快。因此根据相位畸变的泽尼克模式的统计特性,选择合适数量的模式生成扰动电压,可以有效地改善算法的收敛特性。尽管该优化方法会受到所选模式数量的限制,适度地影响系统的校正精度,但是明显提高了算法的收敛速度,因此对于实时性要求较高的系统来说有很大的意义。

### 6 结 论

根据自适应光学中 SPGD 算法的随机扰动电压与收敛速度的关系,提出一种利用泽尼克模式来优化随机扰动电压的方法,以此提高算法的收敛速度。首先分析了利用泽尼克模式优化随机扰动电压的原理,然后仿真分析了大气湍流情况下该方法对改善系统收敛特性的作用。仿真结果进一步说明,SPGD 算法的收敛特性与扰动电压有很大的关系。通过优化扰动电压,提高相位扰动与待校正畸变相位的泽尼克模式的统计相关性,可以有效地改善算法的收敛速度。

需要说明的是本文所提出的优化方法并不局限于大气湍流情况。在不同的应用场合,根据波前畸变的泽尼克模式统计特性就可以有针对性地产生SPGD算法的扰动电压,提高由扰动电压引起的扰动相位和待校正的相位畸变的统计相关性,从而提高收敛速度。此外,本文提出的分析相位扰动的泽尼克模式分布的方法,可以作为一种研究SPGD算法收敛特性的方法,因此将进一步研究SPGD算法是否更适用于模式型波前校正器。

### 参 考 文 献

- 1 M. A. Vorontsov, G. W. Carhart. Adaptive phase-distortion correction based on parallel gradient descent optimization [J]. *Opt. Lett.*, 1997, **22**(12): 907~909
- 2 Piotr Piatrou, Michael Roggemann. Beaconless stochastic parallel gradient descent laser beam control; numerical experiments [J]. *Appl. Opt.*, 2007, **46**(27): 6831~6842
- 3 Yang Huizhen, Chen Bo, Li Xinyang *et al.*. Experimental demonstration of stochastic parallel gradient descent control algorithm for adaptive optics system [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(2): 205~210  
杨慧珍, 陈波, 李新阳等. 自适应光学系统随机并行梯度下降控制算法实验研究 [J]. *光学学报*, 2008, **28**(2): 205~210
- 4 Yang Huizhen, Cai Dongmei, Chen Bo *et al.*. Analysis of adaptive optics techniques without a wave-front sensor and its application in atmospheric laser communications [J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(5): 680~684  
杨慧珍, 蔡冬梅, 陈波等. 无波前传感自适应光学技术及其在大气光通信中的应用 [J]. *中国激光*, 2008, **35**(5): 680~684
- 5 Li Jie, Chen Haiqing, Wu Peng. Close-loop adaptive compensation for thermally induced aberration laser beams [J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(12): 1605~1608  
李捷, 陈海清, 吴鹏. 热畸变激光光束的闭环自适应补偿 [J]. *中国激光*, 2006, **33**(12): 1605~1608
- 6 T. Weyrauch, M. A. Vorontsov, J. W. Gowens II *et al.*. Fiber coupling with adaptive optics for free-space optical communication [C]. *SPIE*, 2002, **4489**: 177~184
- 7 Chen Bo, Yang Huizhen, Zhang Jinbao *et al.*. Performance index and convergence speed of parallel gradient descent algorithm in adaptive optics of point source [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(5): 1143~1148  
陈波, 杨慧珍, 张金宝等. 点目标成像自适应光学随机并行梯度下降算法性能指标与收敛速度 [J]. *光学学报*, 2009, **29**(5): 1143~1148
- 8 M. A. Vorontsov, G. W. Carhart. Adaptive optics based on analog parallel stochastic optimization: analysis and experimental demonstration [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2000, **17**(8): 1440~1453
- 9 M. A. Vorontsov, V. P. Sivokon. Stochastic parallel-gradient-descent technique for high-resolution wave-front phase-distortion correction [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1998, **15**(10): 2745~2758
- 10 R. J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, **66**(3): 207~211
- 11 N. Roddier. Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials [J]. *Opt. Eng.*, 1990, **29**(10): 1174~1180